



根据教育部2001年考研大纲编写

博士系列

2001 考研

考研最后冲刺

命题预测试

(数学四)

编写 北大·清华·人大考研串讲班联

总策划 胡东华



科学

2001 年考研最后冲刺 命题预测试卷 (数学四)

编 写 北大·清华·人大考研串讲班
总策划 胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

出 版 者:科学技术文献出版社

图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所
大楼 B 段/100038

邮 购 部 电 话:(010)62579473

图书发行部电话:(010)62579473 (010)62624508

门 市 部 电 话:(010)62534447 62543201

图书发行部传真:(010)62579473

E-mail:stdph@istic.ac.cn

策 划 编 辑:胡东华

责 任 编 辑:何 艳

责 任 校 对:何 艳

封 面 设 计:胡东华

发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销

印 刷 者:保定市河北小学印刷厂

版 (印) 次:2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷

开 本:787×1092 16 开

字 数:320 千字

印 张:100

本 册 定 价:20.00 元(全七册合计定价:140 元)

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

盗版举报电话:(010)62878310(出版者), (010)62534708(著作权者)

本丛书封面均贴有“双博士”激光防伪标志,凡无此标志者为非法出版物,盗版书刊因错漏百出、印刷粗糙,对读者会造成身心侵害和知识上的误解,希望广大读者不要购买。

数学四

数学四的说明

一、适用的专业

农业经济(含林业经济、畜牧业经济、渔业经济)、商业经济(含物资经济)、劳动经济学、财政学、货币银行学、会计学(含审计学)、国际贸易、国际金融、世界经济、政治经济学、马克思主义经济思想史、中国经济思想史、西方经济学、外国经济史、外国经济思想史、消费经济、商品学、旅游经济、城市经济、国际经济以及对数学要求较低的人口经济学、保险学专业。

二、考试内容

微 积 分

(一)函数、极限、连续

函数的概念及其表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 反函数、复合函数、隐函数、分段函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 数列极限与函数极限的定义以及它们的性质 函数的左极限和右极限 无穷小和无穷大的概念及其关系无穷小的基本性质及阶的比较 极限四则运算 极限存在的两个准则(单调有界准则和夹逼准则) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续与间断的概念 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

(二)一元函数微分学

导数的概念 导数的几何意义和经济意义 函数的可导性与连续性之间的关系 导数的四则运算 基本初等函数的导数 复合函数、反函数和隐函数的导数 高阶导数 微分的概念和运算法则

罗尔(Rolle)定理和拉格朗日(Lagrange)中值定理及其应用 洛必达(L'Hospital)法则 函数单调性 函数的极值 函数图形的凹凸性、拐点及渐近线 函数图形的描绘 函数的最大值和最小值

(三)一元函数积分学

原函数与不定积分的概念 不定积分的基本性质 基本积分公式 不定积分的换元积分法和分部积分法

定积分的概念和基本性质 定积分中值定理 变上限定积分定义的函数及其导数 牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式 定积分的换元积分法和分部积分法 广义积

分的概念及计算 定积分的应用

(四)多元函数微积分学

多元函数的概念 二元函数的几何意义 二元函数的极限与连续性 有界闭区域上二元连续函数的性质(最大值和最小值定理) 多元函数的偏导数的概念与计算 多元复合函数的求导法与隐函数的求导法 高阶偏导数 全微分 多元函数的极值和条件极值、最大值和最小值

二重积分的概念、基本性质和计算 无界区域上的简单二重积分的计算

线 性 代 数

(一)行列式

行列式的概念和基本性质 行列式按行(列)展开定理

(二)矩阵

矩阵的概念 单位矩阵、对角矩阵、数量矩阵、三角矩阵和对称矩阵 矩阵的线性运算 矩阵与矩阵的积 方阵乘积的行列式 矩阵的转置 逆矩阵的概念和性质 矩阵可逆的充分必要条件 矩阵的伴随矩阵 矩阵的初等变换 初等矩阵 矩阵等价 矩阵的秩 分块矩阵及其运算

(三)向量

向量的概念 向量的线性组合与线性表示 向量组线性相关与线性无关的概念、性质和判别法 向量组的极大线性无关组 等价向量组 向量组的秩 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系

(四)线性方程组

线性方程组的解 线性方程组的克莱姆(Cramer)法则 线性方程组有解和无解的判定 齐次线性方程组的基础解系和通解 非齐次线性方程组的解与相应的齐次线性方程组(导出组)的解之间的关系 非齐次线性方程组的通解

(五)矩阵的特征和特征向量

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质 相似矩阵的概念和性质 矩阵可对角化的充分必要条件及相似对角矩阵 实对称矩阵的特征值和特征向量及相似对角矩阵

概 率 论

(一)随机事件和概率

随机事件与样本空间 事件的关系 事件的运算及其性质 事件的独立性 完全事件组 概率的定义 概率的基本性质 古典型概率 条件概率 加法公式 乘法公式 全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式 独立重复试验

(二)随机变量及其概率分布

随机变量及其概率分布 随机变量的分布函数的概念及其性质 离散型随机变量的概率分布 连续型随机变量的概率密度 常见随机变量的概率分布

(三)二维随机变量及其概率分布

二维随机变量及其联合(概率)分布 二维离散型随机变量联合概率分布和边缘分布 二维连续型随机变量的联合概率密度和边缘密度 随机变量的独立性 常见二维随机变量的联合分布 随机变量函数的概率分布

(四)随机变量的数字特征

一随机变量的数学期望、方差、标准差以及它们的基本性质 二随机变量函数的数学期望
三随机变量的协方差及其性质 四随机变量的相关系数及其性质

(五)中心极限定理

泊松(Poisson)定理 棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理(二项分布以正态分布为极限分布) 列维-林德伯格(Lévy-Lindberg)定理(独立同分布的中心极限定理)

三、试卷结构

1. 内容比例

- (1)微积分 约 50%；
- (2)线性代数 约 25%；
- (3)概率论 约 25%。

2. 题型比例

- (1)填空题、选择题 约 30%；
- (2)解答题(包括证明题) 约 70%。

试卷密号:

试卷密号:

此密号考生不得填写

2001 年全国硕士 研究生入学统一考试试卷
(预测 1-12 套)

考试科目 数学(四)

题 号	分 数	阅卷人
一		
二		
三		
四		
五		
六		
七		
八		
九		
十		
十一		
十二		
总分		

准考证编号 _____
考试科目 _____
报考学科、专业 _____
报考研究方向 _____
报 考 单 位 _____

注意:此半页考生不得填写

注 意 事 项

1. 以上各项除试卷密号之外必须填写清楚。
2. 答案必须写在试卷上。
3. 字迹要清楚、卷面要整洁。
4. 草稿纸另发,考试结束,统一收回。

数学四预测试卷(No.1)

考生注意:(1) 本试卷共十二个大纲,满分 100 分。

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x, \cot x, \arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示。

得分	评卷人

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。把答案填在题后横线上)

(1) 设 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 则 $y'''|_{x=\sqrt{3}} = \underline{\quad\quad\quad}$ 。

(2) 求曲线 $f(x) = x(x-2)(3-x)$ 与 x 轴围成的有限面积 $A = \underline{\frac{37}{12}}$;

(3) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 而 $n \geq 2$ 为整数, 则 $A^n - 2A^{n-1} = \underline{\quad\quad\quad}$ 。

(4) 某学生投篮练习, 第一次投进的概率为 0.6, 第二次投进的概率为 0.4, 第三次投进的概率为 0.8。该生投篮三次投进的概率为 $\underline{\quad\quad\quad}$;

(5) 设随机变量 X 在区间 $[-1, 2]$ 上服从均匀分布, 随机变量 $Y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, 则方差 $DY = \underline{\frac{4}{9}}$ 。

得分	评卷人

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。在每小题的四个选项中只有一项符合要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) $y = f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上()

- (A) 严格凸的; (B) 严格凹的;
(C) 不是严格凸的; (D) 不是严格凹的。

(2) 下列广义积分收敛的是()

- A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$
C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$ D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$

(3) 设 $AX = 0$ 是线性方程组 $AX = B$ 的导出组, 则必有()

- (A) 若 A 的行向量组线性无关时, $AX = 0$ 只有零解;
(B) 若 $AX = 0$ 只有零解时, $AX = B$ 有唯一解;
(C) 若 $AX = 0$ 有非零解时, $AX = B$ 有无穷多解;
(D) 若 A 的列向量组线性相关时, $AX = B$ 有无穷多解;
(4) 设 n 阶方阵 A 的秩 $A < n$, 则在 A 的 n 个行向量中()

- A. 必有 r 个行向量线性无关
 B. 任意 r 个行向量均可构成极大无关组
 C. 任意 r 个行向量均线性无关
 D. 任一个行向量均可由其他 r 个行向量线性表示

(5) 随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi(1+x^2)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 则 X 的分布函数是()

- (A) 连续函数;
 (B) 阶梯函数;
 (C) 只有一个间断点的非阶梯函数;
 (D) 有两个以上间断点的非阶梯函数。

得分	评卷人

三、(本题满分 6 分)

曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形, 记切点的横坐标为 α . 试求切线方程和这个图形的面积. 当切点沿曲线趋于无穷远时, 该面积的变化趋势如何?

得分	评卷人

四、(本题满分 6 分)

设 $f(t) = \int_0^1 |t - x| dx$

- (1) 计算 $f(t)$;
 (2) 求 $f'(x)$

得分	评卷人

五、(本题满分 7 分)

设总成本 C 关于产量 x 的函数 $C(x) = 400 + 3x + \frac{1}{2}x^2$, 需求量 x 关于价格 P 的函数为 $P = \frac{100}{\sqrt{x}}$, 求(1) 边际成本; (2) 边际收益; (3) 边际利润; (4) 收益对价格的弹性.

得分	评卷人

六、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x, y)$ 连续, 且满足 $f(x, y) = |x|e^y - x \cos(xy) + \iint_D f(x, y) dx dy$ 其中 D 是由曲线 $y = |x|$ 及 $y = x^2$ 围成的平面有界区域。求函数 $f(x, y)$ 。

得分	评卷人

七、(本题满分 7 分)

设 n 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2 - 3A + 2E = 0$ (A 是给定的, E 是 n 阶单位阵), 求证 A 可逆, 并求其逆.

得分	评卷人

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (A 为有限值). 证明在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在一点 ξ , 使得 $\frac{-\xi}{(1+\xi)^{3/2}} = f'(\xi)$.

得分	评卷人

九、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0, \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$.

试证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

得分	评卷人

十、(本题满分 9 分)

设 A, B 都是 n 阶方阵, 且有自然数 m , 使得 $A^m = 0$ 。如果存在可逆矩阵 C , 同时使 $C^{-1}AC$ 与 $C^{-1}BC$ 都是上三角矩阵。证明行列式 $|A + B| = |B|$ 。

得分	评卷人

十一、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布

$$X_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, X_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ 而且 } P\{X_1 X_2 = 0\} = 1, \text{ 求}$$

(1) X_1 和 X_2 的联合分布;

(2) 问 X_1 和 X_2 是否独立?为什么?

附表: 正态分布数值表 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	2.5	3
Φ	0.5	0.841	0.977	0.994	0.999

得分	评卷人

十二、(本题满分 8 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 其中 D 是由曲线 $y = x^3$ 及 $y = \sqrt{x}$ 围成的有界区域。求

(1) (X, Y) 的联合概率密度 $f(x, y)$ 及边缘概率密度;

(2) $\xi = X + Y$ 及 $\eta = 5Y^2$ 的均值。

数学四预测试卷(No.2)

考生注意:(1) 本试卷共十二个大题,满分 100 分。

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$, $\cot x$, $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示。

得分	评卷人

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。把答案填在题后横线上)

(1) 设
$$\begin{cases} x = \ln \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases} \quad \text{则 } \frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) 若 $a > 0, b > 0$ 均为常数,则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 和 γ 都四维向量,矩阵 $A = (\alpha_1, 2\alpha_2, \beta, -\alpha_3), B = (\alpha_1, -2\alpha_2, \gamma, 3\alpha_3)$, 且 $|A| = 1, |B| = 2$, 则 $|2A + B| = \underline{\hspace{2cm}};$

(4) 已知四阶矩阵 A 相似于 B , A 的特征值为 2, 3, 4, 5, E 为四阶单位矩阵, 则 $|B - E| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $Y = \ln(X+1)$ 的概率密度为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

得分	评卷人

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。在每小题的四个选项只有一项符合要求,把所选项的字母填在题后括号内)

(1) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ()

A. 存在且一定等于零

B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在

D. 不一定存在

(2) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta) (\delta > 0)$ 内有定义。对任意 $x \in (-\delta, \delta)$, 恒有 $|f(x)| \leq \sin^2 x$ 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ ()

(A) 间断;

(B) 连续但不可导;

(C) 可导, 但 $f'(x) \neq 0$;

(D) 可导且 $f'(x) = 0$ 。

(3) 设 a_1, a_2, a_3 是四元非齐次线性方程组 $AX = b$ 的三个解向量, 且秩 $(A) = 3, a_1 =$

$(1, 2, 3, 4)^T, a_2 + a_3 = (0, 1, 2, 3)^T, C$ 表示任意常数, 则线性方程组 $AX = b$ 的通解 $X =$ ()

- A. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

(4) 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = A \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$, 且 $P\{X = 2\} = P\{X = 3\}$, 则 $P\{X = 6\} =$ ()

- (A) e^3 ; (B) e^{-3} ; (C) $\frac{81}{80}e^{-6}$; (D) $\frac{81}{80}e^{-3}$.

(5) 假设随机变量 X 服从指数分布, 则随机变量 $Y = \min\{x, 2\}$ 的分布函数()

- A. 是连续函数 B. 至少有两个间断点
C. 是阶梯函数 D. 恰好有一个间断点

得分	评卷人

三、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微, 且 $F(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^1 f(x+bu) du$, 求 $F'(x)$.

得分	评卷人

四、(本题共 2 个小题每小题 4 分, 满分 8 分)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] (a \neq 0)$

(2) 计算 $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{1/x} + e^{3-x}}$

得分	评卷人

五、(本题满分 6 分)

某工厂制造某种电器, 固定成本为 400 万元, 每生产一件产品的成本增加 0.8 万元, 交纳税金为 0.2 万元。如果总收益 R 是月产量 x 的函数

$$R = R(x) = \begin{cases} 30x - \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 60 \\ 900, & x > 60 \end{cases}$$

(1) 该厂月产量为多少时, 总利润最大? 最大利润是多少?

(2) 如果当产量大于 60 件时, 纳税额改为总收益的 1% 再加上月产量的 $\frac{1}{20}$ 万元。试计算最大利润的总税金及生产 80 件时的总税金。

得分	评卷人

六、(本题满分 6 分)

过曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 作一切线, 使之与曲线及 x 轴围成图形的面积为 $\frac{1}{12}$, 求: (1) 切点 A 的坐标; (2) 过切点 A 的切线方程; (3) 由上述图形绕 x 轴旋转成的旋转体体积 V .

得分	评卷人

七、(本题满分 7 分)

设有三阶方阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 计算 $(BA^*)^9$ 。

得分	评卷人

八、(本题满分 6 分)

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x}$$

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x)F(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 已知 $F(0) = 1$, $F(x) > 0$, 试求 $f(x)$ 。