中 学 数 学 解 题 方 法

（代数部分）

谭光宙　丁家泰　赵素兰

北 京 师 范 大 学 出 版 社

1982.12.

中学数学解题方法
（代数部分）
谭光宙　丁家泰
赵素兰
*
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省邯郸地区印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/32　印张：9.75　字数：206千
1982年12月第1版　　1982年12月第1次印刷
印数：1—75,000
统一书号：7243·82　定价：0.82元

前　言

在多年的教学实践中，我们深感，学会思考数学问题的方法和掌握解题的一些技能技巧是教师教好数学、学生学好数学的重要因素。为此，我们根据《中学数学教学大纲》和现行中学数学教材，以阐述逻辑思维、总结中学数学各部分题的解题方法与技巧为主，以例题的形式说明方法与技巧的应用为辅编写了这本书。

本书的编写旨在为帮助高、初中学生，自学数学的知识青年、职工干部，以及中学数学教师巩固并熟练掌握数学基础知识，提高逻辑思维能力，简捷地掌握解数学题的一般方法和某些特殊技巧。

本书由谭光宙、丁家泰会同郁华、张乃凡、郑连德、安书田、赵素兰、张士清、张德平、谢佑玛、岳松岭、李俊仁、程振球、吕盛茂、朱文礼、张国田、郑雅桥、霍焕武等同志编写。

本书稿曾请我们的老师——北京师范大学数学系蒋铎等先生详细地审阅，对此我们表示衷心的感谢。

在编写过程中，我们还曾得到董绍勤、曹德荣、贾志田、陈守仁、赵文智等卅多位著名中学教师、高等院校教师和领导的热情支持和帮助，在此表示谢意。

限于我们的水平，书中谬误一定不少，希广大读者批评指正。

编　者

目　　录

引　言

中学数学课程一般地包括初等代数、初等几何、平面三角、平面解析几何、初等微积分等不同学科的内容。每个学科分别从不同的角度研究着客观世界中的数量关系，空间形式，以及“数”、“形”结合的问题。并用定理、法则等把这些研究对象的最基本的规律明确地表示出来，以备做解决实际问题与今后学习的基础知识。要想学好数学，不仅要理解并掌握数学课本中的“基础知识”，而且必须学会思考数学问题的方法和掌握解题的一些技能技巧。

数学问题的类型繁多而庞杂，对于不同的问题往往有不同的解决办法，所以解题的方法与技巧也是多种多样的，灵活多变的。本书只是简单地介绍一下中学数学的一些解题方法和技巧。它虽然很不完善，但一个人要全部掌握这些方法并达到灵活运用，却又是一件极不容易的事。好的方法来源于正确的思维！问题的关键不在于去死记硬背几种解题方法与技巧，而在于要学会思考数学问题的方法，所以我们在学习解题法的时候，应注意培养和锻炼自己的思维能力，学会正确的思维方法。

为了帮助大家学会正确地分析与思考数学问题，更好地掌握各类题的解题方法，下面我们特对逻辑思维的基本规律、数学命题的四种形式、证明时必须遵守的五条规则、常用的三种思维方法、解题法概述等五个问题作一简单的介绍。

一、逻辑思维（形式逻辑）的基本规律

在数学推理中，形式逻辑提供出使思维合乎逻辑的规则。这些规则是必须遵守的，如果不遵守它们，就会破坏思维，引起思维中的混乱，从而得不出正确的结论。形式逻辑的基本规律有四：

1. 同一律：同一律的基本内容是：同一对象在同一时间内和同一关系下是确定不变的。同一律要求在论证过程中所使用的概念要有确定的意义，不能以不同的意义加在这些概念中，否则就会犯偷换概念的逻辑错误。

2. 矛盾律：矛盾律的基本内容是：对同一对象在同一关系下的两种互相矛盾的思想，至少有一个是错误的。矛盾律是任何否定的逻辑基础。

3. 排中律：排中律的基本内容是：同一对象在同一时间和同一关系下，或者具有某种性质或者不具有某种性质，不能够有第三种情形。矛盾律和排中律两者都是排斥思想的矛盾，在这点上它们是相互联系的。

4. 充足理由律：充足理由律的基本内容是：任何思路只当它有充足理由时，才能被认为是对的。所谓充足理由是这样的一种思想：如果承认它是对的，那末就必须承认由它推出来的另一种思想也是对的，若第二种思想是由第一种思想推出来的，则把第一种思想叫做理由，第二种思想叫做推断。

值得注意的是：对于形式逻辑推理，在数学中起着重要的作用，这一点任何人都不否定，但不能过分夸大它的作用。数学史中各种数学的实际研究工作的探索过程都表示辩证思维在数学发展中起着主导作用，而形成逻辑的推演在数

学探索过程中，与其说它是一个认识工具，探索工具，倒不如说它是一种整理的工具，使数学语言精确化和格式化的工具。我们在使用形式逻辑的时候不应当忽视这一点。

二、数学命题的四种形式

（1）若A则B；（原命题）

（2）若B则A；（(1)的逆命题）

（3）若不A则不B；（(1)的否命题）

（4）若不B则不A。（(1)的逆否命题）

（这里的不A表示A的否定，即A不成立）

必须弄清下面两点：

1. 当某一命题成立时，它的逆命题或否命题不一定成立。

2. 当某一命题成立时，它的逆否命题必然成立，反之亦然。

三、证明时必须遵守的五条规则

所谓证明，就是引用其它的判断来判明某一论断的正确性，在数学里被引用的命题是定义、公理和定理（包括已证明是正确的练习题）等。所谓公理是不加证明就采用的命题，虽然公理没有证明，但它们的真实性是在实践中受到考验的。关于定义、定理这里不赘述。

凡是证明，必须遵守下列五条规则：

1. 命题必须是确定明确的判断，否则叫做命题含糊，无法论证。

例如：连接四边形四边中点成一平行四边形。两个相似三角形的高的比等于相似比。这都是命题含糊的例子。

2. 在证明的全部过程中，命题必须保持不变，否则叫做偷换命题。

例如：证明四边形的内角和是360°。学生常常画一个矩形来代替命题中的任意四边形，并证出矩形的四个内角和为360°，从而得出结论。这就是偷换命题之一例。

3. 所引用的论据必须是真确无误的，否则这种证明不生效。

例如：古希腊思想家亚里斯多德曾企图证明宇宙空间是有限的，他的理由是：假设宇宙是无限的，那么它就没有一定的中心，而地球具有一定的位置，且是宇宙的中心，所以宇宙是有限的。这里他引用了“地球是宇宙的中心”做为根据，但是这一理由是当时未经证明而且也是无法证明的理由，所以是以错证错，不能生效。

4. 论据的真确性是独立的，不能依赖被证的命题本身，否则叫做犯了循环论证的错误。

例如：79年高考中，证明直角三角形中的勾股定理。有很多考生引用余弦定理，将勾股定理作为余弦定理的特殊情形（有一角是90°）来推证，显然是犯了循环论证的错误。

5. 整个论据必须是支持命题的充足理由。在证明中有时引用的命题虽然是正确的，但结果并未能证明要证的命题，其原因就是理由不充足。

四、常用的三种思维方法

1. 类比法：所谓类比法是从特殊到特殊的思维方法。它是根据两种对象的某些相同属性作出它们的另一些属性也是相同的结论的一种思维形式。课本中算术与代数，平面几何与立体几何之间就有不少定理是用类比的方法引入的。

如：由分数的基本性质和运算法则类比推出分式的基本性质和运算法则。

这种思维法的弱点在于它所引出的结论有时可能并不真确。例如：若$a=b$则$ac=bc$类比推出若$a>b$则$ac>bc$并不真确。

2. 演绎法：它是由一般到特殊的一种思维方法。其思维过程是由一般判断（大前提）、特殊判断（小前提）和结论三部分组成的，因此它又称为三断论法。

例如：公式$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$对任意角$\alpha$、$\beta$都成立（大前提）

当$\alpha=30°$　$\beta=45°$（小前提）

则有

$$\sin75°=\sin(30°+45°)$$

$$=\sin30°\cos45°+\sin45°\cos30°\text{（结论）。}$$

3. 归纳法：它是由特殊到一般的思维方法。也就是根据某一事物的某些或一切特殊情况进行观察试验所得的共同属性作出一般结论的一种方法，它通常分为不完全归纳和完全归纳。

五、解题法概述

1. 分析与综合法：这种方法是演绎法中的有机组成部分，在数学中经常使用。

分析法是由命题的结论逆推到前提，即所谓“执果索因”或称“逆推理”，以探求解题的途径。

综合法则与分析法相反，其推理步骤是由命题的前提到结论，通过一系列的推理使问题得到解决。

对于数学题的证明，一般是采取先分析后综合的步骤，

对于比较复杂的问题来说，分析尤为重要。但在书写格式上，一般分析过程不写出来，只写出综合格式，而把分析法当作探索解题途径的手段。当然，若把分析过程写清楚，不写综合格式也是可以的。

例如：已知：$a>b>0$，试证：$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$

证明：（分析法）

假设$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$成立

由于 $a>b>0 \quad \therefore \sqrt{a}-\sqrt{b}>0$

$\therefore \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\sqrt{a-b})^2$

即得 $a-2\sqrt{ab}+b<a-b$

$\therefore \quad 0<2b<2\sqrt{ab}$

即 $b^2<ab$

此式由已知显然成立。又由于上述推理每步都是可逆的，故得证$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{ab}$。

（综合法）

$\because \quad a>b>0 \quad \therefore \sqrt{a}>\sqrt{b}>0$

$\therefore \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}>0$

$\therefore \quad 0<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$

两边同乘以（$\sqrt{a}-\sqrt{b}$）>0得：

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2$$

即 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<a-b$

两边开方得：

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$$

故命题得证。

2．归纳法：如前所述，归纳法是由特殊事例推引出一般结论的一种方法。它有完全归纳法和不完全归纳法两种。对于完全归纳法（即数学归纳法）此处不赘述。这里谈谈不完全

归纳法(或曰半个归纳法)。

不完全归纳法是根据一个或几个(但不是全部)特殊情况作出的推想，这种方法的单独使用是不够严格的、科学的。但它能帮助我们比较迅速地去发现事物的规律，提供研究的线索和方向，所以它仍有不可磨灭的价值。在几何课本中证明凸n边形的内角和等于$(n-2)180^\circ$就是使用了不完全归纳法。应注意以下几点:

(1) 有时为了探索命题的结论，常用不完全归纳法。例如：数学史上著名的Goldbach问题：由$4=2+2$　$6=3+3$　$8=3+5$　$10=5+5$　$12=5+7$　$14=7+7$……所以可能推出：凡大于三的偶数必为二素数的和。然而这个问题至今还没有完全解决。

(2) 由一件事物某些特殊的情况得到的属性不一定为另一些特殊情况所有，因而如上所述的不完全归纳法所推出的命题可能成立，也可能不成立。

例如：由于用规尺可以做正三角形、正方形、正五边形、正六边形，所以判断用规尺可以作出所有的正多边形，这显然是荒谬的。

3. 直接证明和间接证明：所谓直接证明就是利用论据直接地证明命题的结论的真确性的一种证明方法。在数学题的证明中，直接证明被广泛采用。例如叠合法(一般用于证明两个图形的全等)便是一种原始的直接证法。当然前面所述的分析法和综合法也都是直接证法。但有时直接证明感到困难甚至找不到直接证法时，又可采用间接证法。常用的间接证法有反证法(归谬法)、穷举法和同一法。

(1) 反证法：反证法是演绎思维法的特殊形式，它以排中律为基础，排中律如前所述，就是在同一关系下对于同

一对象所作出的两个矛盾的判断，其中必有一个且只有一个是正确的，非此即彼，二者必居其一，没有第三种可能。

利用反证法证明，实际上不是直接证明这个命题，而是通过揭露这个命题的相反的判断的错误来证明这个命题的。（此即是用证明题中命题的逆否命题正确，再由原命题与其逆否命题等价得出原题中的命题正确。）它的步骤如下：

① 作出待证命题的相反的判断；

② 从这个判断出发，用正确的推理方法进行推证，从而得出与待证命题的已知条件或公理、定义、定理以及已证的命题相矛盾的结果；

③ 指出矛盾的产生是由于所作的待证命题的相反的判断不正确，根据排中律即得待证命题的判断是正确的。

例如：若a、b、c都是奇数，求证：方程 $ax^2+bx+c=0$ 无整数解。

证明：假设方程有整数解K

① 若K为奇数，由于a、b都是奇数，$\therefore a\cdot K^2$，$b\cdot K$ 都是奇数，此时aK^2+bK为偶数。

② 若K为偶数，由于a、b都是奇数，那么$a\cdot K^2$，$b\cdot K$为偶数，此时aK^2+bK为偶数。

综合以上两种情况，总有 aK^2+bK 为偶数，但C为奇数，$\therefore aK^2+bK+c=0$ 不可能成立，这与假设条件矛盾，所以方程无整数解。

（2）穷举法：若待证命题的相反的判断不止一面，此时必须将其面面驳倒，才能衬出原来的判断成立。这种较繁的反证法，就是穷举法。

例如：已知$a>b>0$，求证：$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（n是大于1的整数）。

证明：假定$\sqrt[n]{a}$不大于$\sqrt[n]{b}$

则有　　$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$　　①

或　　$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$　　②

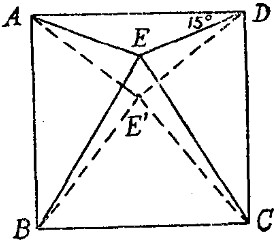
由①得　　$a=b$　此与已知矛盾

由②得　　$a<b$　此也与已知矛盾

所以　　$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$成立。

（3）同一法：如果一个命题的前提和结论都唯一存在，这个命题就与其逆命题等效，此道理称为同一原理。当一个命题不易直接证明时，只要它符合于同一原理，就可以转而证明它的逆命题，只要逆命题正确了，这个命题就正确了，这种证法称为同一法。

例：正方形$ABCD$以AD为底向内作等腰$\triangle AED$，使其底角为15°，连BE、CE。求证：$\triangle BCE$为等边三角形。（如图）



证明：以BC为一边作等边$\triangle BCE'$，连结$E'A$、$E'D$，

$\because BE'=CE'=BC=AB=DC$

$\therefore \triangle ABE'$和$\triangle CDE'$都是等腰三角形。

$\because \angle E'BA=30°$

$\therefore \angle BAE'=\dfrac{180°-30°}{2}=75°$，$\therefore \angle E'AD=15°$

同理可证$\angle E'DA=15°$，$\therefore E'$与E重合

$\because \triangle BE'C$为等边三角形，$\therefore \triangle BCE$是等边三角形。

注：思考是这样的：以AD为底边向正方形内作等腰三角形，使其底角为15°，这样的三角形是唯一存在的，即顶点E唯一确定，以BC为一边向内作正三角形也是唯一存在

的。因此先以 BC 为一边向内作正三角形，只要证明这个正三角形的第三个顶点E' 与 A、D连线都和AD成15°就可以了。这样待证命题符合同一原理，所以我们可以证明待证命题的逆命题。

第一章　数

在中学，所学的各种数可归纳为以下数系表：

- 复数 $(a+bi)$（a、b都是实数）
  - 实　数 $(a+0i)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（即自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数（正、负）——可化为有限小数或无限循环小数
    - 无理数（正、负）——无限不循环小数
  - 虚　数 $(a+bi, b\neq 0)$

一、实　数

（一）正整数（自然数）

1．自然数的表示方法：任意一个自然数都可以用10的幂的多项式的形式表示，即表示为 $a_0\cdot 10^n+a_1\cdot 10^{n-1}+a^2\cdot 10^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}\cdot 10+a_n$，其中$a_0$、$a_1$、$a_2$、……、$a_n$分别是0、1、2、……、9这十个数中的一个（但$a_0\neq 0$）。

2．质数与合数：只能被1和自身整除，但不是1的正整数，称为**质数**（或素数）；除了1和自身以外，还能被另外的正整数整除的正整数叫**合数**。