普通高等教育航天类规划教材

航天器计算结构力学

中国航天工业总公司人事劳动教育部组织编写

竺润祥　主编

普通高等教育航天类规划教材

航天器计算结构力学

中国航天工业总公司人事劳动教育部组织编写

主编　竺润祥

编者　姜晋庆　张　铎　牛建军

宇航出版社

内 容 简 介

本书系统阐述了航天器设计采用的线性和非线性有限元法，包括结构线性分析常用的单元和线性有限元方程解法；结构动力方程和固有特性，及动力响应解法；有限元法在结构稳定性分析中的应用；在弹塑性理论和有限变形基础上，建立的非线性有限元法，以及非线性接触问题有限元法等。本书内容紧密联系航天器结构工程设计，可直接应用于工程实践。

本书可作为高等院校航天器设计专业，及其它工程结构设计专业的教学用书，也可供有关设计工程技术人员参考。

普通高等教育航天类规划教材

航天器计算结构力学

中国航天工业总公司人事劳动教育部组织编写

主　　编　竺润祥

责任编辑　卫迁　曹英

*

宇航出版社出版发行

北京和平里滨河路1号(100013)

发行部地址：北京阜成路8号(100830)

各地新华书店经销

北京星月印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：18.875　字数：468千字

1996年2月第1版第1次印刷　印数：1-1000册

ISBN 7-80034-882-2/V·225　定价：10.60元

航天专业本科系列教材
编委会

出版说明

按照国家教委关于高等学校教材工作分工原则，中国航天工业总公司负责组织全国高等学校航天类专业教材的规划、编审和出版。根据航天教育发展规划，为适应航天事业发展的需要和满足航天院校本科教学的要求，在航天工业总公司教材编审委员会的主持下，成立了航天专业本科系列教材编辑委员会，负责组织编审、出版“八五”期间航天专业本科系列教材。这套书分成航天器、导弹、飞行力学发动机、控制与制导、空间电子学六类。适应的专业范围为：飞行器系统工程、飞行器总体设计、飞行器结构与强度、飞行器动力工程、飞行器制造工程、飞行器控制与制导、飞行器发射技术与装置、飞行器环境与模拟工程、飞行力学、宇航光电工程、空间工程和卫星与卫星应用等。

编委会为这套教材制订的出版原则是：

1. 教材应保证思想性、科学性、先进性和启发性，注意理论联系实际。内容的深度与广度应有利于培养学生的自学能力，创造能力及解决实际问题的能力。

2. 由于部、院、所技术专家长期从事航天科研工作，学校教师长期从事教学，他们各自都积累了丰富的经验。为使这套航天本科系列教材既有一定的理论水平，又能很好地联系实际，因此，要求教材的编审必须具有下列形式中的一种：

1)技术专家主编，学校教师参编；

2)学校教师主编，技术专家参编；

3)技术专家独立编写，主审者中有一名是学校教师，从教学要求把关；

4)学校教师独立编写，其编写大纲须由编委会聘请有关技术专家审阅。

无论以上哪一种编写方式、均由编委会聘请部、院、所有关技术专家主审。

3. 这套教材除作为航天航空高等院校本科教材外，也可作为相应专业研究生参考书和航天领域工程技术人员继续教育的教学参考书以及有关科技人员的参考书。

限于水平和经验，这套教材的编审出版工作肯定有不少缺点和不足之处，欢迎使用教材的单位、广大教师、同学和有关技术人员提出宝贵意见，以进一步提高航天类专业本科教材的质量。

中国航天工业总公司人事劳动教育部

1994 年 3 月

前　言

近几十年来，线性与非线性有限元法理论已日趋完善，在航空、航天、船舶、汽车、核反应堆和海洋工程等领域中得到广泛应用。有限元法已成为工程技术人员进行结构分析的有力工具之一。

当前有限元法的书籍与研究论文很多，它们从不同的侧面介绍了有限元法的理论与应用，都很有价值。但缺少一本由浅入深符合教学和科研工作实践需要，内容较完整，适合航天器结构设计专业使用的有限元法教材，本书正为此目的编写。本书还可供设计工作者参考。

本书以给大学生开设的“有限单元法”和给研究生开设的“动力有限元法”、“结构稳定性分析”和“弹塑性力学及其有限元法”为基础，增补了作者的近期研究成果编著而成。

全书共十一章，分为两大部分，前八章属于第一部分，介绍线性有限元法，主要供大学生作教材用；后三章属第二部分，介绍动力、结构稳定性和材料几何非线性分析的有限元法、主要供研究生学习使用。前者着重基本概念的阐述，后者侧重工程实践中的应用。学习第二部分时，读者除应具有第一部分基础知识外，还必须具备结构动力学、张量分析和弹塑性理论方面的知识。

本书第四、六和七章由张铎同志编著，第一、二、三、八和第十一章第五节由姜晋庆同志编著，第五章由牛建军同志编著，第九、十章，以及第十一章第一至四节由竺润祥同志编著。全书由航空航天部四院陈汝训研究员主审，他在百忙中认真进行了仔细推敲，提出了十分宝贵的意见，在此我们表示衷心感谢。责任编委王本华、蔡增寿同志在本书编著和审定过程中，提出了很多宝贵建议，对本书编著工作起了很大推动作用，我们也表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中缺点和错误在所难免，望读者批评指正。

编著者

1992 年 12 月

目　　录

第一章
概　　论

第一节　引　　言

一、结构分析方法

在结构设计领域里，涉及结构力学特性的分析工作占有十分重要的地位，在生产力发展和科学技术进步中，发挥了巨大作用。近年来，广大数学和力学工作者，特别是从事结构分析的工程师们提出了一系列实用的分析方法，满足了各工程领域结构分析的需要。

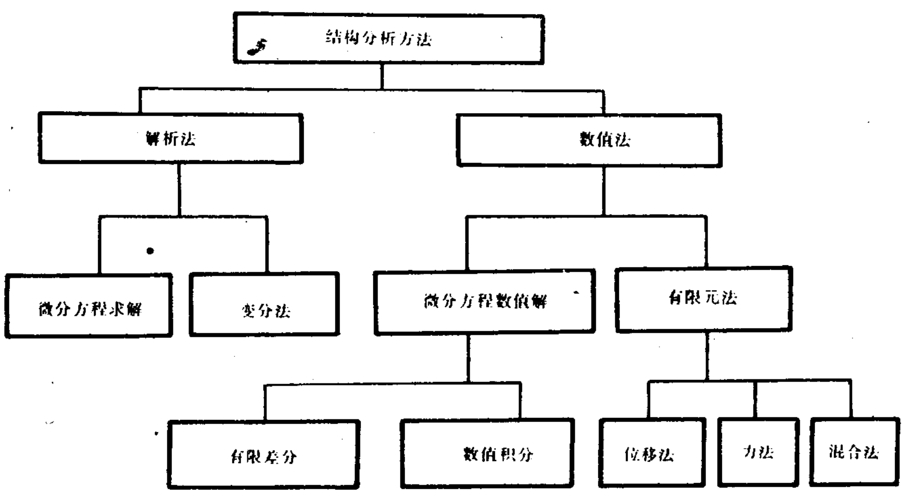


图 1-1　结构分析方法

结构分析的方法归纳起来可以分为两大类，即解析法和数值法（见 1-1）。经典解析法从研究连续体中，微元体受力平衡出发，推得描述弹性体性质的偏微分方程，再根据相应的力或位移边界条件，求得闭合形式的解析解。对于大多数工程实际问题，由于物体几何形状不规则，以及材料的非线性和不均匀性等原因，不仅在使用中受到很大限制，而且难以得到满意的解答。特别是涉及复杂结构和材料与几何非线性分析问题时，一般不能采用解析方法求解。

长期工程实践表明，对复杂结构分析采用数值法求解行之有效。工程中采用的数值法有两类，即微分方程的数值解法和近几十年迅速发展起来的有限元法。前者建立在微分方程数学近

似的基础上，对于一个特定的结构，可以用有限差分法，或者直接用数值积分方法求解弹性力学微分方程。这种解法发展得较早，可以进行某些几何形状不规则结构的分析工作，但受到当时计算条件的限制没有推广应用。

第二种方法是本世纪50至60年代发展起来的有限元法。可以说，它是各种经典数值解法的综合的产物。它集合了雷莱(Reyleigh)-里兹(Ritz)法，迦辽金(Галеркин)法和最小二乘法等优点，加上应用不断发展的计算机和计算技术，已经成功地应用于结构分析各个领域中。

二、航空航天结构的分析

本世纪发展起来的航空航天事业，对结构分析提出了更严格、更细微和更全面的要求，因而促进和推动了结构分析的发展。

(一)航空航天器的结构特点

航空航天器结构具有下列特点：

1) 重量轻：航天器要求把有效负载送入指定轨道，结构重量轻可以减少燃料消耗量，提高有效负载比重。因此航天器结构在构型和选材等方面都必须精心考虑。

2) 受载大：由于航天器飞行速度和加速度都很高，因而气动载荷、发动机推力及过载都很大。在结构分析中必须考虑这一特点。

3) 工作条件恶劣：航天器结构在整个工作过程中，遇到气动加热、发动机传热和高温蠕变等，由于气动力、质量力和弹性恢复力等联合作用下产生发散、操纵反效和颤振等气动弹性问题，或者受到各种冲击力或振源的影响产生冲击、振动等动载荷问题。

4) 可靠性要求高：众所周知，任何零部件的失效或破损都将导致后果极其严重的事故，所以必须对航天器提出极高的可靠性要求。

(二)结构分析的任务

从本质上讲，结构分析的基本任务是决定结构在静力和动力作用下，受确定载荷、温度和约束条件作用下的应力和位移分布。然而，由于航空航天飞行器的特点，为保证整体性和效率，已将结构分析的领域作了很大的扩展和延伸，归纳起来有以下几方面：

1) 强度分析。计算应力分布、最大应力和强度储备。

2) 刚度分析。计算位移分布及零部件的刚度特性。

3) 结构稳定性分析和后屈曲分析。

4) 结构振动分析。计算振动模态和固有频率。

5) 结构弹塑性分析。

6) 热弹性和热弹塑性分析。

7) 材料的蠕变问题。

8) 气动弹性问题，抖振、发散和临界颤振速度。

9) 动力响应问题。

10) 接触问题和应力集中现象。

11) 疲劳裂纹的形成和发展，断裂问题和确定寿命。

12) 结构设计的优化。

13) 结构可靠性分析。

上述诸领域中，绝大多数都属于非线性问题，包括材料非线性、几何非线性，以及接触边界的非线性等，用传统的经典力学及其解法不可能得到解答，只有在高速电子计算机和相应的各类程序语言迅猛发展的今天，再配以线性和非线性有限元算法，上述各类问题都可得到完善解决。所以说，有限元法奠定了航空航天结构分析的基础，并提供了唯一有效可行的手段。

三、有限元法的发展和现状

有限元法的发展可从数学和力学方面叙述。数学方面，可追溯到1909年，里兹发表了有关数学物理方程变分原理的论文，将椭圆型数学物理方程连同边界条件(即边值问题)，等价于一个能量积分的极值问题，然后用带有未知量的试探函数，使能量积分取极值，即将微分方程化作代数方程组求出近似解。试探函数实际上是能满足边界条件的一个假定位移场，它和有限元法中采用的插值函数是相通的，只不过它要求在全部积分域上连续和满足全部边界条件，所以在实际结构分析中很难得到满足。1943年库兰特(R. Courant)等人又进一步发挥了这一思想，他们在求扭转问题时，将整个剖面划分成若干小的三角形区域，然后在这些小区上假定位移场，克服了位移场不能满足整个边界条件的困难。这就是有 限元的初期思想，可惜由于当时计算技术上的困难，未能得到充分发展。

真正促使有限元法产生和发展的，是从事力学工作的工程师，特别是从事航空结构分析的工程师。主要的奠基人：阿吉里斯(J. H. Argyris)，于1954～1955年在航空工程杂志上发表了一系列论文，采用了矩阵方法，按能量原理推导出平面应力板的单元刚度矩阵。特纳(M. J. Turner)、克劳夫(R. W. Clough)，于1956年在纽约航空学会年会上发表论文，开始用三角形和矩形单元计算机翼盒段结构的刚度和位移。他们都对有限元法的形成作了开创性工作。作为“有限元法”这样一个名称，则是克劳夫1960年发表于ASEA的一篇论文中首先提出，很快为世人公认。从此，有限元法成为连续体离散化的一种标准解法，被广泛深入研究，并得到迅猛的发展。

电子计算技术对有限元法的发展也起决定性影响。有限元法都须求解规模巨大的线性代数方程组，阶数高达数百万，没有高速、大容量电子计算机进行运算是很难解决。因此，有限元法又称为“电子计算机化”分析方法。虽然有限元法的基本思想在40年代已提出，直到50年代中期，电子计算机发展后，才提供了可靠的计算工具，开始有限元法的大发展时期。

有限元法发展初期，都是从工程直观出发进行探索，缺乏足够的数学理论基础。后来数学工作者注意到这个研究方向，并进行了大量的工作，在剖分、插值理论，以及方法的收敛性等方面为有限元法奠定了坚实的理论基础。

经过力学和数学工作者的努力，有限元法已经日趋完备，建立起能充分满足不同结构分析需要的几十种单元刚度矩阵，完善了多种节省内存、节省机时的高效解法、妥善解决了各类非线性分析的迭代方法和结构重分析技术，从而使有限元法的应用领域向更深更广的方向扩展。当前各国都先后建立或引进大型程序分析系统，如美国的NASTRAN、ADINA，德国的ASKA，我国的HAJIF Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ等，为结构分析工作提供了方便、可靠、高效的工具。

第二节　有限元法的基本概念

一、有限元的理论基础

近代的有限元法是从事结构设计的工程师创建。他们从朴素的直觉出发，将一个连续的结构物简化为由若干离散的单元组合在一起，成为等效的组合体。然后分析离散化的等效组合体。这样的处理方法起码有二个好处：第一，所采用的单元都是一般工程技术人员十分熟悉的标准构件，如杆、梁、平面应力板、受剪板等，力学性质简单明了，只要用有限的参数（如轴力、弯矩、位移、转角等）即可描述。第二，分析离散体系时，建立的是代数方程组，虽然大型结构的阶数有时很高，但随着高速电子计算机的发展和计算技巧的完善，一般是可解的。它克服了连续体弹性微分方程中，复杂边界的不可解性。用有限元求解的过程，可用一个简单的比喻，各类单元好比建筑师手中的砖、瓦、梁、柱，各自都有某些局限的、固定不变的属性，在建筑师手中通过不同的组合，可以构造出千变万化、性能各异的建筑物。有限元创建初期，虽理论尚不完善，但确实解决了飞机设计、土木建筑等一大批实际工程问题，表现出强大的生命力，因而引起数学界的重视。

在数学工作者参与下，很快给有限元法奠定了坚实的理论基础。实际上，有限元法就是雷莱-里茨-迦辽金法的新形式。解经典力学边界值问题的弹性微分方程，按雷莱等人的变分原理，就是要找出一个使给定势能成极小值的位移函数 u。一般说，找不到精确的函数 u，则用一系列试探函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 的线性组合逼近 u。理论上总存在一组完备的试探函数，当 $n \to \infty$ 时，使之收敛于 u。当然存在是一回事，能否解出是另一回事，解出这一点却被有限元法作到。它就是用分段的线性函数去逼近 u。数学家还发现，有限元法建立的单元刚度特性函数，就是在离散后的每个小片上，分片选取试探函数。然后，通过插值理论，使分片的试探函数在全结构中向函数 u 逼近。提高有限元法的计算精度，除能增加离散化程度（即分割变细、单元变小）外，还能提高每片试探函数的阶段，从而创造出更多、更加有效的高精度单元。

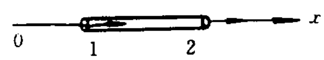
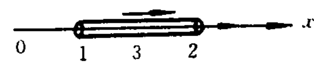
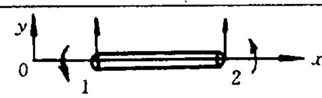
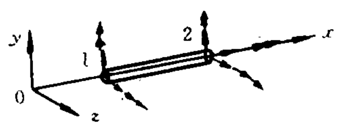
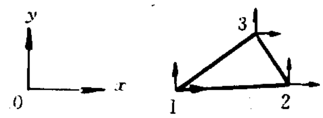
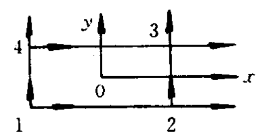
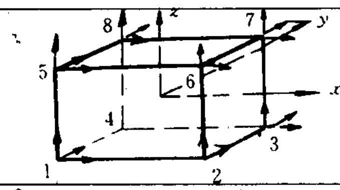
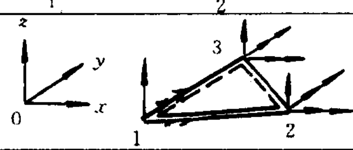
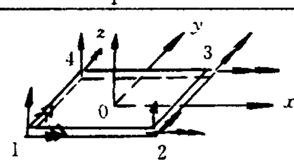
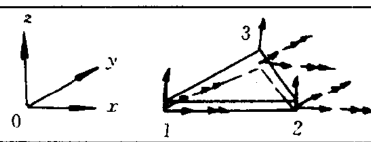
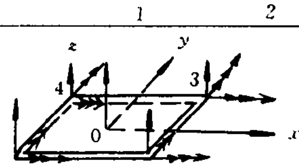
二、有限元法的内容

有限元法的基本工作包括两大部分。第一部分是单元分析，即探讨单元的力学特性。它包括选取单元的试探函数、推导表征单元刚度或柔度特性的单元刚度，或者柔度矩阵。试探函数可以是描述一个处处连续的位移场（称为“协调模型”），也可以是描述处处平衡的应力场（称为“平衡模型”），或二者同时选取（称作“混合模型”），或者在单元内部选取位移场（或应力场），而在边界上选取应力场（或位移场），这时都称作“杂交模型”。第二部分是结构分析，将众多的单元集合成整个的全结构计算模型，从而列出最终代表全结构平衡（或协调）的矩阵方程。在方程中未知数可以是位移（称作“位移法”），应力（称作“力法”），或二者兼有（称作“混合法”）。由于在实际工程应用中，协调模型的位移法研究得深入，应用更为广泛，占据了绝对优势，所以本教材将主要介绍这种类型的有限元法。

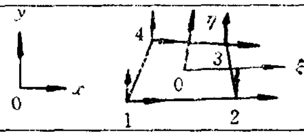
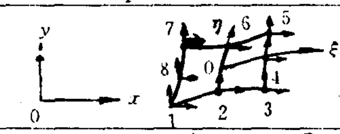
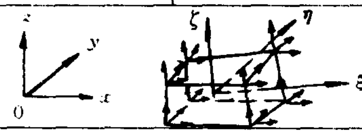
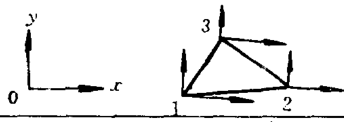
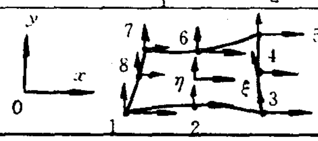
采用有限元法进行结构分析的主要过程为：

1）　通过剖分，将连续体结构离散，化成由有限数目单元组装成的计算模型。

表 1-1 常用单元类型表

单元类别	单元名称	图形及局部坐标系	单元节点数	节点位移自由度数	单元位移自由度总数
一维单元	等轴力杆元		2	1	2
	变轴力杆元		3	1	3
	平面梁元		2	2	4
	空间梁柱单元		2	6	12
二维单元	平面三角元		3	2	6
	平面矩形元		4	2	8
三维单元	砖块元		8	3	24
板弯元	三角形板元		3	3	9
	矩形板元		4	3	12
壳元	三角形壳元		3	5	15
	矩形壳元		4	5	20

续表 1-1

单元类别	单元名称	图形及局部坐标系	单元节点数	节点位移自由度数	单元位移自由度总数
等参元	平面任意四边形单元		4	2	8
	平面曲边四边形单元		8	2	16
	空间任意六面体元		8	3	24
轴对称元	三角形环元		3	2	6
	八节点等参元		8	2	16

2） 按所选用单元的类型进行单元分析，建立起描述单元刚度特性的单元刚度矩阵。

3） 组装各个单元刚阵，形成代表全结构刚度特性的总体刚度矩阵和建立以节点位移为未知量的全结构平衡方程。

4） 求解方程，得到节点位移。

5） 由节点位移再通过每个单元的刚度特性求出各单元的应力。

三、常用单元的种类

表 1-1 列出航空航天结构分析中经常用到的一些单元的类型，以及主要参数等，这些单元也是本教材将要详细介绍的主要内容。

参 考 文 献

[1] 普齐米尼斯基 J S. 矩阵结构分析理论. 王德荣等译. 北京：国防工业出版社，1975.

[2] 冯康等编. 有限元方法及其应用. 北京：中科院计算技术研究所，1975.

[3] “固体力学中的有限元素法译文集”编译组. 固体力学中的有限元素法. 北京：科学出版社，1975.

[4] 李大潜等编. 有限元素法选讲. 北京：科学出版社，1976.

[5] 李大潜等编. 有限元素法续讲. 北京：科学出版社，1979.

[6] 斯特朗 G 和费克斯 G. J. 著. 有限元法分析. 崔俊芝等译. 北京：科学出版社，1983.

[7] 监凯维奇 O. C. 有限元法. 尹泽勇等译. 北京：科学出版社，1985.

[8] 张学峰，张民孚，周辰福. HAJIF 有限元结构分析系统简介. 西安：飞机强度研究所，1983.

[9] 诸德超，王寿梅. 结构分析中的有限元素法. 北京：国防工业出版社. 1981

第二章
桁架结构有限元法

桁架结构是若干杆件两端，通过铰链互相连接成的承力结构。由于结构的单元(每根杆)和节点(每个铰接点)都已自然形成，一目了然，不需专门选取节点和划分单元，同时，杆单元的力学特性最简单、明了，如图 2-1 所示的等截面杆。只有沿杆轴方向的内力 N，及由 N 引起的常值应力 σ

$$\sigma = N/A \tag{2-1}$$

式中 A 为杆的截面积。所以，首先通过桁架结构(特别是其中最简单的平面桁架结构)介绍有限元法的基本原理和方法，再逐步推广到连续体和其它复杂结构的有限元解法。

图 2-1 等截面杆

第一节 桁架结构的二种解法

结构力学中，解桁架结构有两种基本方法，即力法和位移法。

一、力 法

力法是以内力(或多余内力)为未知量进行求解。首先需要判定结构的静不定性质。如图 2-2(a)所示，由二根杆组成，有一个自由节点，它是静定结构。图 2-2(b)由三根杆组成，也只有一个自由节点。它是一次静不定结构。

(一)静定结构

按节点法(或截面法)即可求出全部内力。

如图 2-2(a)所示静定结构。若两根杆的材料相同，其弹性模量为 E，各杆的截面积为 A_1，A_2，受外载 P_x、P_y 作用。

按节点 1 的力平衡(见图 2-3)，即可列出沿 x、y 方向杆内力 N_1，N_2 与外载的平衡关系式为：

$$\begin{cases} -N_1\cos\theta + N_2\cos\theta + P_x = 0 \\ -N_1\sin\theta - N_2\sin\theta + P_y = 0 \end{cases} \tag{a}$$

未知内力数为 2，由二个平衡方程可直接解出未知内力

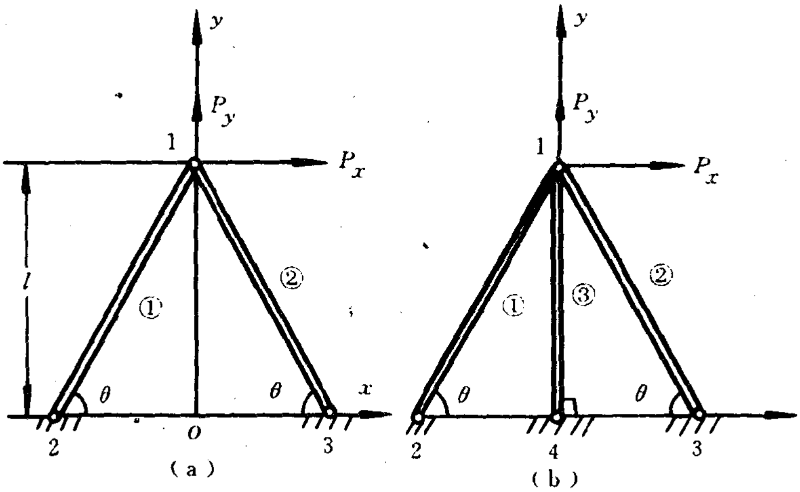


图 2-2 桁架结构

(a) 静定结构； (b) 静不定结构。

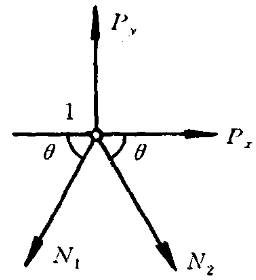


图 2－3 节点平衡图

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta} \\[2ex] N_2 = \dfrac{-P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta} \end{cases} \tag{b}$$

于是各杆应力按(2-1)式即可求出

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = \dfrac{P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{2A_1\sin\theta\cos\theta} \\[2ex] \sigma_2 = \dfrac{N_2}{A_2} = \dfrac{-P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{2A_2\sin\theta\cos\theta} \end{cases} \tag{c}$$

按虚功原理，在节点 1 处分别沿 x、y 方向施加单位载荷，便可求出节点 1 沿 x、y 方向的位移 u_1、v_1 分别为

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{l}{4E\sin^2\theta\cos^2\theta}\left(\dfrac{P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{A_1} - \dfrac{-P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{A_2}\right) \\[2ex] v_1 = \dfrac{l}{4E\sin^3\theta\cos\theta}\left(\dfrac{P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{A_1} + \dfrac{-P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{A_2}\right) \end{cases} \tag{d}$$

（二）静不定结构

若判定为静不定结构，则未知内力的个数将多于按节点法建立的平衡方程个数。如图 2-2(b) 所示（仍假设三根杆的材料相同，弹性模量为 E，各杆的截面积分别为 A_1、A_2、A_3），这里只有一个自由节点可建立两个平衡方程，而未知内力却有三个(N_1、N_2、N_3)，不能直接解出。按力法解静不定问题的步骤应为：

1） 在判定静不定度之后，选取基本系统，解除多余约束，建立位移协调方程组。

2） 解协调方程求未知内力。

3） 将求出之未知内力作为已知量，求解基本系统中各杆的内力及应力。

4） 按单位载荷法求位移。

在本例中可取①、②杆为基本系统Ⅰ，③杆为基本系统Ⅱ。如图(2-4)，即可建立 节点 1 沿

N_3 方向的位移协调方程(由于本例只是 1 次静不定结构，只有一个多余内力 N_3，则只建立一个位移协调方程)。

$$\delta N_3 = \Delta_p \tag{e}$$

其中 δ 为沿 N_3 方向施加单位载荷时基本系统产生的位移，Δ_p 为在外载荷作用下沿 N_3 方向产生的位移。由于基本系统是静定结构，上述位移 δ、Δ_p 均可求出，则由(e)式可解出未知内力 N_3。

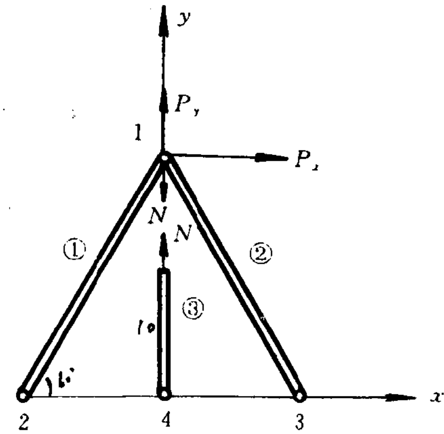


图 2-4 基本系统

$$\delta = \frac{l}{E}\left(\frac{1}{A_3} + \frac{1}{2A_1\sin^2\theta} + \frac{1}{2A_2\sin^2\theta}\right)$$

$$\Delta_p = \frac{l}{4E\sin^3\theta\cos\theta}\left(\frac{P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{A_1} + \frac{-P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{A_2}\right)$$

$$N_3 = \frac{\Delta_p}{\delta} = \frac{l}{4\sin^3\theta\cos\theta}\,\frac{\left(\frac{P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{A_1} + \frac{-P_x\sin\theta + P_y\cos\theta}{A_2}\right)}{\left(\frac{1}{A_3} + \frac{1}{2A_1\sin^2\theta} + \frac{1}{2A_2\sin^2\theta}\right)}$$

N_3 求出后，以它作为基本系统 I 的外力，由于基本系统都是静定结构，按(b)式即可求出未知内力 N_1、N_2。再进一步利用(c)，(d)式可求出应力及位移。

若在本例中，$A_1 = A_2 = A_3 = 1\text{mm}^2, E = 100\text{N/mm}^2, \theta = 60°, l = 10\text{mm}, P_x = 1\text{N}, P_y = 1\text{N}$，则可求出

$$N_3 = \frac{P_y}{2x\sin 60°\cos^2 60°} = 0.433\text{N}$$

以 $P_y - N_3 = 1 - 0.433 = 0.567$ 作为 Y 方向的外载代入(d)，式可求得

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{\sin 60° + 0.567\cos 60°}{2\sin 60°\cos 60°} = 1.327\text{N} \\ N_2 = \dfrac{-\sin 60° + 0.567\cos 60°}{2\sin 60°\cos 60°} = -0.673\text{N} \end{cases}$$

按(c)式求应力

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = 1.327\ \text{N/mm}^2 \\ \sigma_2 = \dfrac{N_2}{A_2} = -0.673\ \text{N/mm}^2 \\ \sigma_3 = \dfrac{N_3}{A_3} = 0.433\ \text{N/mm}^2 \end{cases}$$

按(d)式求位移

$$u_1 = \frac{10}{4 \times 100 \times \sin^2 60° \times \cos^2 60°}(2 \times \sin 60°) = 0.231\ \text{mm}$$

$$v_1 = \frac{10}{4 \times 100 \times \sin^3 60° \times \cos 60°}(2 \times 0.567 \times \cos 60°) = 0.0435\ \text{mm}$$