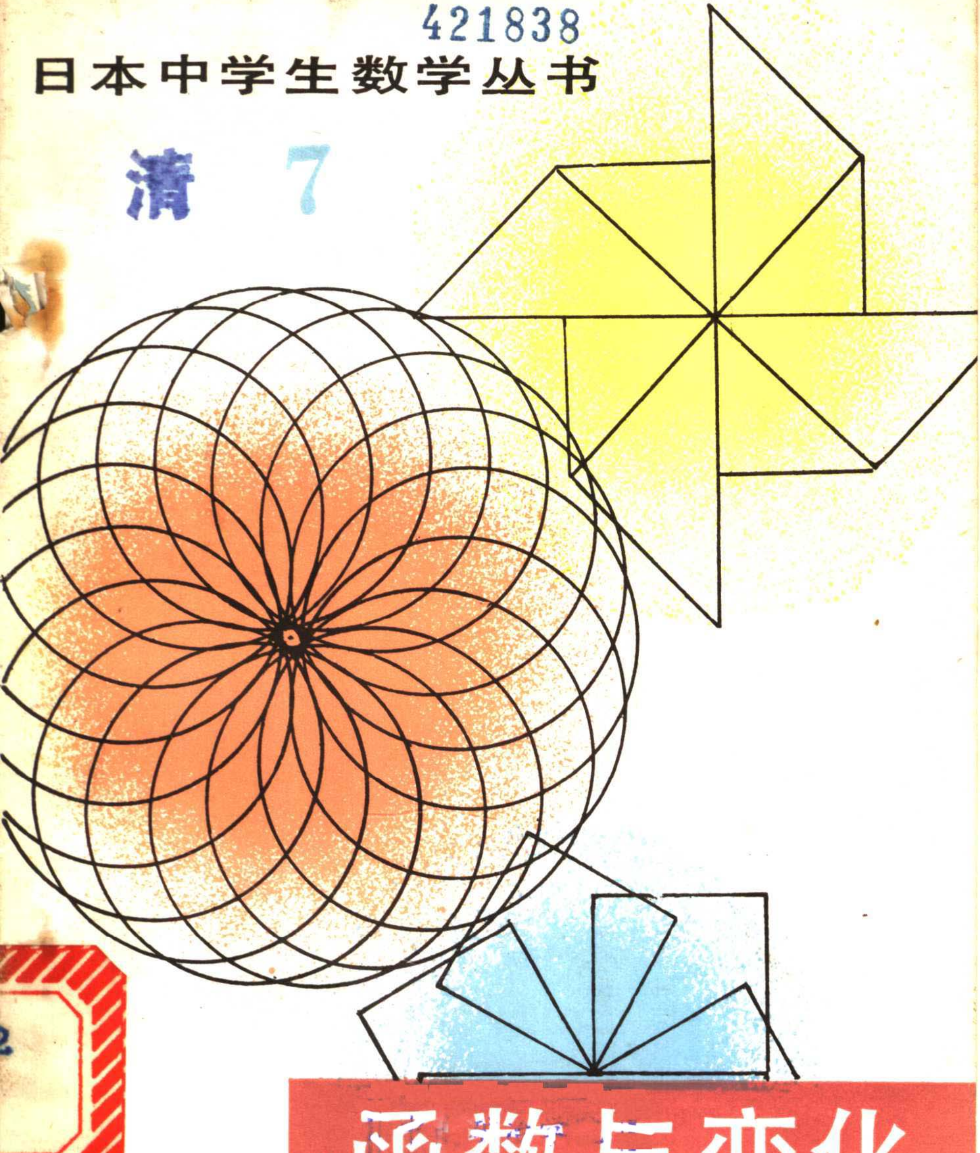
日本中学生数学丛书



函数与变化

日本中学生数学丛书

函数与变化

日本中学生数学丛书（7）

函数与变化

[日]　菊池乙夫　著

李开成 译　马忠林 校

吉林人民出版社

内 容 提 要

《函数与变化》是日本山梨大学教授横地　清主编的日本中学生数学丛书第7卷，本书共分七章，内容包括：函数的构成、函数的变化、一次函数、二次函数、三次函数、有理函数与无理函数、函数的发展等。

微积分研究的主要对象是函数。本书作者按微积分的需要，从实际问题入手、深入浅出的阐述了函数的概念、性质和应用。这本书是广大中学数学教师在教学、备课、辅导中最适用的参考书，也是广大中学生及数学爱好者丰富自己的数学知识不可多得的课外读物。

日本中学生数学丛书（7）

函 数 与 变 化

〔日〕菊池乙夫　著

李开成　译　马忠林　校

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　4½印张　76,000字

1981年5月第1版　1981年5月第1次印刷

印数：1—13,430册

书号：13091·33　定价：0.60元

出版说明

为了解国外教学情况，我们组织翻译出版由日本山梨大学教授横地　清主编的一套中学生数学丛书共十二卷，它是日本中学生的数学课外读物。这套丛书是以近代数学的观点和方法，系统地阐述初等数学中的一些重要专题，对我国广大中学生和中学数学教师在理论上和思考分析问题的方法上均有参考价值。

共有十二名同志参加丛书翻译工作，由吉林师大数学系马忠林同志审校，从一九八〇年起陆续出版发行。

吉林人民出版社　一九八〇年元月

编者的话

数学是与自然和社会现象一起发生和发展的。

例如，可以说物质的运动和变化，是产生函数的根源。情报的语言被使用，电子计算机已成为生活必须的东西了。在这方面，概率和新的代数在发挥作用。这套丛书也与自然和社会共同前进，希望读者能以学到活生生的数学。

另一方面，数学有它自己的体系。无论是数、方程式或几何，并不单纯是知识的罗列，而是一个具有逻辑性的体系。这套丛书将阐明这个体系，希望把它变成所有中学生自己的知识。

这套丛书，可以说不是用脑和手，而是用脚写成的。实际上，作者们每周每月都聚会在一起，与正在教课的教师们共同组成研究会，他们都是数学教育实践研究会的成员。共同讨论：学生应在什么地方下工夫？怎样组织使所有学生都能接受的教学内容等问题。讨论并在实践中把这些问题明确起来。可以说，它的成果就是这套丛书。从这个意义上来说，我想各位教师也起了重要作用。

横地　清

目　　录

第一章　函数的构成

§1. 变量和实数

（1）　各种量的集合

我们往往为了研究自然界或社会中各种现象，需要对某一事物进行观察和调查。如果我们仅根据现象的最终结果和事物全体表面现象，还不能掌握它的特征，因此，还必须对现象的发展过程和事物的组成情况进行分析。

例如，有某人阅读一本140页的书。如果仅根据“他已经读完一本140页的书”这一结果，我们并不知道他是怎样进行的，只有当我们知道他第一天读了8页，第二天读到了第17页，第三天读到了第24页……，最后一天读完了140页，这样进行了解以后，才知道他阅读此书的情况。

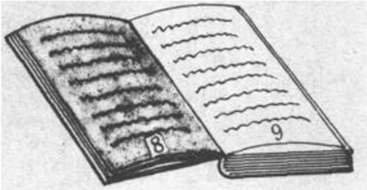


图1

又如，今有一容器，如果我们仅知道它是“容积为5dl的圆锥形”，我们还不了解此容器的特征。因为我们不会总是往容器里注满5dl液体的，所以需要进行观察，液面升到这里是0.2dl，升到这里是0.8dl，……，做这样的观察对了解容器的特征是必需的。

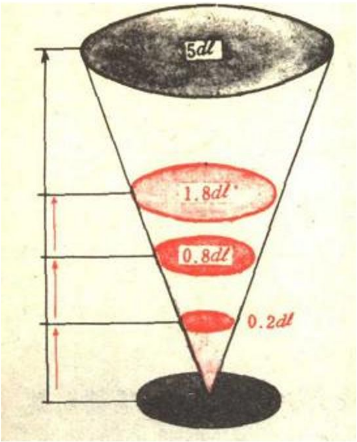


图2

这样，当人们对某一事物的变化过程进行观察时，就出现量的集合。

就读书的过程来说，由1，2，3，…一直到140页，出现了由1到140的自然数的集合。

再就往容器里注入液体的过程来说，因为可往容器里注入由0dl到5dl的任意体积，此时产生了由0到5之间的一切数的集合，当然它是包括这个范围内所有的小数与分数。

象这样，由在一个事物中所出现的性质相同的量，作出具有各种大小同的集合时，其元素的全体叫做**变量**。与此相反，譬如“此书共140页”，“此容器的容积为5dl”，这里的140与5是表示特定事物之整体大小的数量，它们是不变的。这类量称之为**常量**。

对变量来说，将根据该集合的组成方式加以区分。

就读书的例子来说，从开始读到读完这一页之前不能算做读了一页。这是因为从某页到下页之间无页数可言。象这样具有一定间隔的变量叫做离散变量。

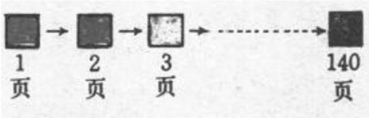


图3

但就容器的例子来说，譬如从 0*dl* 开始往里注入 1*dl* 水，我们可以毫不间断地连续注入。随着液面连续不断地升高，则确定一个由 0 到 5 之间，既无空隙又无间断的密集着的变量。象这样的变量叫做连续变量。

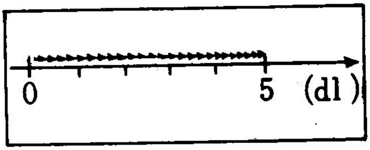


图4

无论变量是离散的还是连续的，通常不可能把它的元素全部列举出来，因此往往用一个文字来表示它。

就读书的例子来说，由 1 到 140 的自然数可用字母 n 来表示。若用集合符号来表示，n 的含意如图 5 所示。

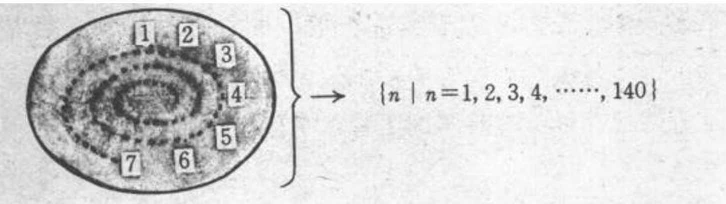


图 5

就容器的例子来说，不妨用字母 x 来表示 0 到 5 之间所有的数。若用集合符号来表示，x 的含意如图 6 所示。

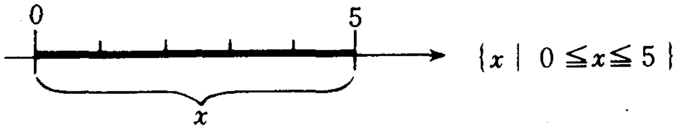


图 6

今后将 n 或 x 这些代表某一变量的字母叫做**变数**。当然，变数可以使用任何字母，但习惯上多采用位于英文字母表上后半部的字母。

变数的取值范围叫做**变域**。上面 n 的变域是不超过140的自然数，而 x 的变域则是在 0 与 5 之间的一切数。

（2） 变量与实数

上面我们谈到离散变量与连续变量。下面来研究与这些变量相关的数。

如书的页数，每一页总可以有其下一页，但在这相邻的两页之间不存在页数。表示这种情形的是**自然数**。这就是说，每一个自然数都有它的后继数，但在此二数之间不再存在其它的自然数，并且其间隔总是 1 这种性质就是离散一词的含意。

从某一自然数起，逐一地逆数其前一个自然数，亦即逐

次减 1 时，将顺次得到 0 和负整数，这样产生的所有数的全体就是整数。整数仍然具有离散性。

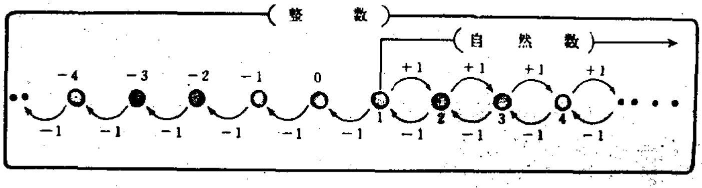


图 7

在连续量中，除长度外，还有重量、面积、体积、时间、角度、密度、速率……等等，其共同之处是每一种量都能用所规定的单位来测量。

最适宜于表现连续量之特征的是长度，用线段长度来表示连续量对研究问题十分方便

测定连续量的大小时，常常会出现不足一个单位的零头，零头部分不能用整数表示，因此需要引进分数或小数。

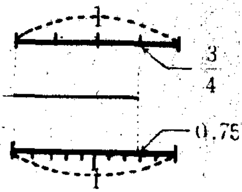


图 8

将分数化为小数时，能整除则为有限小数，不能整除便是循环小数，而且只有这两种可能。反之，任何一个有限小数或循环小数都能化为分数。由此可见，分数和有限小数、循环小数均属于同一类数。因此包括整数在内能用分数表示的数的全体叫做有理数。

$$
\begin{aligned}
a &= 0.7272\cdots\cdots \text{ 时} \\
100a &= 72.7272\cdots\cdots \\
-)\quad a &= 0.7272\cdots\cdots \\
\hline
99a &= 72 \rightarrow a = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}
\end{aligned}
$$

图 9

有理数的特征是任何二数之间必存在另外的数。如果在$\frac{1}{2}$的附近来分析，不难想象，不论多么接近$\frac{1}{2}$的数都存在，这意味着数是密集着的。这种性质叫做有理数的**稠密性**。

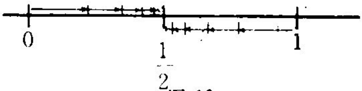


图 10

那么，只要有了有理数，是不是任何连续量都能够用有理数来表达呢？对此请看下面的例子。

在图11中，有一个面积是 5 个单位的正方形。我们去求它的边长 a，得出小数

$a=2.2361\cdots\cdots$。

由于一个非整数的分数其平方不能是整数，因此 a 不会是分数，而是一个非循

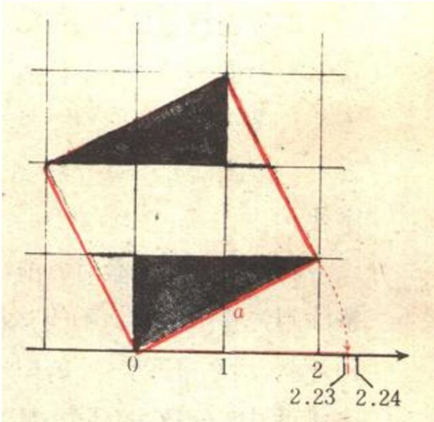


图 11

环的无限小数。可见在数轴上存在着这种不是有理数的数，我们将这样的数叫做**无理数**。这样一来，数轴就被有理数和无理数所填满，这两种数合起来叫做**实数**。

由于有了有理数和无理数，数就无间断地连结起来。对此，我们在下面作详细的研究。

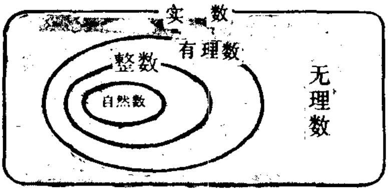


图 12

在数轴上任意取定一个数 a，那么哪些数小于 a、哪些数大于 a 亦随之确定。今用 x 表示一切小于 a 的数，用 y 表示一切大于 a 的数。

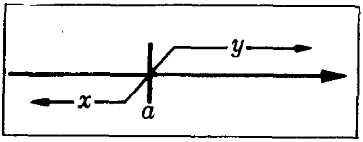


图 13

这样，以 a 为界将全体实数分成两组，并将 a 加入 x 或 y 的一方。如果将 a 算到 x 的一方，则有

$$x \leq a, \quad y > a。$$

这样一来，a 是 x 中的最大数。由于实数没有间断，因而 y 中有任意靠近 a 的数，但不存在一个最小的数。

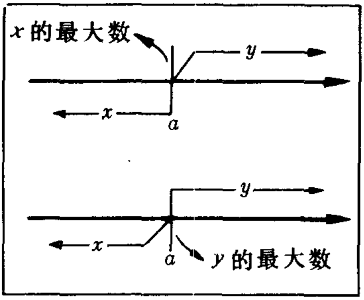


图 14

如果将 a 算到 y 的一方，则有

$$x < a, \qquad y \geq a。$$

这时 a 成为 y 中的最小数，而 x 中不存在最大的数。

上述两种情形都表示在 a 处实数是不间断的，这就是实数的连续性。

§2. 函数的构成

（1） 两种变量

现实的物体的位置或大小发生变化时，仅一种变量孤立存在的情形几乎是没有的，一般总是存在着两种相互联系着的变量。

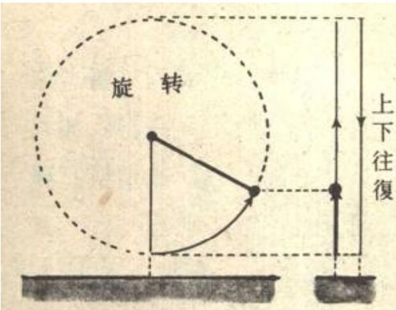


图 15

我们来分析一下娱乐场里游览车的运动情况。

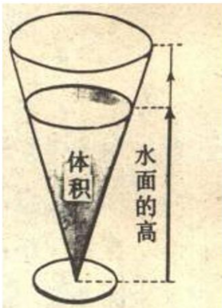


图 16

座凳由一根支柱支撑着，它做旋转运动的同时又做升降的往复运动。可知在这里有两种变量——转动角度和离地高度——相互联系在一起。

我们再观察一下往容器里倒水的例子。伴随着水量(体积)逐渐增加，液面的高度就