1960年高中毕业班

数学复习提纲

SHUXUE FUXI TIGANG

湖南省教育厅编

目　　录

第一部分　代　　数

第二部分　平面几何

第三部分　立体几何

第四部分 三 角

第五部分 綜合性問題

第一部分　代　　数

說　　明

1.这一部分复习的目的，在使学生通过复习后对中学代数知識，有較系統的全面的了解，对所学的基本概念及公式更加巩固，使学生在透彻理解的基础上，提高綜合运算能力及解决实际問題的能力，使技能变为熟練技巧，能够灵活运用。

2.大綱中不可能把代数中所有的概念都重写出来，尤其是定理或公式的証明，所以复习时一定要結合教材进行，重要的地方仍須仔細閱讀教材．

3.中学代数的内容構当广泛，应特别注意下面一些要求来复习：

①关于"数的概念的发展"，应着重理解无理数及虛数产生的必要性和它的性质．

②关于"恒等变形"应着重在根式的运算．

③"方程"一編，內容很多，中学应着重在一元二次方程及其应用，无理方程、方程組都是在一元二次方程的基础上来进行的。不等式应彻底搞清它的基本性质，才不会与解方程混淆．

④关于"函数"应着重在二次三項式的研究及其图象，很好地建立函数变迁的概念．

⑤"数列"应着重"等差数列"及"等比数列"的通项公式及前n项和的公式.

⑥"对数計算"应着重查表技能的培养，这里就要求多閱讀教材，并結合在各种計算題中熟練.

⑦关于理論联系实际有关代数知識的問題，尽力根据学科的系統插入了，学习时应該予以重視，使知識能灵活运用.

⑧关于"綜合运算"的技能的培养，本提綱搜集了一些例題与习題，使学生对前后知識能联系起来，培养独立思考与分析問題的能力.

⑨每一篇的后面，編写有較充足的习題，复习时間有限，不一定要求全部去作，可根据各人的具体情况加以选擇.

第一編 数的概念的发展

复习目的要求

(一)关于"数的概念的发展"应重点理解无理数、虛数产生的必然性、各个数集的性质及其相互的关系.

(二)注意算术根的概念与虛数单位i的性质.

(三)从一个数集扩大到另一个数集的时候，应該掌握运算法則对新数集的适应关系，例如$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，在实数集里是成立的，但在复数集里就不一定能够成立.

重点內容

(一)复数系

正整数 ⟶ 零 ⟶ 負整数

整数 ⟶ 分数 {有限小数, 无限循环小数} …………… 小数

有理数 ⟶ 无理数(无限不循环小数)无限小数 } 小数

实数 ⟶ 虚数(包括純虚数)

复数

(二)数的概念扩張

数的集合	数的概念扩張	数的概念的概念化	可以实施的运算
自然数	0→負整数	整数	加減乘
整数	分数	有理数	加減乘除（除数≠0）
有理数	无理数	实数	加減乘除(除数≠0)乘方开方,(但負数不能开偶次方)
实数	虚数	复数	加減乘除（除数≠0）乘方开方

(三)实数

1. 无理数：无限不循环小数叫做无理数.

2. 精确度(誤差范圍)：設无理数 α 的不足近似値为 α_n 其过剩近似値为 α'_n，精确到 $\frac{1}{10^n}$ 則 $\alpha'_n-\alpha_n=\frac{1}{10^n}$ 叫做无理数 α 的精确度.

3. 实数的性質：从度量綫段来看，以单位綫 a 去量綫段 b，則(1) a 与 b 有公度时，其度量結果为有理数(可用既約分数 $\frac{m}{n}$ 表示的数)；(2) a 与 b 无公度时，其度量結果是无限不循环小数，即无理数．有理数和无理数总称实数．在实数集合中沒有最小的数，也沒有最大的数，实数集合中的数与数軸上的点可

建立一一对应的关系.

4. 实数的絕对值

(1)定义:設a为实数,则$|a| = \begin{cases} a, & (若a\geqslant 0) \\ -a, & (若a<0) \end{cases}$

(2)几何意义:实数a在实数軸上对应的点到原点的距离.

5. 算术根的定义:正数的正的方根叫做算术根.如

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & (a\geqslant 0) \\ -a, & (a<0) \end{cases}$$

(四)复数

1. 虚数单位i,即$\sqrt{-1}=i$.

2. i的性质 $i^2=-1$,故有

$$i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i, i^{4n}=1.$$

3. 复数的代数式 $a+bi$(a和b为实数).

其中 $b=0$时$a+bi$叫实数.(对应于复数平面的实数軸上的一点)

$b\neq 0$时$a+ai$叫虚数.(对应于复数平面的实数軸以外的一点)

$a=0$,$b\neq 0$时$a+bi$叫純虚数.(对应于复数平面内虚数軸上的一点)

4. 复数等于0的定义:当且仅当$a=0$, $b=0$时,

$a+bi=0$.(原点)

5. 复数相等的定义:当且仅当$a=a_1$,$b=b_1$时,

$a+bi=a_1+b_1i$

6. 共軛虚数的定义:$a+bi$和$a-bi$叫共軛虚数(对应于复数平面的实数軸的对称点).

7. 相反复数的定义:$a+bi$和$-a-bi$或$a-bi$和

$-a+bi$ 等叫做相反复数(对应于关于复数平面的原点为中心的对称点).

8. 复数的模, $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$,即复数平面上 $a+bi$ 的点到原点的距离.

9. 对于任意的两个复数没有大小的规定，但可以比較它們的模的大小.

10. 复數的三角函数式

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r},\\ \sin\theta=\dfrac{b}{r},\end{cases}$ $0\leqslant\theta<2\pi$.

例 題

1. 計算 $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}$.

〔解〕 若 $x\leqslant-3$, 　　則原式 $=4-3x$.

若 $-3<x<2$, 則原式 $=10-x$.

若 $2\leqslant x<5$, 　則原式 $=x+6$.

若 $x\geqslant5$, 　　則原式 $=3x-4$.

2. 化 $-1-i$ 为三角函数式.

〔解〕 $r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ θ 的主值是 $\dfrac{5\pi}{4}$,

$\therefore$ $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

3. 求 $\sin 210^\circ + i\cos 210^\circ$ 的模数与幅角.

〔解〕 $\sin 210^\circ + i\cos 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ)$

$+ i\cos(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$

$- i\cos 30^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i,$

$$\therefore \quad r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \quad \theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ.$$

4. 表示复数 z 的平面点的位置在哪里?

(1) $|z| = 2$, (2) $1 < |z| < 2$,

(3) $\frac{\pi}{6} <$ z 的幅角 $< \frac{\pi}{4}$.

〔解〕 $|z| = 2$ 的点在以原点为中心，以 2 为半徑的圓周上，

$1 < |z| < 2$ 的点在以原点为中心，以 1 与 2 为半徑的同心圓所成环形內部.

$\frac{\pi}{6} <$ z 的幅角 $< \frac{\pi}{4}$ 的点在过原点的射綫与 x 軸的正方向所夾角 $\frac{\pi}{4}$ 与 $\frac{\pi}{6}$ 的差的平面內.

复 习 題 一

1. 証明: "沒有一个有理数,它的平方能够等于 2".

2. 下列各数哪些是有理数?哪些是无理数?

3.1416, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{16}$, $-3\frac{21}{31}$, $0.333\cdots\cdots$

有 无 有 有 有

0.571428571428, $\frac{\sqrt{10}}{2}$, π, $\frac{\pi}{2}$.

有 无 无 无

3. 不論a, b为何值，$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$永远不正确嗎？

4. 若$xi+y(1-i)=3+i$，且x, y为实数，求x与y的值。

5. 化簡$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{b^2-2bc+c^2}$，且$a<b<c$。

6. 化簡$\frac{1+i}{1-i}+i^{363}$；　　$(1+i)^5+(1-i)^5$；

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+2};\qquad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}.$$

7. 当x, y为何实值时，等式$\frac{x-2}{1-i}+\frac{(y-3)i}{1+i}$

$=1-3i$成立？

8. 一切：（1）实数部分为7；

（2）虚数部分为(-5)；

（3）实数部分相同；

（4）虚数部分相同的数各由复数平面上的什么位置的点来表示？

9. 已知两复数为$2+3i$，$4-5i$，求它們的和、差、积、商的模数。

10. 設x, y均表实数，求$(1+i)x+(1-i)y$与$(2-i)x+(1+i)y$的差。

11. 实数与純虚数的模数与幅角各是什么？

12. 方程$|x|=1$，在正数集内有几解？实数集呢？复数集呢？它們的解各是什么？

13. 化下列四数为三角函数式，并証明这四点共圓：

$1+2i$；$-\sqrt{2}+\sqrt{3}i$；$\sqrt{3}-\sqrt{2}i$；$-2-i$.

14. 在实数范圍内，下列各式中的 x 是什么值时才有意义？

（1）$\sqrt{1-x}+\sqrt{3x-1}$，　　（2）$\frac{1}{|x|-x}$，

（3）$\sqrt{\frac{4x-1}{2-3x}}$.

第二編　代数式

复习目的要求

（一）代数式的恒等变形在整个代数科的內容里，占着极其重要的地位，首先它和前面一部分的实数与复数密切相联，同时又是后面的几个部分（尤其是方程）的基础知識和基本工具，因此复习时，必須注意技能技巧的熟練，以便自覚地、迅速而又合理地作出它的恒等变形.

（二）要特別注意在某一数集中代数式里代表变量的文字所允許取的值的范圍，如在实数集中 $\sqrt{x}$ 的变量 x 必需大于或等于零.

（三）多項式的因式分解我們一般都是在有理数集中来研究，但如果需要扩大数集的范圍，就可得不同的結果，例如

$x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)$，有理数集內.

或 $=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2)$，实数集內.

或 $=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$，

复数集內。

(四)特別注意掌握分式运算、根式运算的准确度及有理指数的运算法則的应用。

(五)根式化簡的問題，利用有理指数未来做，經常带来許多方便，应給以重視。

重点內容

(一)多項式的因式分解

1. 余数定理　多項式$f(x)$除以$x-a$所得的余数等于$f(a)$，卽 $R=f(a)$。(参看第三册 §139)

推論：当$f(a)=0$时，$f(x)$能被$x-a$整除。

2. 綜合除法　$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$除以$x-a$所得的商是$b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$及余数$r$可寫成：

$$\begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & a \\ & ab_0 & ab_1 & \cdots\cdots & ab_{n-2} & ab_{n-1} & \\ \hline \end{array}$$

$a_0=b_0$ $a_1+ab_0=b_1$ $a_2+ab_1=b_2\cdots\cdots a_{n-1}+ab_{n-2}=b_{n-1}$ $a_n+ab_{n-1}=r$。

例　求 x^4-x^2+2x-3 除以$x-1$的商式及余数。

$$\begin{array}{r|l} 1+0-1+2-3 & 1 \\ +1+1+0+2 & \\ \hline 1+1+0+2-1 & \end{array}$$

故　商式 $=x^3+x^2+2$，余数 $r=-1$.

3.多項式的运算公式:

(1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

(3) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

(4) $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

(5) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$.

4.有理整式的因式分解:

(1)提出全部項或部分項的公因式.

(2)应用乘法公式.

(3)分組(集項)分解.

(4)应用二次三項式的因式分解(配方法、韦达定理).

(5)应用綜合除法分解.

(6)用二項齐次式 $x^m\pm a^m$ 公式分解.

(7)較复杂的有理整式的分解沒有固定的方法，必須有熟練的技巧才能分解.

例　題

分解以下各式为有理式的因式:

1. x^4-2x^2+1.

〔解〕 原式 $=(x^2-1)^2=(x+1)^2(x-1)^2$.

2. $a^8x^8-b^8y^8$.

〔解〕 原式 $=(a^4x^4+b^4y^4)(a^4x^4-b^4y^4)$

$$=(a^4x^4+b^4y^4)(a^2x^2+b^2y^2)(a^2x^2-b^2y^2)$$

$$=(a^4x^4+b^4y^4)(a^2x^2+b^2y^2)(ax+by)(ax-by).$$

3. $(x-y)^2-6(x-y)(y-z)+9(y-z)^2$.

〔解〕 原式$=[(x-y)-3(y-z)]^2=(x-4y+3z)^2$.

4. $(x^2+8x+9)(x^2+8x+18)+18$.

〔解〕 原式$=(x^2+8x+9)[(x^2+8x+9)+9]+18$.

$$=(x^2+8x+9)^2+9(x^2+8x+9)+18$$
$$=[(x^2+8x+9)+3][(x^2+8x+9)+6]$$
$$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+15)$$
$$=(x+2)(x+6)(x+3)(x+5)$$

5. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$.

〔解〕 原式$=x^4-2x^3y-y^4+2xy^3$

$$=(x^4-y^4)-(2x^3y-2xy^3)$$
$$=\underline{(x^2+y^2)(x^2-y^2)-2xy(x^2-y^2)}$$
$$=(x^2-y^2)(x^2-2xy+y^2)$$
$$=(x^2-y^2)(x-y)^2$$
$$=(x+y)(x-y)^3.$$

6. $6x^2-11x-2$

〔解〕 因 $6x^2-11x-2=0$ 的根为

$$x=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{12}=\frac{11\pm 13}{12},$$

$$\therefore\ x_1=2,\qquad x_2=-\frac{1}{6},$$

$$\therefore\ 6x^2-11x-2=6(x-2)\left(x+\frac{1}{6}\right)=(x-2)(6x+1).$$

簡略的解法:

<u>首末相乘分别得原式的首項及末項，而交叉相乘的代数和得中項</u>；故亦得上面相同的結論.

$$\begin{array}{ccc} x & & -2 \\ & \times & \\ 6x & & +1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{x-12x=-11x\text{(即中項)}} \end{array}$$

7. $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

〔解〕 原式$=(2x+y)(2x-3)-4x+10y-3$

$$=[(2x+y)+m][(2x-3y)+n]$$

$$=4x^2-4xy-3y^2+(2m+2n)x+(n-3m)y+mn$$

$\therefore\ 2m+2n=-4,\quad n-3m=10,\quad m=-3,\quad n=1.$

原式$=(2x+y-3)(2x-3y+1)$.

又法:

原式$=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$.

$$\frac{4(y+1)\pm\sqrt{[4(y+1)]^2+4\cdot4(3y^2-10y+3)}}{8}$$

$$=\frac{4y+4\pm8(y-1)}{8}.$$

$$x=\frac{3y-1}{2},\qquad x=\frac{-y+3}{2},$$

$\therefore$ 原式$=(2x+y-3)(2x-3y+1)$.

8. $3x^5-3x^4-13x^3-11x^2-10x-6$.

〔解〕 多項式根可能为$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3}$.

因奇次項系数和与偶次項系数和相等,故有-1的根.

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
3 & -3 & -13 & -11 & -10 & -6 & -1\\
 & -3 & +6 & +7 & +4 & +6 & \\
\hline
3 & -6 & -7 & -4 & -6 & & -1\\
 & -3 & +9 & -2 & +6 & & \\
\hline
3 & -9 & +2 & -6 & & & 3\\
 & +9 & +0 & +6 & & & \\
\hline
3 & +0 & +2 & & & &
\end{array}$$

原式$=(x+1)^2(x-3)(3x^2+2)$

9. $6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$.

〔解〕 多项式的根可能为±1，±2，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{2}{3}$，$\pm\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{r|l}
 & 6+5+3-3-2 \quad \big| -\frac{1}{2} \\
 & \quad -3-1-1+2 \\
2 & \overline{6+2+2-4} \\
 & 3+1+1-2 \quad \big| \frac{2}{3} \\
 & \quad +2+2+2 \\
3 & \overline{3+3+3} \\
 & 1+1+1
\end{array}$$

$$原式=2\cdot3\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x^2+x+1)$$

$$=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1).$$

10．如a,b,c,d为四边形的四条边，且$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，

求証：这四边形是菱形.

〔証〕 $\because\ a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$，

$\therefore\ a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4+2a^2b^2-4abcd+2c^2d^2=0$.

即 $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$.

但 $(a^2-b^2)^2\geqq0$，$(c^2-d^2)\geqq0$，$(ab-cd)^2\geqq0$.

因之只有 $a=b$，$c=d$，$ab=cd$，

即 $a^2=c^2$，$\therefore\ a=c$，$\therefore\ a=b=c=d$.

11．在$\triangle ABC$中若$\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$，

求証：$\angle C=60^\circ$.

〔証〕 $\because\ \frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$，

$$\therefore\quad \frac{(b+c)+(c+a)}{(b+c)(c+a)}=\frac{3}{a+b+c}.$$

即 $(a+b+c)[(a+c)+(b+c)]=3(b+c)(c+a)$,

化簡得 $a^2+b^2-c^2=ab$,

即 $$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}.$$

而 $$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos C,\quad \therefore\ \angle C=60^\circ.$$

复 习 題 二

（1題——6題在有理数集內进行分解）

1. 分解 $1-(x-y)^3$的因式;

2. 分解 $64x^6+\frac{1}{8}$的因式;

3. 分解 $a^2+\left(n+\frac{1}{n}\right)ab+b^2$的因式;

4. 分解 $9^n-3^{n+1}+2$的因式;（n为自然数）

5. 分解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$的因式;

6. 分解 $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$的因式;

7. 求証: $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$可被$x+y+z$ 整除;

8. 求証: $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3=2$;

9. 求証: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$的平方根是 x^2+5x+5;

10. 若$\sin x+\cos x=a$，求$\sin^5 x+\cos^5 x$的值;

11. 求証: $13^{2n}-1$为168的倍数;

12. 若 $x^2+xy-2y^2-x+7y-m$ 能分成两个一次式的因式