

公路技术资料

13

广义角变位移法
和
集体分配法

人民交通出版社

公路技术资料

(13)

广义角变位移法 和 集体分配法

王磊 李家宝 刘光栋 编著

人民交通出版社

内 容 提 要

广义角变位移法和集体分配法是两种比较好的结构分析方法。本书对前者简要介绍在跨变结构（例如：连续拱桥、单层及多层拱顶结构、桁架屋顶……）中应用，并提出推广的广义角变位移法，可用以解决地下结构等不平衡沉降时复杂计算问题。对后者比较系统介绍了基本原理，并用于公路桥结构计算，通过一些示例，介绍了应用方法。可供从事公路桥梁及其他结构设计人员、有关院校师生学习参考。

公路技术资料

(13)

广义角变位移法和集体分配法

王 磊 李家宝 刘光栋 编著

人民交通出版社出版

(北京市安定门外和平里)

北京市书刊出版业营业许可证出字第 006 号

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：9.5 字数：215 千

1980年3月 第1版

1980年3月 第1版 第1次印刷

印数：0001—5,500册 定价：0.76元

前 言

在结构分析上,我国的科学工作者,提出很多技巧性方法,在建国以来的十年科学成就[30]中,曾提到的广义角变位移法和集体分配法,就是比较突出的代表。为了继承和发展我国的学术成就,使其为祖国伟大的社会主义建设事业服务,十多年来,我们在联系生产实际问题中,对广义角变位移法和集体分配法做了一些分析研究工作,又取得了一些新的进展。本书就是根据我国已有的优秀成果和我们工作中的一些体会,编写整理而成。

角变位移法 (Slope Deflection Method) 是以结构的位移和转角作为基本未知数,用于解算直杆超静定刚架体系的一种基本方法。我国蔡方荫[2]等在角变位移法的基础上提出了广义角变位移法,后经文献[4]、[10]、[11]、[23]等作者的努力,使广义角变位移法日臻完善,它可以解决一系列跨变结构(如连续拱桥、单层及多层拱顶结构、桁架屋顶、人字形屋顶结构等)以及其他结构的计算问题。在这里除摘要介绍广义角变位移法在以上类型结构上的应用外,还提出了推广的广义角变位移法;此法考虑了拱趾有转角、横向位移和竖向位移的一般情况,可以解决地下建筑、地下铁道结构以及防空建筑在地层有不均衡沉陷时的复杂计算问题。在设计工作中,只要掌握了这些方法,是不难结合电算程序将大量的计算工作通过电子计算机来完成。

力矩分配法 (Moment Distribution Method) 是美国克劳斯1930年提出的一种渐近算法,适于分析连续梁和无结

点线位移的刚架，这种手算方法由于物理概念简明，不需解联立方程，所以直至现在仍在我国设计单位广泛使用，但是它收敛缓慢的缺点，因此，在较长的一段时间内，各国学者都曾研究过改善力矩分配法的收敛性问题。我国俞忽〔3〕提出的集体分配法成功地解决了这一问题。文献〔10〕、〔32〕〔31〕等作者将其推广应用于有结点线位移的刚架及跨变结构的分析，文献〔39〕、〔40〕将集体分配法用于结构的振动计算，文献〔41〕将其用于不等高铰接排架的分析，并制成了一套表格。本书比较系统地介绍了集体分配法的基本内容及其应用。由于我们在工作中，常常是将广义角变位移法与集体分配法结合起来应用，并以角变位移法和广义角变位移法作为理论基础（例如：扩大集体分配单位的采用，无剪力集体分配法以及剪力铰T型刚构分析〔44〕等内容），因此，在编写书稿时，将角变位移法放在前面加以介绍，以便于读者阅读。关于剪力（推力）集体分配法是结合公路桥梁结构中的连拱来介绍的，而将锯齿形排架，横梁刚度视为无限大的复式刚架的分析等内容删去了，故内容稍欠全面。文献〔10〕提出的不平衡力矩及推力集体分配法也由于文献〔23〕已经介绍，所以没有编入。本书第五章介绍的由文献〔42〕、〔43〕的作者提出的广义集体分配法，把刚架静力学的有效成果渗透于应用弹性力学和微分方程数值计算的领域中，进一步从数学本质上揭示了集体分配法的优点，它比松弛法显示了更大的优越性。在电子计算技术日益发展的今天，广义集体分配法在数值计算方面是一个比较好的方法。如果将集体分配法从本质上加以推广，它定能在结构力学、弹塑性力学以及微分方程的数值分析等更广阔的领域中得到应用。

本书附录一介绍的迭代法，重点内容是关于改进收敛性的几条经验，这是俞忽教授等人丰富实践经验的总结。附录

三的克雷洛夫函数表以及取自潘家铮著《渐变段衬砌》的附录二，是两个很有用的表格，本书所介绍的方法需直接查用这些表格，故一并收入书中备用。

编著者

1978年6月

目 录

第一章 角变位移法.....	1
§1-1 等截面和变截面直杆的角变位移方程.....	1
§1-2 角变位移法的基本原理.....	10
§1-3 用角变位移法计算多跨多层刚架.....	13
§1-4 用角变位移法计算弹性支承上的连续梁.....	20
§1-5 用角变位移法计算高桩承台.....	26
第二章 广义角变位移法及其推广应用.....	37
§2-1 概述.....	37
§2-2 拱形和人字形跨变杆件的角变位移方程.....	38
§2-3 用广义角变位移法计算连续拱及其它 跨变结构.....	56
§2-4 用广义角变位移法计算地下结构（不 考虑支承点的竖向位移）.....	68
§2-5 考虑支座竖向位移时曲杆的角变位移 方程.....	97
§2-6 用推广的广义角变位移法计算一般地 下结构.....	115
第三章 力矩集体分配法.....	140
§3-1 集体分配法的基本原理.....	140
§3-2 无结点线位移刚架和连续梁计算.....	147
§3-3 扩大的力矩集体分配单位.....	156
§3-4 无剪力集体分配法.....	170
§3-5 剪力铰 T 型刚构桥的计算.....	181

第四章 剪力（推力）集体分配法	217
§4-1 概述	217
§4-2 剪力（推力）集体分配法的基本原理	221
§4-3 两铰拱的连拱计算	225
§4-4 扩大的剪力（推力）集体分配单位	226
第五章 广义集体分配法及其在一般联立一次方程组求解中的应用	237
§5-1 集体分配法的数学本质	237
§5-2 广义集体分配法的基本内容	241
§5-3 广义集体分配法在一般联立一次方程组上的应用	248
附录一 迭代法（连续代入法）	259
附录二 弹性地基梁 $\phi_1 \sim \phi_8$ 、 $\phi_{10} \sim \phi_{15}$ 以及 ϕ_{18} 、 ϕ_{19} 函数表	270
附录三 弹性地基梁 Y_1 、 Y_2 、 Y_3 、 Y_4 函数表	272

第一章 角变位移法

§1-1 等截面和变截面直杆的角变位移方程

在角变位移法中，首先要建立一根杆件的杆端力和杆端位移之间的关系式，这就是杆件的角变位移方程。本节将按一般结构力学的方法写出等截面和变截面直杆的角变位移方程。

(一) 等截面直杆的角变位移方程

图1-1,a所示两端固定的等截面直杆 ij ，其两端发生杆端位移如图所示。设 i 端的杆端位移为 Δ 、 θ ， j 端的杆端位移为 Δ_j 、 θ_j 。图中 $\beta = \Delta'/l = (\Delta_j - \Delta)/l$ ，称为弦转角， $\Delta = \Delta_j - \Delta$ 表示 i 、 j 两端沿着与杆轴垂直的方向产生的相对线位移。此外，杆上还受荷载作用，当荷载单独作用时，杆端所产生的弯矩和剪力即为固端弯矩和固端剪力，如图1-1,b所示。设在以上各种因素的共同作用下，两端固定杆 i 端所产生的杆端力为 Q_{ij} 、 M_{ij} ， j 端的杆端力为 Q_{ji} 、 M_{ji} 。

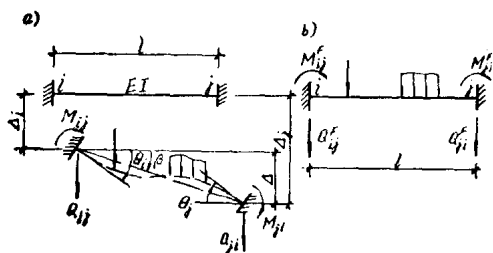


图 1-1

杆端位移和杆端力的正负符号规定如下：线位移 Δ 以向下为正，向上为负；角位移以顺时针方向为正，逆时针方向为负； β 以顺时针方向为正。相应的，杆端力 Q 以向下为正； M 以顺时针方向为正。

由结构力学知此杆的杆端弯矩为：

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= -\frac{EI}{l} (4\theta_i + 2\theta_j - 6\beta) + M_{ij}^F \\ M_{ji} &= -\frac{EI}{l} (2\theta_i + 4\theta_j - 6\beta) + M_{ji}^F \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

利用平衡条件 $\Sigma M_i = 0$ 和 $\Sigma M_j = 0$ ，可得杆端剪力为：

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij} &= -\frac{EI}{l} \left(\frac{6}{l} \theta_i + \frac{6}{l} \theta_j - \frac{12}{l} \beta \right) + Q_{ij}^F \\ Q_{ji} &= -\frac{EI}{l} \left(-\frac{6}{l} \theta_i - \frac{6}{l} \theta_j + \frac{12}{l} \beta \right) + Q_{ji}^F \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

将式(1-1)、(1-2)合在一起写成矩阵形式，则有

$$\begin{pmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \\ Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \\ \frac{6}{l} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l} \\ -\frac{6}{l} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \\ Q_{ij}^F \\ Q_{ji}^F \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

式中： M_{ij}^F 、 M_{ji}^F 为固端弯矩； Q_{ij}^F 、 Q_{ji}^F 为固端剪力。

式(1-3)就是等截面直杆的角变位移方程（矩阵形式）。

如果将 $\beta = (\Delta_i - \Delta_j)/l$ 代入式(1-1)、(1-2)，就可得到用杆端绝对位移 Δ_i 、 Δ_j 表示的角变位移方程，其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \\ Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 & \frac{6}{l} & -\frac{6}{l} \\ 2 & 4 & \frac{6}{l} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{12}{l^2} \\ -\frac{6}{l} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{12}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \Delta \\ \Delta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \\ Q_{ij}^F \\ Q_{ji}^F \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

或简写为

$$S = k \delta + R \quad (1-5)$$

式中: S ——杆端力列矩阵;

δ ——杆端位移列矩阵;

R ——荷载项列矩阵;

k ——角变位移法的单元刚度矩阵:

$$k = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 & \frac{6}{l} & -\frac{6}{l} \\ 2 & 4 & \frac{6}{l} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{12}{l^2} \\ -\frac{6}{l} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{12}{l^2} \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

显然, 对于图 1-2 所示两端固定的等截面竖直杆 (相当于图 1-1 的水平杆逆时针转 90°)。如设杆端水平线位移和剪力的方向以向右为正; 杆端转角和弯矩以顺时针方向为正; β 以顺时针方向为正, 则其角变位移方程仍为式 (1-3) 或 (1-4)。

图 1-3 所示等截面直杆, i 端固定, j 端铰支, 其角变位

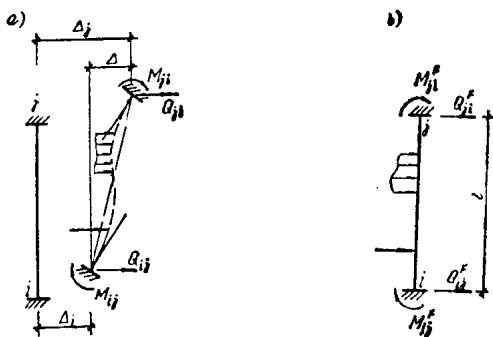


图 1-2

移方程为:

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ \frac{3}{l} & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & \frac{3}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ Q_{ij}^F \\ Q_{ji}^F \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

或

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{l} & -\frac{3}{l} \\ \frac{3}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{3}{l^2} \\ -\frac{3}{l} & -\frac{3}{l^2} & \frac{3}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \Delta_i \\ \Delta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ Q_{ij}^F \\ Q_{ji}^F \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

其中 F_{ij}^F 为这种杆件的固端弯矩, Q_{ij}^F 、 Q_{ji}^F 为固端剪力。

如果等截面直杆的 i 端为铰支, j 端为固定, 则其角变位移方程为:

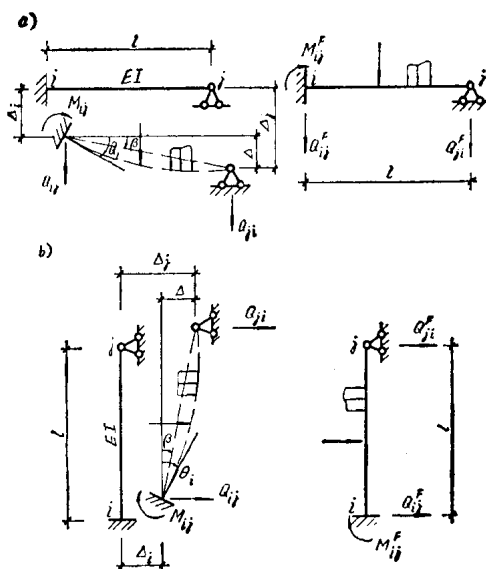


图 1-3

$$\begin{Bmatrix} M_{ji} \\ Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ \frac{3}{l} & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & \frac{3}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_j \\ \beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{ji}^{F'} \\ Q_{ij}^{F'} \\ Q_{ji}^{F'} \end{Bmatrix} \quad (1-9)$$

或

$$\begin{Bmatrix} M_{ji} \\ Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{l} & -\frac{3}{l} \\ \frac{3}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{3}{l^2} \\ -\frac{3}{l} & -\frac{3}{l^2} & \frac{3}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_j \\ \Delta \\ \Delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{ji}^{F'} \\ Q_{ij}^{F'} \\ Q_{ji}^{F'} \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

(二)变截面直杆的 角变位移方程

图1-4为两端固定的任意变截面直杆。其杆端位移和杆端力的正负号规定与等截面直杆相同。对于变截面杆，角变位移方程是采用下列各常数表示的（参见图1-5）：

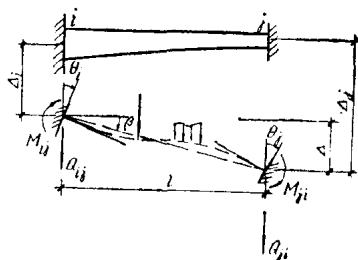


图 1-4

S_{ij} ——表示 i 端固定， i 端发生单位正向转角（无线位移）时， i 端所产生的力矩，叫做 i 端的抗弯刚度或劲度系数。

C_{ij} ——表示 i 端固定， i 端发生单位正向转角（无线位移）时， i 端力矩与 j 端力矩的比值，叫做 i 端至 j 端的力矩传递系数。

J_{ij} ——表示 i 端固定， i 端沿垂直于杆轴的正方向发生单位线位移（无转角）时， i 端所产生的剪力，叫做 i 端的抗移刚度或抗推刚度。

T_{ij} ——表示 i 端固定， i 端发生单位正向转角（无线位移）时， i 端所产生的剪力，叫做 i 端的相干系数。它也就是当 i 端固定， i 端沿垂直于杆轴的正方向发生单位线位移时， i 端所产生的力矩。

同理， j 端的抗弯刚度为 S_{ji} ， j 端至 i 端的力矩传递系数为 C_{ji} ， j 端的抗移刚度为 J_{ji} ，相干系数为 T_{ji} 。

上述各常数之间存在着一定的关系。根据功的互等定理，则

$$S_{ij}C_{ij} = S_{ji}C_{ji} \quad (1-11)$$

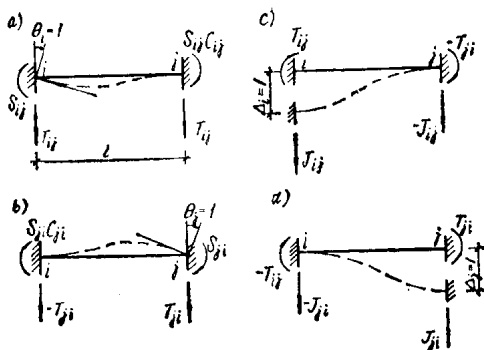


图 1-5

$$J_{ij} = J_{ji} = J \quad (1-12)$$

又由图1-5a, 则

$$T_{ij} = \frac{S_{ij}(1 + C_{ij})}{l} \quad (1-13)$$

由图1-5b, 则

$$T_{ji} = -\frac{S_{ji}(1 + C_{ji})}{l} \quad (1-14)$$

由图 1-5c 或 d, 则

$$J = \frac{T_{ij} - T_{ji}}{l}$$

将式(1-13)、(1-14)代入得

$$J = \frac{S_{ij} + S_{ji} + 2S_{ij}C_{ij}}{l^2} \quad (1-15)$$

根据以上各常数的定义, 即可写出两端固定变截面直杆的角变位移方程如下:

$$\begin{Bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \\ Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ij} & S_{ij}C_{ij} & T_{ij} & -T_{ij} \\ S_{ij}C_{ij} & S_{ji} & -T_{ji} & T_{ji} \\ T_{ij} & -T_{ji} & J & -J \\ -T_{ij} & T_{ji} & -J & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \Delta_i \\ \Delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \\ Q_{ij}^F \\ Q_{ji}^F \end{Bmatrix} \quad (1-16)$$

式中 M_{ij}^F 、 M_{ji}^F 仍为固端弯矩， Q_{ij}^F 、 Q_{ji}^F 仍为固端剪力。

将图 1-4 所示杆件逆时针旋转 90° ，即得直立的两端固定的变截面直杆，其角变位移方程仍为式(1-16)。

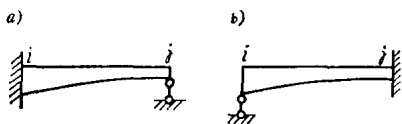


图 1-6

对于图 1-6a 所示 i 端固定， j 端铰支的变截面直杆，其角变位移方程为：

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{ij} & T'_{ij} & -T'_{ij} \\ T'_{ij} & J'_{ij} & -J'_{ij} \\ -T'_{ij} & -J'_{ij} & J'_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \Delta \\ \Delta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ Q_{ij}^F \\ Q_{ji}^F \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

式中：

S'_{ij} 是 i 端固定 j 端铰支变截面直杆 i 端的抗弯刚度，并有

$$S'_{ij} = S_{ij}(1 - C_{ij}C_{ji}) \quad (1-18)$$

T'_{ij} 是 i 端的相干系数，并有

$$T'_{ij} = \frac{S'_{ij}}{l} = \frac{S_{ij}(1 - C_{ij}C_{ji})}{l} \quad (1-19)$$

J'_{ij} 是 i 端的抗移刚度，并有

$$T'_{ij} = \frac{S'_{ij}}{l^2} = \frac{S_{ij}(1 - C_{ij}C_{ji})}{l^2} \quad (1-20)$$

当杆件为等截面时，有 $S_{ij} = 4EI/l$ ， $C_{ij} = C_{ji} = 1/2$ ，则 $S'_{ij} = 3EI/l$ ， $T'_{ij} = 3EI/l^2$ ， $J'_{ij} = 3EI/l^3$ 。这时，式(1-17)就变

成式(1-8)。

对于图 1-6b 所示 i 端铰支 j 端固定的变截面直杆, 其角变位移方程为:

$$\begin{Bmatrix} M_{ji} \\ Q_{ij} \\ Q_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{ji} & -T'_{ji} & T'_{ji} \\ -T'_{ji} & J'_{ji} & -J'_{ji} \\ T'_{ji} & -J'_{ji} & J'_{ji} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_j \\ \Delta_i \\ \Delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{ji}^{F'} \\ Q_{ji}^{F'} \\ Q_{ji}^{F'} \end{Bmatrix} \quad (1-21)$$

式中, $S'_{ji} = S_{ji}(1 - C_{ij}C_{ji})$ (1-22)

$$T'_{ji} = -\frac{S'_{ji}}{l} = -\frac{S_{ji}(1 - C_{ij}C_{ji})}{l} \quad (1-23)$$

$$J'_{ji} = \frac{S'_{ji}}{l^2} = \frac{S_{ji}(1 - C_{ij}C_{ji})}{l^2} \quad (1-24)$$

当杆件为等截面时, 有 $S_{ji} = 4EI/l$, $C_{ij} = C_{ji} = 1/2$, 则 $S'_{ji} = 3EI/l$, $T'_{ji} = -3EI/l^2$, $J'_{ji} = 3EI/l^3$ 。这时, 式(1-21)变成式(1-10)。

式(1-17)和式(1-21)中的固端弯矩与相应的两端固定变截面直杆的固端弯矩之间有如下关系:

i 端固定, j 端铰支时

$$M_{ij}^{F'} = M_{ij}^F - C_{ji}M_{ji}^F \quad (1-25)$$

i 端铰支, j 端固定时

$$M_{ji}^{F'} = M_{ji}^F - C_{ij}M_{ij}^F \quad (1-26)$$

值得注意, 在以上所述的形常数中, 抗弯刚度 S 和抗移刚度 J 恒为正值。而在我们所使用的正负号系统中, 相干系数则有正负之分, 对于水平杆来说, 左端为正, 右端为负; 对于直立杆来说, 下端为正, 上端为负。

以上关于杆端位移和杆端力的正负号规定, 为本书第一