直角三角形世界

徐 望 根

宇航出版社

直角三角形世界

徐望根

宇航出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了直角三角形这个基本"元素"的特性及其在数学中的作用，进行了由浅入深的分析、归纳和提高，并且结合例题讲解了许多有趣的应用，初步勾画出了直角三角形世界的图景.

书中内容易于理解和应用，它对培养分析问题和解决问题的能力很有帮助，并有利于扩大视野、开发智力.

本书可供初中或相当于初中以上程度的自学青年阅读和数学爱好者参考.

书中还配备一定量的练习，并附有详细提示及答案，以便自我检查.

直 角 三 角 形 世 界
徐 望 根

*

宇 航 出 版 社 出 版
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 销
北 京 科 技 印 刷 厂 印 刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：4.75 字数：103 千字
1987 年 7 月第一版第一次印刷 印数：1—4,500 册
统一书号：7244·0104 定价：1.20 元

前　言

《直角三角形世界》这本书，叙述和描绘了直角三角形是构成多边形和圆的基本“元素”，并指出了直角三角形的边角关系是研究多边形和圆的重要基础，阐明了直角三角形及其有关线段所组成的图形在几何、代数、三角上的各种表现和有趣应用．从这些侧面，初步勾画出这个“世界”的图景来．

本书的内容，不但能加深对直角三角形这个图形的认识，而且能启发用这个图形的思想来妙解许多数学题，它是一本具有科学性和趣味性的数学科普读物．

练习题是本书的组成部分，为了方便读者，每题后都有详细的提示及答案，宜于先试做一下，后看提示内容，以开阔解题思路和培养分析能力．

本书内容充实，概念明确，除少量的立体几何知识外，绝大部分内容不超过初中程度．本书适合初中及相当于初中以上程度的自学青年阅读，亦可供数学爱好者的参考．

徐望根

于北京景山学校

一九八七年

目　　录

一、组成图形的“元素”

象化学中的化合物是由不同种元素的原子所组成的一样，形状万千的图形也能剖分成直角三角形这个基本“元素”，即，直角三角形这个基本“元素”能拼合成形状万千的图形.

1. 关于 n 边形的剖分问题

在提出剖分问题之前，我们先看一看简单图形的剖分.

图 1-1 是长方形 $ABCD$ 的六种不同的剖分，分别剖分出 2，5，6，10，6，8 个直角三角形. 当然根据需要也还可以有其他不同的剖分，读者自己可以试一试.

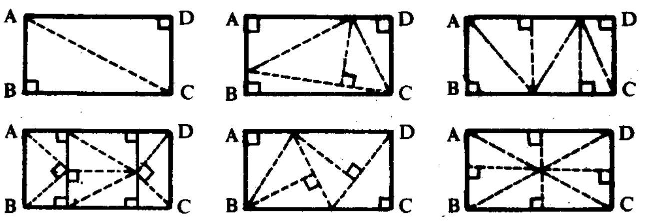


图 1-1

可见，同一个图形的不同的剖分，剖分出来的直角三角形的个数有多有少，个数可以相同，也可以不同. 对不同的图形来说，更是如此.

即使是按照某种规律进行剖分，剖分出来的直角三角形的个数也会有多有少，是多是少与剖分的次数有关. 图 1-2 是直角 $\triangle ABC$（简记 Rt$\triangle ABC$）按如下规律进行剖分：作

$Rt\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高 CC_1，后作 $Rt\triangle BCC_1$ 的斜边 BC 上的高 C_1C_2,再作 $Rt\triangle BC_1C_2$ 的斜边 BC_1 上的高 C_2C_3，如此等等．随着剖分次数的增加，直角三角形的个数也不断增加,从图中看出，可以有 1 个(即自身)，2 个，3 个，4 个,…,少至一个,多至任意个,直至无穷．

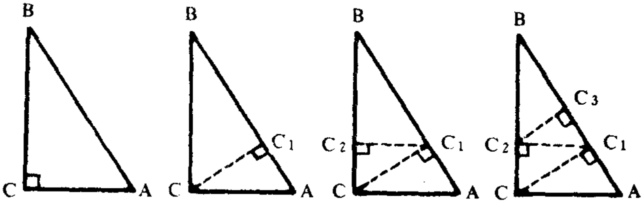


图 1-2

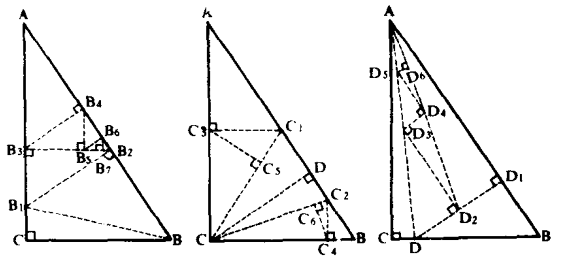
例 1　找三种不同的剖分，分别把同一个直角三角形剖分为 8 个直角三角形．

[**简解**]　在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，在 AC 上任取一点 B_1，连 B_1B．作 $B_1B_2\perp AB$ 于 B_2，$B_2B_3\perp AB_1$ 于 B_3，$B_3B_4\perp AB_2$ 于 B_4，$B_4B_5\perp B_2B_3$ 于 B_5，$B_5B_6\perp B_4B_2$ 于 B_6，$B_6B_7\perp B_5B_2$ 于 B_7．这样,就把 $Rt\triangle ABC$ 剖分为 8 个直角三角形(图 1-3(1))．这是一种剖分．

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，作 $CD\perp AB$ 于 D．在 AD 上任取一点 C_1，在 BD 上任取一点 C_2，连 CC_1，CC_2．作 $C_1C_3\perp AC$ 于 C_3，$C_3C_5\perp CC_1$ 于 C_5，$C_2C_4\perp BC$ 于 C_4，$C_4C_6\perp CC_2$ 于 C_6．这样，就把 $Rt\triangle ABC$ 剖分为 8 个直角三角形(图 1-3(2))．这是另一种剖分．

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，在 BC 上任取一点 D，连 AD．作 $DD_1\perp AB$ 于 D_1．在 DD_1 上任取一点 D_2，连 AD_2．作 $D_2D_3\perp DD_1$，D_2D_3 与 AD 交于 D_3．因为 $\angle AD_3D_2$ 是钝角，故可作 $D_3D_4\perp D_3D_2$，D_3D_4 交 AD_2 于 D_4；因为

$\angle AD_4D_3$ 是钝角，故可作 $D_4D_5 \perp D_4D_3$，D_4D_5 交 AD_3 于 D_5；因为 $\angle AD_5D_4$ 是钝角，作 $D_5D_6 \perp AD_4$ 于 D_6. 这样，就把 Rt$\triangle ABC$ 剖分为 8 个直角三角形(图 1-3(3))．这是第三种剖分．



(1) (2) (3)

图 1-3

在提出剖分问题之前，我们先说一下，什么叫做多边形．

在平面上顺次给出 n 个点($n \geqslant 3$)，如果每相邻三点不共线，头两点和终点不共线，末两点和起点也不共线，依次连结这 n 个点，并把最后一点和起点也连结起来，得到首尾相接的 n 条线段，这样的 n 条线段组成的图形叫做多边形，其中每条线段叫做这多边形的一条边，线段的端点叫做多边形的顶点．

前面提到的三角形和长方形都是多边形．

有 n 条边的多边形 ($n \geqslant 3$)，也叫 n 边形．在对 n 边形的剖分中，有两个问题引起我们的兴趣．一个是对任何给定的 n 边形，能不能剖分成若干个直角三角形？另一个是如果任何给定的 n 边形能剖分成若干个直角三角形，那么最少的个数是多少呢？

对三边形(即三角形)来说，这两个问题是明显的．我们知道三角形分直角三角形、锐角三角形及钝角三角形三类．下面我们分别来讨论这三类．

因为直角三角形的自身，是一个直角三角形，前面已经说过，随着剖分次数的增加，少至一个，多至任意个，直至无穷(图 1-2)．故最少能剖分成一个直角三角形，即自身(这种直角三角形自身不妨看作是剖分次数为 0 次的剖分)．

因为锐角三角形一边上的高把锐角三角形剖分为两个直角三角形，且不管是怎样的剖分，不能少于两个，故一个锐角三角形最少能剖分成两个直角三角形．

因为在钝角三角形中，钝角对边上的高把钝角三角形剖分为两个直角三角形，且不管是怎样剖分，不能少于两个，故一个钝角三角形最少能剖分成两个直角三角形．

上面两个问题，对三角形来说容易解决．对其他的多边形来说，情况就比较复杂．特别是后一个问题，我们只考虑凸 n 边形在特殊剖分方法下的最少个数问题．

2. 凸 n 边形的一个特殊的剖分方法

如果平面内的一个多边形位在它的任何一条边所在直线的一侧，则此多边形叫做凸多边形．在初中平面几何里，我们学过的多边形都是指的凸多边形．三角形是最简单的凸多边形，前面已研究了它的剖分问题，下面当我们考虑凸 n 边形的剖分问题时，n 可以从 4 算起，无特殊情况，不另再说明．

关于凸 n 边形，我们研究一种特殊的剖分方法：对角线法．

我们知道，一个凸 n 边形从一个顶点出发，有 $n-3$ 条对角线，这 $n-3$ 条对角线把 n 边形分为 $n-2$ 个三角形．在这 $n-2$ 个三角形中，出现直角三角形的个数一定是下列情况之一：0 个(即都不是直角三角形)，1 个，2 个，3 个，…，$n-3$ 个，$n-2$ 个．即 $n-1$ 种情况之一．到底属何种情况，不但与选凸 n 边形的顶点有关，而且与凸 n 边形的形状有关．在

图 1-4 中，画了四个形状不同的五边形，分别从一个顶点出发，各有两 ($n-3=5-3=2$) 条对角线，把五边形分成三 ($n-2=5-2=3$) 个三角形，每个图中，顺次出现 0 个，1 个，2 个，3 个直角三角形，即每个图中，三个三角形中出现的直角三角形的个数是四 ($n-1=5-1=4$) 种情况之一.

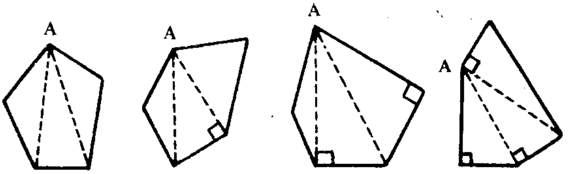


图 1-4

所谓对角线法，就是先用对角线把凸 n 边形剖分为若干个三角形，然后再把这些三角形剖分为直角三角形的方法。这里，实际分两步进行. 第一步，用对角线把它剖分为若干个三角形，剖分时，对角线可以从一个顶点出发，也可以从几个顶点出发；可以从某一个顶点出发，也可以从任何一个顶点出发. 总之，只要用对角线把凸 n 边形剖分为三角形即可. 第二步，把这些三角形再剖分为直角三角形. 第二步中采用何种剖分都行，不受限制. 如果当第一步中剖分出来的三角形都为直角三角形时，第二步可以不再剖分，也可以继续把直角三角形再剖分.

可见，对凸 n 边形来说，第一个剖分问题已解决，即用对角线法，任何给定的凸 n 边形能剖分成若干个直角三角形. 当然，除了对角线法外，也还可以有其他方法.

图 1-5 是正六边形的四种剖分，前三个图用的是对角线法，第四个图不是用的对角线法. 在第四个图中，只画了两条对角线，这两条对角线并没有把正六边形剖分为三角形，故不符合第一步.

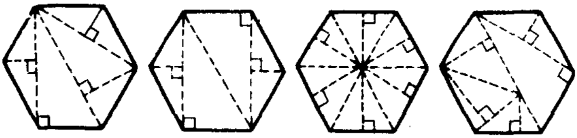


图 1-5

下面仅在对角线法下，研究凸 n 边形的第二个剖分问题。

在凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，从顶点 A_i（i 取 1, 2, 3, …, n 之一）出发的 $n-3$ 条对角线，把它剖分为 $n-2$ 个三角形. 在这些三角形中，有些可能是直角三角形，有些可能是锐角或钝角三角形. 到底有多少个是直角三角形，与凸 n 边形的顶点选择有关. 用 s_{A_i} 表示从顶点 A_i 出发的这 $n-2$ 个三角形中出现的直角三角形的个数. 这样，因为有 $n-2$ 个三角形，其中直角三角形有 s_{A_i} 个，故剩下的是 $n-2-s_{A_i}$ 个锐角或钝角三角形. 而一个锐角或钝角三角形最少能剖分成两个直角三角形，这 $n-2-s_{A_i}$ 个锐角或钝角三角形最少就能剖分成 $2(n-2-s_{A_i})$ 个直角三角形. 因此，这 $n-2$ 个三角形最少能剖分成 $s_{A_i}+2(n-2-s_{A_i})$ 个直角三角形。

由上述可知，在对角线法下，分别从 A_1、A_2、A_3、…、A_{n-1}、A_n 出发引对角线进行剖分，能剖分成最少的直角三角形的个数顺次是

$$s_{A_1}+2(n-2-s_{A_1}),\ s_{A_2}+2(n-2-s_{A_2}),$$
$$s_{A_3}+2(n-2-s_{A_3}),\ \cdots,\ s_{A_{n-1}}+2(n-2-s_{A_{n-1}}),$$
$$s_{A_n}+2(n-2-s_{A_n}).$$

此即

$$2(n-2)-s_{A_1},\ 2(n-2)-s_{A_2},\ 2(n-2)-s_{A_3},$$
$$\cdots,\ 2(n-2)-s_{A_{n-1}},\ 2(n-2)-s_{A_n}. \qquad (*)$$

设 s 为 $s_{A_1}, s_{A_2}, s_{A_3}, \cdots, s_{A_{n-1}}, s_{A_n}$ 中的最大一个，那么 $(*)$ 中的最小一个是 $2(n-2)-s$. 由此我们得到下面的定理.

定理 1　在对角线法下，凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 从任何一个顶点出发引对角线进行剖分，能剖分成最少的直角三角形的个数是 $2(n-2)-s$.

例 2　在四边形 $ABCD$ 中,已知 $DC=CB=1$, $\angle C=60°$, $\angle B=103°$, $\angle D=150°$ (图 1-6(1)),在对角线法下,四边形 $ABCD$ 从任何一个顶点出发引对角线进行剖分,求能剖分成最少的直角三角形的个数.

[简解]　依题,对角线 AC 把四边形 $ABCD$ 分成两个钝角三角形,故有 $s_A=s_C=0$ (图 1-6(2)).

连 BD (图 1-6(3)).

$\because\quad DC=CB=1,\ \angle C=60°,$

$\therefore\quad \angle CDB=\angle CBD=60°.$

故 $\triangle BCD$ 是等边三角形.

$$\because\quad \angle ADB=\angle ADC-\angle CDB$$
$$=150°-60°=90°,$$

$\therefore\quad \triangle ABD$ 是直角三角形.

对角线 BD 把四边形 $ABCD$ 分成一个直角三角形和一个等边三角形,故有 $s_B=s_D=1$.

因此 $s=1$, $2(n-2)-s=2(4-2)-1=3$, 根据定理 1，剖分成最少的直角三角形的个数是 3.

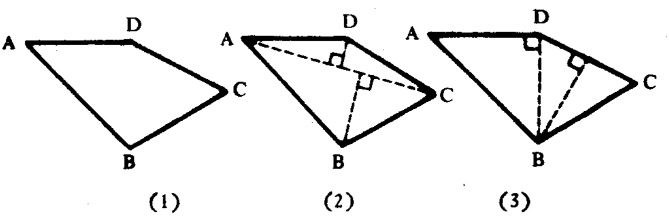


图 1-6

例 3　在凸五边形 $ABCDE$ 中，$BC=CD=DE$, $AB=$

AE, $BC \perp CD$, $ED \perp CD$, $AB \perp AE$, $\angle B = \angle E = 135°$ (图 1-7(1)), 在对角线法下, 此五边形从任何一个顶点出发引对角线进行剖分,求能剖分成最少的直角三角形的个数.

[简解] 从 A 出发的两条对角线把五边形分为一个锐角三角形和两个钝角三角形,故有 $s_A = 0$ (图 1-7(2)).

从 B (或 E)出发的两条对角线把五边形分为三个等腰直角三角形,故有 $s_B = s_E = 3$ (图 1-7(3)).

从 C (或 D)出发的两条对角线把五边形分为两个直角三角形和一个钝角三角形,故有 $s_C = s_D = 2$ (图 1-7(4)).

因此 $s = 3$, $2(n-2) - s = 2(5-2) - 3 = 3$, 根据定理 1,剖分成最少的直角三角形的个数是 3.

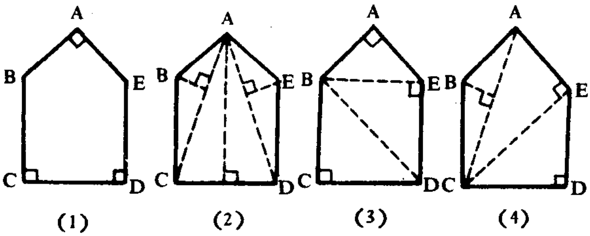


图 1-7

推论 1 在对角线法下, 任何一个给定的凸 n 边形从任何一个顶点出发引对角线进行剖分, 能剖分成最少的直角三角形的个数是

$n-2, n-1, n, n+1, \cdots, 2(n-2)-1, 2(n-2)$ 这 $n-1$ 个数之一.

[简证] 由定理知, 在对角线法下, 凸 n 边形从任何一个顶点出发引对角线进行剖分, 能剖分成最少的直角三角形的个数是 $2(n-2) - s$, 这里 $0 \leqslant s \leqslant n-2$. 当 s 分别取 $n-2, n-3, n-4, n-5, \cdots, 1, 0$ 这 $n-1$ 个数时, 数 $2(n-2) - s$ 的相应的值是 $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $\cdots$,

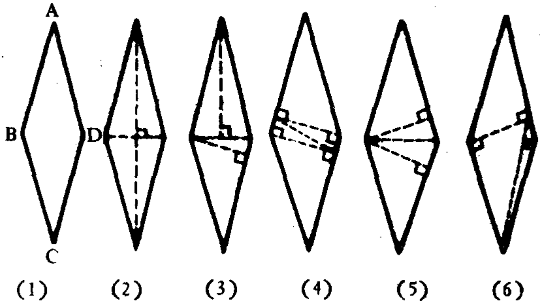
$2(n-2)-1$，$2(n-2)$．对不同的凸 n 边形，这 $n-1$ 个数都会出现，故得证．

推论 2 能找到 $2(n-2)$ 个直角三角形，它们可以拼合成任何一个给定的凸 n 边形．

[简证] 根据推论 1，当剖分成最少的直角三角形的个数是 $2(n-2)$ 时，那么这 $2(n-2)$ 个直角三角形即为所找，也就是说，这 $2(n-2)$ 个直角三角形按原来剖分后的位置拼合成这个给定的凸 n 边形．

根据推论 1，当剖分成最少的直角三角形的个数不是 $2(n-2)$ 时，而是 $n-2, n-1, n, n+1, \cdots, 2(n-2)-1$ 之一时，那只要将其中的直角三角形继续剖分，一直剖分到 $2(n-2)$ 个直角三角形为止，那么这 $2(n-2)$ 个直角三角形即为所找，也就是说，这 $2(n-2)$ 个直角三角形按如此剖分后的位置拼合成这个给定的凸 n 边形，故得证．

这里的"拼合"是指直角三角形的面不重合地填满 n 边形所围成的面．这推论 2，可以称得上是一条拼合定理，它说明了任何一个凸 n 边形可以由 $2(n-2)$ 个直角三角形来组成．它虽从推论 1 或定理 1 推出来的，且证明过程中与对角线法有直接关系，但一旦这一拼合定理得以证明，它的适用范围就不再限于对角线法了，只要能找到这 $2(n-2)$ 个直角三角形，



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)　(6)

图 1-8

不管用何种剖分方法都可以．下面的例 4 说明了这个问题．

例 4 在菱形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A = 30°$，$AB = 15\text{mm}$（图 1-8(1)），试用五种不同的剖分，分别把菱形剖分成四个直角三角形．

[简解] 五种不同的剖分，已如图 1-8(2)(3)(4)(5)(6)所示．

从图中可以看出，(2)、(3)、(5)用的是对角线法，而(4)、(6)用的不是对角线法．可见，若找四个直角三角形去拼合这个菱形时，就不一定限于对角线法了．

3. 凹多边形的剖分

要问什么叫做凹多边形？先要知道什么叫做简单多边形？

对于平面内的一个多边形，如果它的所有顶点互不相同，没有一个顶点在多边形的边上，且任何两边均无公共内点，这样的多边形叫做简单多边形．

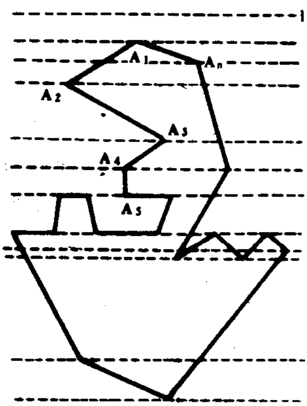


图 1-9

简单多边形的特证是，把该平面内不属于这多边形边上的点分成两部分，即多边形的内部和外部．

如果平面内的一个简单多边形位在它的某一边所在直线的两侧，这样的多边形叫做凹多边形．

定理 2 任何一个给定的凹 n 边形（$n \geq 4$）都能剖分成直角三角形．

[简证] 图 1-9 的 $A_1A_2\cdots A_n$ 是任何一个给定的凹 n 边形，设直线 l 与凹 n 边形不相交，过 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 分别作 l 的平行线，设有 k 条，因为有的可能重合，故 $3 \leq k \leq n$．因

此凹 n 边形的 n 个顶点都在 k 条平行线上，而每相邻两条与凹 n 边形的边(或边的一部分)构成若干个三角形、梯形、平行四边形．也就是说，这 k 条平行线把凹 n 边形分为若干个三角形、梯形、平行四边形．而每一个三角形、梯形、平行四边形都可以剖分成直角三角形．由此可得，任何一个给定的凹 n 边形都能剖分成直角三角形．

例 5　用定理 2 的方法把图 1-10 中的凹四边形及凹六边形剖分成直角三角形．

[**简解**]　如图 1-10 所示．

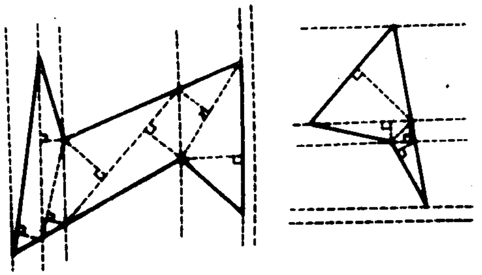


图 1-10

定理 2 是利用 k 条平行线来证的，这个方法对其他的多边形亦适用．除了这种方法外，还可以用别的方法去证．

例 6　任找三种不同的剖分，把图 1-11 中的凹五边形剖分成直角三角形．

[**简解**]　如图 1-11 所示．

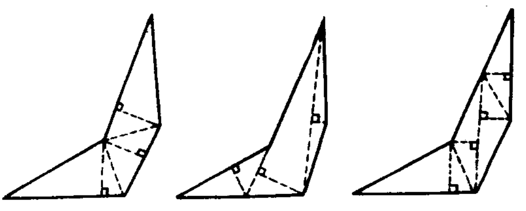
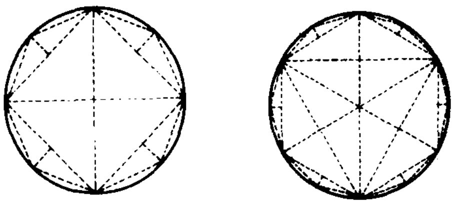


图 1-11

4. 圆的剖分

我们知道，当边数不断增加时，圆内接正多边形就越来越接近于圆. 图 1-12(1)(2) 分别说明了，当圆内接正多边形的边数成倍地增加时，按图中的方法可以把圆剖分成无穷多个直角三角形.



(1)　　　　(2)

图 1-12

从一定意义上说，“剖分”和“拼合”是一个问题的两个侧面. 一个图形剖分成直角三角形，这些剖分出来的直角三角形就能拼合这个图形，反之亦然. 通过前面的叙述，已足以说明直角三角形是组成 n 边形和圆的基本“元素”，n 边形和圆的大量数学问题，直接地或间接地与直角三角形有关. 人们要问：直角三角形为什么有这么好的特性呢？这就要看直角三角形自身的结构了. 直角三角形的自身结构表明：直角三角形的两条直角边是“支撑”斜边的“横梁”和“立柱”. 对于一个复杂的平面 n 边形来说，如果在实际问题中，需要“支撑”的话，最好的办法就是在所有的斜边上架起纵横交错的“横梁”

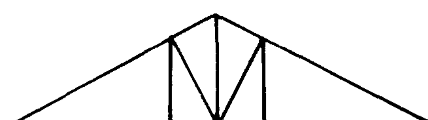


图 1-13