世界数学名著

〔英〕L.霍格本 著

大众数学

上册

DAZHONG SHUXUE

大 众 数 学

上 册

〔英〕L·霍格本 著
李心灿 杨禄荣 徐 兵
郑梅春 盛一兴 陈典铠 合译
吴 满
陆启韶 王日爽 校

科学普及出版社

内 容 提 要

《大众数学》是英国数学家兼科学史家L·霍格本的优秀数学著作，从第一版问世至今虽已半个世纪，但它仍以独特的风格受到各国读者的推崇与欢迎。我们根据美国1971年的版本全部译出该书，分上、下两册出版。

该书从历史发展的角度，以浅显易懂的语言，从人类历史 生产与生活对数学各分支的发生发展关系上进行讲解，笔法生动流畅，读来妙趣横生。最适宜作为广大读者自修数学的入门书。

L. Hogben
MATHEMATICS FOR THE]
W. W. NORTON & COMPANY. I[illegible] ork

大 众 数 学

上 册

〔英〕L·霍格本 著
李心灿 杨禄荣 徐[illegible]
郑梅春 盛一兴 陈典[illegible]
吴[illegible]满

科学普及出版社出版（北京海淀区[illegible]号）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京怀柔平义分印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32 印张：10.25 字数：27[illegible]千字
1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷
印数：1—9,000 册 定价：1.95元
统一书号：13051·1479 本社书号：1158

前　　言

光阴荏苒，似水流年，从我第一次写完《大众数学》原稿，距今已过三十三个春秋．对于能有机会重写本书，对前版进行修订并补进新的内容，我感到很欣慰．

由于时间紧迫，所以如果没有我的朋友、科学学士特伦斯·贝利斯先生（Mr. Terence Baylis）的帮助，我是无法完成这项任务的．在书稿送往出版社之前，他帮助我审核了打字稿，在付印之后又帮我校对了样书．谨此对他表示衷心感谢．

戴维·伍德科克先生（Mr. David Woodcock）重新绘制了本版的全部插图；格林尼斯·金柏小姐（Miss GLenys Kimber）打印了全书的誊清稿，我也在此一并致谢．

朗赛洛得·霍格本

译 者 的 话

英国L·霍格本著的这部《大众数学》，自1936年9月第一版问世以来，就受到了广大读者的欢迎与推崇，成为一部畅销的数学书：在第一版发行的同年年底就连续印刷了6次，到1949年就先后印刷了19次；本书于1937年传到美国，仅从1937年到1971年就先后出过四版，共印刷了47次；据我们了解本书还相继被译成多种文字，堪称一本世界数学名著．

著名的法国数学家傅立叶曾经说过："数学的主要目的是大众的需要和对自然现象的解释．""对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉．"作者在第一版序言中提到写此书的动机时说，现在学校课堂里讲数学，太抽象化、过于注重逻辑推理和方法上的论证，因而使世界上许多聪明人腻烦了，对数学失去了兴趣，这是很遗憾的、很不应该的．因此作者从历史发展的观点，以日常生活中最浅显易懂的语言，对数学上有关分支的产生、发展与人类历史、生产和生活的发展之间的关系进行讲解，使那些对数学曾失去兴趣的人重新产生兴趣，使更多过去没有机会系统地学习数学的人了解数学，…….我们认为，从上述观点来看，这部书是写得成功的、有特色的．本书作者以其渊博的学识和生动的语言，从最古老的记数方法开始，一直讲到近代广泛应用的微积分和概率论等，是很值得推荐的．我们相信，在校的同学们看了这部书，将会使他们对数学增添更多的兴致；数学老师们看了这部书，将有助于他们把有关的数学内容讲得更生动有趣；而对于过去没有机会系统地学习数学的人们来说，这部书更是一部难得的自学读物．因此，我们把它翻译出来介绍给我国读者．

英国著名哲学家培根曾说过："数学是科学的大门和钥匙．"愿这部《大众数学》在我国翻译出版，能从一个侧面促进我国有更

多的人了解数学，进而努力去掌握这把通向科学大门的钥匙。

这部译著是根据作者在1968年修改后的第四版版本译出的，在翻译过程中，我们还更正了原文中一些明显的错误，在个别处我们还加了“译者注”。

我们诚恳地感谢我院陆启韶、王日爽二同志和中国科普出版社颜实同志，在审校译稿和编辑工作中所付出的辛勤劳动。

由于我们水平有限，翻译中欠妥和谬误之处在所难免，请读者批评指正。

译　者

1984 年夏于北京航空学院

目　录

下　册　目　录

绪　论

阿齐里斯和乌龟的寓言

法国大革命前，有位非常著名的知识启蒙学家叫狄德罗（Diderot），他是百科全书的编纂人，一位唯物论者．有段故事说他曾在俄国朝廷里居住过，由于他有善辩的才能，所以享有很高的声誉．当时，沙皇怕臣民们对自己的忠诚产生动摇，就请来当时最有名的数学家欧拉（Euler），让他和狄德罗在大庭广众之下进行辩论．当狄德罗奉旨进宫时，只知道有位数学家已经证明了上帝的存在，但并不知道和他辩论的对手是谁．辩论开始后，欧拉当着满朝的文武官员，以严厉的语气对狄德罗说了下面一句话：$\left[\frac{a+b^n}{n}=x\right.$, donc Dieu existe repondez!$\left.\right]$．狄德罗不太懂数学，代数对他来说就象阿拉伯语那样难懂．很遗憾，正是由于狄德罗不懂数学，才使他陷入困境．当时，如果他能懂得：我们使用的普通语言是用来描述周围世界中的各类事物的，而代数只不过是用来描述事物的大小、数量时所使用的另一种语言，那他就可向欧拉提出要求，把前半句译成法文．这句话的意思是："将b自乘n次，加上a，再除以n后所得到的是x，所以上帝是存在的，你还有什么话好说呢！"．假如狄德罗当时让欧拉把他的前半句话再加以说明，以便使俄国朝廷中的官员了解得更清楚些，那么欧拉可能回答："如果a是1，b是2，n是3，则x等于3；如果a是3，b也是3，n是4，则x等于21；等等"．这样一来，当朝廷中的人们想对此代数式有更清楚的理解，而提出前半句话和后半句话之间有什么必然的联系时，势必使欧拉陷入困境．

这样，故事可能就是另一种结局了．可惜，狄德罗和我们之中许多不懂数学的人一样，一遇到叙述大小的代数语言就怯场了．于是，他只好在一片讥笑声中仓皇退场，从此闭门不出，最后雇了一个保镖，匆匆回法国去了．

在狄德罗时代，人们的生活和幸福取决于宗教信仰，现在则不再如此．目前，各国政府机构掌握了许多有关人民的统计数字，人民的生活与幸福在更大程度上依赖于对这些统计数字所做的解释，这是大多数人所没有领悟到的．利用原子能时需要计算，而这种计算既可以是为战争的计算，也可以是为造福人类的计算；耗费巨资的征服外层空间的计划要依靠广泛的数学智能手段，如果没有一定的数学知识，我们就没有科学地谈论人类未来的任何语言．

我们时时刻刻都是生活在数学的海洋之中：烹调食谱、火车时刻表、失业统计、罚款、捐税、战争公债、超时工作表、行车速度限制、滚球评分、赌注，打弹子球记分、热量、婴儿体重测量、雨量、日照时间、赛车记录、电费、煤气表的读数、银行的利率、运费，死亡率、贴现、利息、彩卷、波长和轮胎压力等等的计量都是数字．每天晚上，当一个人在给表上弦时，这位现代人所摆弄着的精巧的科学仪器是亚历山大鼎盛时期最聪明的匠人都未曾想象过的．这一切事情现在对我们来说已是很平常的了．但我们往往忽略这样的事实：在做这些事情的时候，我们已经掌握了古代即使对于最伟大的数学家来说也是极为困难的方法．比例、极限和加速度等，这些曾被古代极少数天才数学家们认为是隐约模糊、难以领会的概念已不再是空洞的抽象的概念了，它们已出现在我们生活中的每一个领域里．

今天，当我们着手追溯古代文明的发展历程时，不难发现，对于那些曾使古代十分聪明的数学家绞尽脑汁的各种问题，我们都能很容易地找到答案，这并不是由于你、我都非常聪明，而只是因为我们已经继承了人类社会的文化遗产．这种遗产是古人的智慧所无法得到的，是受社会物质力量的影响而发展起来的．由

此可见，不管怎样的聪明才智也有其社会局限性．下面举一个例子就能清楚地加以说明．

伊里亚特（Eleatic）的哲学家齐诺(Zeno)曾提出一些谜题给他的同时代的人猜，其中有一个最经常被人引用的就是阿齐里斯(Achilles)（古希腊一位善跑的英雄)和乌龟的悖论．这一问题曾使初等几何学的发明者们辩论得舌焦唇燥．阿齐里斯和乌龟赛跑，他跑得比乌龟快十倍，但乌龟的起跑点靠前一百码；齐诺说，阿齐里斯跑了一百码之后到达了乌龟的起跑的地方，这时乌龟又向前跑了阿齐里斯跑过的十分之一的路程，亦即到了阿齐里斯前面十码处．当阿齐里斯跑完了这十码，乌龟又跑了阿齐里斯十分之一的路程，所以仍在他前面一码处．阿齐里斯跑完了这一码．乌龟又跑了阿齐里斯十分之一的路程，所以乌龟还是在他前面的十分之一码处．阿齐里斯跑了这十分之一码，这时乌龟又跑了十分之一码的十分之一，即在阿齐里斯前面百分之一码处，阿齐里斯跑完这百分之一码，乌龟又在他的前面千分之一码处．从而，齐诺得出结论，阿齐里斯是逐渐逼近乌龟，但永远也追不上乌龟．

你不要以为齐诺以及那些参加辩论的聪明人不知道阿齐里斯终归会超过乌龟的，使他们感到困惑的是：阿齐里斯到底在什么地方正好追上乌龟？你自己也可能提出过这样的问题．然而重要的是，你的发问是出于与他们完全不同的原因．你所感到奇怪的是为什么他们会想出这种可笑的问题．确实，你真正关心的是一个历史问题．我马上可以向你们说明，这个问题对你们来说没有任何数学上的难解之处．由于历史上经历过两次文明毁灭以及两次社会大革命，使你继承与古代学者不同的社会文化．你已经知道如何用描述大小的语言来表达这个问题，所以你觉得上面的问题并不难解．古人那时感到的是数学方面的问题，而不是历史问题．他们那时还没有掌握一种能表达事物大小的语言来自由地表述这个问题．

古希腊人不懂得速度限制和旅客行李重量限制的概念，他们

认为除法问题比乘法问题要难解得多．这是因为他们是借助于象图 1 所示的那种算盘来进行计算的，所以没有办法把除法做到任意的准确程度．他们在纸上甚至连加法都做不出来．有些事情我们可以毫不费力地一看就知道结果，然而由于上面提到以及下面将要多次提到的原因，古希腊数学家却做不出来．假如我们能够把愈来愈大的东西堆在一起，只要我们不停地堆，这堆东西的增大会愈来愈快，并且没有止境．既然愈来愈大的量如果不停地加

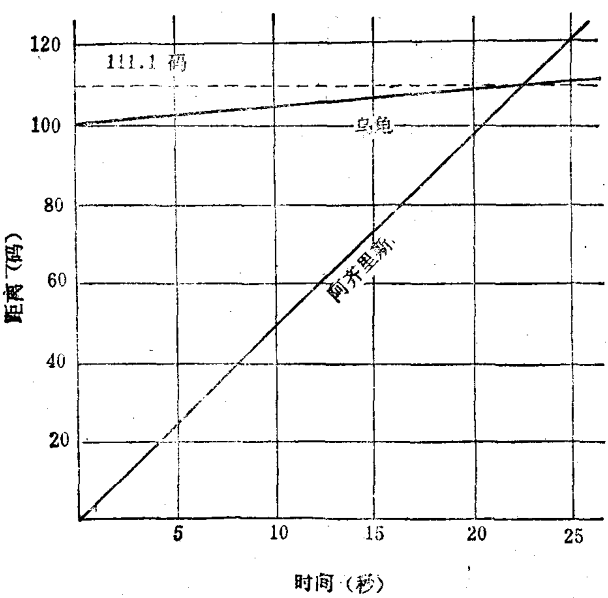

图 1 阿基里斯和乌龟赛跑

古希腊几何学没有考虑时间因素，因此无法直观地表示出阿齐里斯能超过乌龟．而牛顿时代的新几何学把时间在图示法中表示出来，从而可以显示出他们在何时何处并驾齐驱

在一起不会有止境，那么在与齐诺同时代的人看来，即使将愈来愈小的量不停地加在一起，也会是没有止境地增大．他们认为：在前一种情形下，这堆东西一直变大，而且增大得比较快；在后一种情形下，这堆东西也是一直在变大，只不过是增大的比较慢

而已．在他们那时所使用的数字语言中，尚没有什么东西可以使他们想到，当引擎的速度慢到一定的程度时，引擎便熄火了。

为了把这个问题讲清楚，让我们把其间的关系用数字表示出来：当阿齐里斯起跑以后，在整个赛跑过程中每一阶段里乌龟所跑过的距离．前面说过，在第一阶段里乌龟跑了10码，第二阶段里跑了 1 码，第三阶段里跑了十分之一码，第四阶段里跑了百分之一码．假如我们使用的数字语言和古罗马人、希腊人或希伯莱人使用的一样的话，也得用字母来表示数字．现在我们来用大家都熟悉的，并且至今仍在钟表上、坟地上和法院里使用的罗马数字来表示．乌龟在被阿齐里斯追上之前，所跑的整个路程是：

$X+1+\frac{1}{X}+\frac{1}{C}+\frac{1}{M}$，并依此类推❶。古时候，人们如果遇到了超过几千的数字就会感到很困难，所以我们在此用“依次类推”来表示．“依次类推”的内容留下了一个需要我们想象的级数尾巴(不要忘记这一点，如果动物的尾巴不断增长的话，它也许会成为动物的主要部分.)；除此而外，这种表达方法还有一个缺点，就是完全没有表达出来在这场赛跑的每一阶段上，两种距离之间有怎样的关系，现在我们则有了一种新的数字表达法，可以把这种关系表达得十分清楚．这个式子是：

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1{,}000}+\frac{1}{10{,}000}+\frac{1}{100{,}000}+\frac{1}{1{,}000{,}000}+\cdots$$

这里的“…”是为了省事而用的，并不是因为我们找不到合适的数字来表示．上述这些数字符号是人们从印度人那里学来的，而印度人是在齐诺和欧几里得逝世后很久才学会使用这些数字符号的．新教徒的宗教改革是一场社会革命，它给人们带来了学校，并使这种数字符号成为人类的共同财富．另一次社会大变动，即

❶ 罗马人当时没有这种表示分数的写法，我们这样写的目的只是为了更好地说明问题。

法国大革命，教给了人们另一种经过改革的记数法．这种新的记数法已成为人类文化宝库中的一部分，并为每一位普通人所共享，这要归功于十九世纪所制订的教育法案．现在让我们用这种新的记数法，亦即十进小数记数法，将上述总和写出来：

$$10+1+0.1+0.01+0.001+0.0001+0.00001+\cdots$$

这种写法提醒我们，它还可以写成更简单形式：

$$11.\ 11\ 11\ 11\cdots$$

或更简便的写法：

$$11.\dot{1}$$

我们都知道，$0.\dot{1}$ 这个数代表一个比$\frac{2}{10}$小，比$\frac{1}{10}$大的量．假如我们没有忘记在学校里学过的算术，便会知道 $0.\dot{1}$ 就是$\frac{1}{9}$．这也就是说，对于 $0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots$，我们所取的项数越多，其和便越接近$\frac{1}{9}$，但永远也不会比$\frac{1}{9}$大．因此，当阿齐里斯追上乌龟时，乌龟总共跑了 $11\frac{1}{9}$码，再也不会大过这个距离了．现在，你总该明白，为什么我们前面说过，今天这个问题在数学上已不再成为困难了．现在我们已经掌握了一种表示数字的方法，用这种方法可以把古人用复杂文字所描述的那种可能性表述出来．数学家称这种可能性为一个无穷级数收敛于某一个极限值．通俗地讲，如果你办得到，可不停地把愈来愈小的量往上堆，你将得到这样一堆，他的大小不会因为你再加上一些而变得更大些．

古代的数学家们，当他们遇到无限分割过程，或者遇到现代数学家们称之为无穷级数、极限、超越数、无理量等问题时，他们曾感到极大的困难；这是一个极好的例子，它正好说明这样一个真理：人类知识发展史是一个由低级走向高级的过程．历史上一些聪明人之所以能创造智力成果，正是因为他们从人们的普通知识中汲取力量，当达到一定程度之后，再聪明的人也无法超越

他们所受到的社会文化的局限；当聪明人孤芳自赏，并以此自负时，我们倒该怀疑他们究竟有多聪明了. 在将要进行的数学研究中，我们会发现，每当一个民族的文化和人类日常生活脱节时，那么这种文化就将完全变成有闲阶级的玩物，变成统治阶级的权术. 这种文化的结局，将象所有统治阶级的权术一样，最后已不再是科学，而成为迷信. 这种以脱离人民大众生活为荣的文化和忽视教育的巨大社会作用的现象，不但是愚蠢的，而且是极其有害的，是知识进步的坟墓. 任何一个社会，至少在我们当今这样高度发达的有组织的社会里，如果只有少数人掌握社会的命运，那将不是一个安全的社会. 数学家们和普通人必须相辅相成，互相促进.

远在英国尚未建成公立学校制度之前，有一位叫柯柏(Cobbett)的人，在他向工人们讲述英语语法的重要性时，曾说过这样一段话，今天，我们可以把这段话应用到数学上. 他给一个正在做工的男孩儿写了一些谈到英语语法的信，在第一封信里，他写道：

“可是，我亲爱的孩子，为了寻求这方面的知识，要有一种动力. 虽然我们随时都感觉到这一点，而现在应该更强烈地感觉到它的重要性，我所指的是，每一个人，尤其是每个青年人，都应有效地维护国家的权利和自由. 当你以后读到保卫人民自由的英国宪法历史时，……你会发现，口诛笔伐是残暴的统治者最害怕的武器. 当被长期囚禁、被严刑拷打，最后被放逐的威廉·颇耐(Willian Prynne)重获自由的时候，从南汉普顿(Southampton)到伦敦的一路上撒满了鲜花，人们欣喜若狂地去欢迎他；然后他控告使国家蒙受灾难的残酷暴君，审判他们，最后把他们送上了断头台. 看到了这些壮举，你的心里及每个青年人的心里一定会充满喜悦. 不过你要牢记在心里的是，如果威廉·颇耐不懂语法，他就不可能完成这些事，也不能使他自己誉满天下.”

我们在一开头讲述的古希腊关于阿齐里斯和乌龟赛跑的悖

论，实际上是提出一个药方，它能专治内心惧怕数学公式的毛病。而柯柏的上述一段话则是另一个药方．从开发智能角度，如果我们不认为数学比做外语语法练习更难的话，学习起来就会容易些．本书的开头就是这样写的，这也许会有助于克服困难．亚历山大时期（大约公元前三百年）的欧几里得撰写的数学论文，给以后的数学教学笼罩上了深深的阴影．数学被作为一种神秘的东西留传后世，这主要归咎于古希腊雅典的哲学家柏拉图（Plato，大约在公元前 380 年）．古希腊城邦的有闲阶级把几何学作为一种游戏，就象我们今天玩填字谜游戏和下棋一样．柏拉图说过，几何学是人类在闲暇时间里所应致力的最高尚的游戏．因而，在欧洲的早期教育中，几何学便成了古典经院教学中的一部分，甚至看不出它与其同时代的狄拉克（Drake）的测量学之间有些什么明显的联系．那时，教欧几里得几何学的人都不知道它的社会用途．一代代的学生们都学习欧几里得几何学，但却没有人告诉他们，稍晚一些在亚历山大繁忙的生活中出现的几何学，已经在欧几里得几何的基础上有了发展，可以用于测量周围世界的大小了．这些测量工作使得异教徒的万神殿得以大规模地兴建，它也照亮了发现新大陆的伟大航程．我们所说的哥伦布的信仰，其根源就是要去探明地球表面上究竟还有多少地方尚未被人们所发现．

柏拉图将数学抬高成为一种庄严而神秘的仪式，其根源是人类尚处于迷信和无知的蒙昧时期．那时，连最聪明的人也不知道“13 是质数”与“13 是个不吉祥的数”这两种说法有什么区别．结果大部分人被迷信所束缚，被引入怪诞愚昧之途．柏拉图对教育的影响是给数学罩上了一层神秘的面纱，从而使毕达哥拉斯学派有种种奇怪的行会活动．其成员如果将数学的奥秘公布于世就要被处死；而今天这些数学的“奥秘”都已印在教科书上了．既然神秘的面纱已使数学变得索然无味，那也就不会引起任何人的关心．柏拉图的伟大成就是他发明了一种“宗教”，使那些与当时社会环境不相协调的人得到一种感情上的满足；这些人聪明过人，

个性强烈，不肯到浅浮的“万物有灵”学说中去寻求精神寄托.

远在亚里士多德（Aristole）简要地写下希腊科学的状况的三个世纪之前，那些最早提出原子学说，研究磁石特性，注意观察摩擦琥珀所产生的现象，解剖动物或将植物分类的人，他们的好奇心已否定了自然界或常见的事物均有人的属性的看法．柏拉图通过发明“主宰一切”的世界，把万物有灵学说摆到无法用实验来检验的境地．这个“主宰一切”的世界只有上帝才了解它；而我们所能认识的“真实”世界只是它的影子．在这个真实世界中，语言和数字符号被魔术般地神秘化，使他们和分辨与描述野兽和树木等具体事物相脱离．

柏拉图的著作《计时学》（Timaeus）是一部令人费解的怪诞的诗集，他竟然把这种符号魔术也寓于其中．在这本书中的“土”不是我们在其上建筑房屋的那种坚实土地，而是等边三角形．“水”不是我们作为饮料的水，而是直角三角形．“火”也不是在火灾中遇到的火，却是等腰三角形．“空气”并非打进轮胎里的空气，而成了钝角三角形（见图 2）．最令人难以置信的莫过于他用球体几何学去说明人的起源．柏拉图说，上帝仿照宇宙的球形特点，创造了我们现在叫做“头颅”的部分，并赋予它两个神圣的方向．“为了使头颅不会在高低不平的地面翻滚，并能跨越各种障碍”，上帝给它装上“身体作为运载工具，因此身体是长形的，并联结着四肢……”．

把头脑奉为至高无上的这种学说深受那些脱离实际的知识分子们的欢迎．因此，尽管年轻人已经不再将柏拉图对理想社会的大胆设计奉为教条了，但他奇特的形而上学的哲学思想仍然影响着教育，这就不足为奇了．根据柏拉图的教育制度，只能让那些认为理论至上的人去教数学；如果让这些人去教别的课程，他们就会在社会实践面前到处碰壁．柏拉图的理论排斥了只是把符号当成从事社会实践工具的思想健康的人们，而吸引了那些想用符号去逃避现实的人．后一种人认为，在现实世界中人们所寻求的真理是微不足道的，而在他们所追求的“真正”世界中，真理是自明的．

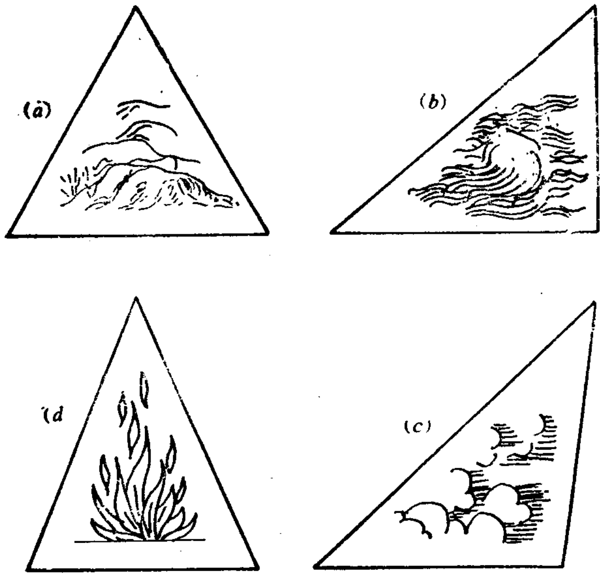

图 2 柏拉图从其先辈继承了几何学排除了它在测量中的应用，却保持了原始迷信内容

在柏拉图的“真实”世界中，万物只有形而无质：

(*a*) 等边三角形是土；(*b*) 直角三角形是水；(*c*) 钝角三角形是空气；(*d*) 等腰三角形是火

大概就是出于这种原因，数学家们也乐于同毕达哥拉斯学派一样，把数学奉为神秘的东西．但是，对于绝大多数普通人来说，他们的“真正”世界的完美性是不现实的．普通人所生活的是一个既有奋斗也有失败，既有探索也有失误的世界．但在数学的世界中，只要你习惯之后，一切都被认为是理所当然的了．然而却很少有人向我们说明这一点：数学上的一个论证要达到“理所当然”的境界，人类可能要经过上千年的努力．古代只有少数僧侣懂得数学．如果你是庙宇里的僧侣，那你当然知道尼罗河水位计的工作原理；假如你是世俗百姓，那就一定要先找到连接庙宇和大河之间的地下水道，才能弄清楚僧侣们是如何知道尼罗河水的涨落的．同样地，与宗教、魔术相混杂的教育方法妨碍着人们看清人