

硬化材料的 轴对称塑性平面 应力问题的研究

李 敏 华 著

科 学 出 版 社

硬化材料的 轴对称塑性平面 应力问题的研究

李 敏 华 著

科 学 出 版 社

1960

內 容 簡 介

本书是綜合作者以前对于旋轉盘、圓孔薄圓板及圓形薄膜等的軸对称塑性平面应力問題的研究結果，給出了关于这一組問題的根据形变理論的准确解，并考虑瞬时尺寸。由于所选择的参数和引进了一个任意常数，使解法简化，避免了逐次趋近法。用这方法得到了根据二种材料的应力应变曲綫及理想塑性材料的計算結果，并进一步使圓孔薄圓板及旋轉盘的解部分地綫性化，得到了一般性的結果，即“材料的应力应变曲綫对于这两問題的主应力比值分布和比例应变分布的影响很小，而对于比例应力分布的影响則大”。这不但說明了形变理論可以应用在这两問題，并且可以利用这些一般性的結果推出了一个很簡單而相当准确的近似解，并将这近似解应用在徑向不均匀材料的旋轉盘上。文中并包括了旋轉盘的計算和实验結果的比較，以及塑性应变集中和理想塑性材料解的討論。

硬化材料的軸对称塑性平面 应力問題的研究

李 敏 华 著

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

1960 年 7 月 第 一 版

书号：2223 字数：96,000

1960 年 7 月 第一次印刷

开本：787×1092 1/16

(京) 0901-6,000

印张：5

定价：0.72 元

符 号

本文应用下列各符号

A, B, C, D, E 和 F	方程的系数, 是 α 、 γ 和 r 的函数
a	圓孔的原有半径
b	旋轉盘、圓孔薄圓板或圓形薄膜的原有外半径
c	圓板的原有外半径, 比半径 a 大得很多
G, H, J, L	α 的三角函数的函数
h	旋轉盘, 薄板或薄膜的瞬时厚度
h_0	旋轉盘, 薄板或薄膜的原有厚度
K_1, K_2	任意的載荷常数
k	任意常数
m	和材料硬化有关的参数
n	材料机械性能和載荷的参数
p	薄膜所受的压力
r	径向坐标
s	弧长
u	径向位移
w	薄膜沿对称軸方向的位移
z	对称軸方向坐标
α	和主应力比值和主应变比值有关的参数
γ	八面体面的剪应变
ϵ	对数应变 (或称自然应变), 元素的瞬时长度和原有长度的比值的对数
θ	极角
ρ	密度 (单位体积的质量)
σ	单位瞬时面积上所受的法綫方向的力
τ	八面体面剪应力
ω	旋轉盘的角速度

在半径 b 处

在半径 c 处

在中心处(无孔物体)或在孔边(圆孔物体)

主軸方向

軸对称物体的主軸方向, 分别表示半径方向、切綫方向及对称

軸方向

目 录

符号	iii
引言	1
I. 塑性基本方程	3
II. 軸对称平面应力問題(旋轉盘、圓孔薄圓板和圓形薄膜)的方程和解法	8
2.1 用主应力和主应变表示的平衡方程和协调方程	9
(a) 旋轉盘(9), (b) 圓孔薄圓板和圓孔无限板(11), (c) 受压力的圓形薄膜(12)	
2.2 参变数 α 和 r	14
2.3 用 α 和 r 表示的平衡方程和协调方程	16
2.4 边界条件	18
2.5 任意常数 k 和任意载荷常数 K	19
2.6 計算步驟	20
III. 旋轉盘、圓孔薄圓板和圓形薄膜的計算結果和討論	22
3.1 材料和载荷的选择	22
3.2 在不同载荷下的主应力的比值	24
3.3 材料和载荷对比例应力和比例应变的影响	30
3.4 圓孔旋轉盘計算結果	35
3.5 塑性的和弹性的应力分布、应变分布的比較	39
IV. 圓孔薄圓板的一般性結果以及綫性化解和近似解	43
4.1 方程的綫性化以及反映材料机械性能和载荷的参数 n	43
4.2 綫性化解的計算步驟, 結果和参数 n 的准确性	47
4.3 材料应力应变曲綫和载荷对于圓孔薄圓板解的影响	50
4.4 近似解法和理想塑性的应用問題的討論	55
4.5 塑性应力集中因数和应变集中因数	58
V. 旋轉盘的一般性結果以及部分綫性化解和近似解	60
5.1 方程的部分綫性化以及反映材料机械性能和载荷的参数 n	60
5.2 部分綫性化解和参数 n 的准确性	62
5.3 材料应力应变曲綫和载荷对于旋轉盘解的影响以及近似解法	66
5.4 圓孔旋轉盘的比例应变分布的計算結果和实验結果的比較	69
5.5 旋轉盘的轉速	71

VI. 直接从材料应力应变曲线决定旋转盘的转速和最大应变的近似关系以及 和实验的比较.....	73
6.1 直接从材料应力应变曲线决定旋转盘的转速.....	73
6.2 计算结果和实验结果的比较.....	76
VII. 径向非均匀材料的旋转盘的解法.....	80
参考文献.....	82

引 言

本文是綜合作者在 1950 年前后关于旋轉盘、圓孔薄圓板、圓形薄膜和徑向非均匀材料的旋轉盘等問題在硬化区大塑性应变下的研究結果^{[1-5]*}。这几个問題同属于軸对称平面应力問題,可以用同一方法来处理,并且有共同特点,因此作为一組問題来討論。叙述的次序大致按照原工作进展的次序。这样对于初参加塑性应力分析和应变分析工作的青年讀者可以比較方便,因为青年同志常常会提出“为什么会想到用这一应力函数?”“为什么会想到用这一参数?”等一类的問題。按原有次序叙述,可以避免这类問題的产生。另外,也是为了青年讀者的方便,对于本文所应用的塑性形变理論^[6-9]在 I 中作了比較詳細的叙述。

近代工业和航空事业的迅速发展,促使塑性应力分析和应变分析問題迅速发展。但是由于塑性变形的不可逆性、塑性应力应变关系理論的复杂性和描述問題的微分方程的非綫性等,使問題的解变成非常困难,并且不能应用迭加原理。大部塑性变形問題的解都是近似的,少数比較准确的解的計算又很复杂,一般須采用逐次趋近法或試解法和逐次趋近法的組合。因此对于塑性变形問題中的应力和应变方面的情况和特点了解得很少,而这些情况的了解又有助于今后所需要解决的很多的塑性变形問題的簡單而又比較准确的近似解的获得。同时,准确解本身可以給出問題的准确的解答并可用来决定其它的近似解的准确程度。

本文 II 中給出了这三个問題的根据塑性形变理論的准确解;求解时应用材料实际的应力应变曲綫和考虑了由于大变形所引起的尺寸的改变,也就是应力和应变中采用瞬时尺寸。由于解法簡單,增加了計算多种情况的可能性。在 III 中进行了两种硬化特性很不相同的材料(因康鎳 X 和 16-25-6)在不同載荷下的計算。首先用計算結果校核塑性形变理論的条件^[8,10]是否滿足。这条件是,在加载过程中物体內各点的主应力或主应变的方向和比值保持不变。这种加载过程簡称为比例加载或簡單加载。在肯定了形变理論的条件是滿足后,也就是肯定計算結果是准确后,对于計算結果进行了分析。特別注意共同特点,例如不同材料不同載荷下的各主应力比值分布曲綫,比例应变^{**})和比例应力^{**})分布曲綫等。另外对于塑性应力分布应变分布和弹性应力分布应变分布进行了比較,并着重的討論了塑性应变集中問題。

*) 方括号內的数字是指本文末的参考文献。

**) 比例应变和比例应力是物体內各点的应变和应力分別除以其中的最大应变和最大应力。

塑性变形問題,由于应力应变曲線的非綫性和塑性大应变所引起的非綫性关系,描述問題的方程成为非綫性微分方程。在不同載荷下的应力分布或应变分布,一般讲来,不成比例。要得到某一材料在某一載荷的解需要根据該材料的应力应变曲線和該載荷的数值进行計算。如果要希望能像大部分的弹性变形問題那样的,在不同載荷下,甚至不同材料的各应力分布和各应变分布都分別成比例的这种可能性不大。但是不同材料不同載荷的解中的一部分关系成比例或接近于比例的可能性还是有的。这种比例关系的获得将使解法大大簡化,因为可以从这种比例关系很簡單地得到全部解答。从Ⅲ中的三个問題的根据形变理論的准确解的計算結果来看,这种可能性是存在的。計算結果表明,两种硬化特性很不相同的材料,在不同載荷下的各主应力比值分布曲線和各比例应变分布曲線分別地都很接近。因此在Ⅳ和Ⅴ中分別將圓孔薄圓板和旋轉盘的方程部分綫性化,得出反映材料应力应变曲線和載荷的参数,并对于大部分工程材料的旋轉盘和圓孔薄圓板的主应力比值、比例应变和比例应力等分布进行了分析和討論。根据分析結果,又給出了近似解法,并将圓孔旋轉盘的比例应变分布和华尔(Wahl)等^[11]的實驗結果作了比較。

在Ⅳ和Ⅴ中还进行了理想塑性材料的应力分布和应变分布的計算。从計算結果的比較和結合前面的分析結果討論了理想塑性材料解所得到的应力分布和应变分布的准确性,以及在什么情况下适合于应用的問題。本文并将依留欣^[12](Ильюшин)对于一般性問題所提出的在小应变下得到比例加載的应力状态的条件和本文对于旋轉盘和圓孔薄圓板在大应变下的比例加載的条件作了比較和討論。

应用Ⅴ所得到的旋轉盘的比例应变分布的特点,在Ⅵ中得到了直接从材料的应力应变曲線和轉盘中最大应变計算旋轉盤轉速的近似方程,并供給了图表,使轉速数值可以直接从图上曲線上查得。計算得到的近似轉速数值和荷莫司(Holms)等^[13]的實驗結果进行了比較。

应用同一特点,即比例应变的特点,可以将Ⅴ中所給的近似解法应用到非均匀材料的塑性变形問題。在Ⅶ中給出了径向非均匀材料的旋轉盘的解和計算結果,并討論了非均匀分布对轉速的影响。

本文所考虑的这三个問題在工程上也都具有实用价值。旋轉盘与許多机械的轉动部分有关,例如燃气輪机的轉盘。对于这一問題,很多的学者进行了并且繼續进行着实验和理論的研究。圓孔薄圓板是一个可以用来进行塑性应力集中和应变集中理論研究的最簡單的問題,但是有难于进行实验的缺点,塑性应变集中和应力集中对于机械零件和結構零件的开始破坏有很大影响。受压力的圓形薄膜的研究結果可以直接应用到安全圓膜的設計,同时可以帮助了解受压力薄容器的塑性变形的情况。

I. 塑性基本方程

塑性的应力应变关系比较复杂,主要因为塑性变形是不可逆的过程,在一般情况下,塑性应变和应变率不只受应力的影响而且受加载过程的影响;不同应力状态下的屈伏和继续屈伏决定于屈伏函数;以及塑性应变、应变率和应力之间存在着非线性的关系等等。在目前室温下的塑性应力应变关系的理论虽然比较成熟,但也仍在发展中。这方面的理论很多,有些理论很复杂,难以应用;有些理论比较简单,但有应用范围的限制。因此在进行具体问题的应力分析和应变分析时,不但由于塑性应力应变关系的复杂而使问题的解答复杂,并且在选择所应用的理论时还要考虑到是否适合。

本文应用了纳达依 (Nadai)^[7,8] 的考虑大塑性变形的形变理论。这理论是从勒维 (Levy)^[15a]-米塞司 (von Mises)^[15b] 的理论推导得来的。米塞司假定材料在屈伏后是不可压缩的,即

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0, \quad (1)$$

也就是忽略了塑性变形开始后应变中的弹性应变部份。所考虑的材料是理想塑性材料,就是在塑性变形的过程中屈伏函数是常数。他提出了下列的屈伏条件:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \text{常数}. \quad (2)$$

勒维-米塞司并假定在塑性变形下物体內某一点的应变增量的各分量和它相对应的应力偏量的各分量成同一比例,他们所提出的应力应变关系是:

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x &= (d\mu)s_x, & (x, y, z)^{*}), \\ \frac{d\gamma_{yz}}{2} &= (d\mu)\tau_{yz}, & (x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

方程(3)中, s_x, s_y 和 s_z 是应力偏量,

$$s_x = \sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (x, y, z),$$

$d\mu$ 是一比例数,对于物体內的某一点的应力和应变增量的各分量来讲, $d\mu$ 是一个常数,但是对于物体內的各不同点来讲, $d\mu$ 是一个变数。将方程(3)代入屈伏条件,可以得到

$$d\mu = \frac{\sqrt{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2}}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}.$$

*). 括弧中的 x, y, z , 是指括弧左旁的方程对 x, y, z 轮换可以得到其它的二个方程。

納达依引进了大应变概念,他把路特維克等所提出的大应变下某一短时间内的应变的增加量加以积分,得到大应变概念下的应变 ϵ ,

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln(1 + \epsilon).$$

这方程所给出的应变只在某些条件下才有意义,在本节末将再加以讨论,方程中 l 和 l_0 分别代表瞬时和原有长度. 根据材料的塑性不可压缩性,在大应变概念下也可以得到和方程(1)类似的关系^[8],即

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0. \quad (1a)$$

对于米塞司的屈伏函数,方程(2),納达依给出了一个物理意义^{*)}. 他提出在八面体面上的主应力等于平均法应力,而平均法应力对于材料屈伏的影响不大,因此八面体面上的剪应力 τ_8 可以用来衡量屈伏,也就是可以用作为屈伏函数

$$\tau_8 = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (2a)$$

方程(2a)等号右边的函数和米塞司的屈伏函数类似,只是乘以不同的常数. 納达依考虑的材料是硬化材料,因此 τ_8 的数值随材料的硬化而增加.

納达依将米塞司的应力应变关系在加载过程应变增量的分量成比例

$$d\epsilon_1 : d\epsilon_2 : d\epsilon_3 = c_1 : c_2 : c_3 \quad (4a)$$

和初始的应变分量都等于零

$$(\epsilon_1)_0 = (\epsilon_2)_0 = (\epsilon_3)_0 = 0 \quad (4b)$$

的情况下进行积分. 在这情况下 $d\mu$ 的分子成为常数乘以 $d\epsilon_1$, 因此方程(3)的等号两边可以分别积分,得到

$$\epsilon_1 = \frac{1}{3} \frac{\gamma_8}{\tau_8} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \quad (3a)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{3} \frac{\gamma_8}{\tau_8} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right], \quad (3b)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{3} \frac{\gamma_8}{\tau_8} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right], \quad (3c)$$

方程中 γ_8 是八面体面的剪应变, 在方程(4a)和(4b)所给条件下, γ_8 可由下列方程表达:

$$\gamma_8 = \frac{2}{3} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (2b)$$

^{*)} 汗蓋 (Hencky) 在1924年给出了米塞司的屈伏条件的一个物理意义,即弹性的形状改变的能量决定材料的屈伏.

对于任一材料, τ_s 和 γ_s 有一定的关系, 即

$$\gamma_s = \gamma_s(\tau_s)$$

或

$$\tau_s = \tau_s(\gamma_s), \quad (2c)$$

材料的 τ_s - γ_s 曲线可以在简单的应力状态下从实验得到, 普通应用简单拉伸的实验数据。

方程 (3a), (3b), (3c) 和 (2b) 都是在方程 (4a) 和 (4b) 所给的条件下得来的。这条件, 如果用文字来表达, 那就是在加载过程中主应变的方向保持不变和主应变的数值成比例的增加。这种加载过程简称为比例加载或简单加载。

根据纳达依的理论, 在简单加载的条件下, 塑性应力和应变要满足方程 (1a), (2a), (2b), (2c), (3a), (3b) 和 (3c)。方程 (3a), (3b) 和 (3c) 中的常数 $1/3$ 是从方程 (2a) 和 (2b) 决定的, 因此当方程 (2a), (2b) 和方程 (3a), (3b), (3c) 同时应用时, (2a) 和 (2b) 中只有一个方程是独立方程。同时方程 (3a), (3b) 和 (3c) 自动的满足方程 (1a) 中的关系, 所以方程 (1a), (3a), (3b) 和 (3c) 中只有三个是独立方程。

对于轴对称平面应力问题, 上列方程简化为

$$\tau_s = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5a)$$

$$\gamma_s = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} (\epsilon_r^2 + \epsilon_r \epsilon_\theta + \epsilon_\theta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5b)$$

$$\tau_s = \tau_s(\gamma_s), \quad (2c)$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{3} \frac{\gamma_s}{\tau_s} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right), \quad (6a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{3} \frac{\gamma_s}{\tau_s} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right), \quad (6b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{3} \frac{\gamma_s}{\tau_s} \left[-\frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta) \right] = -(\epsilon_r + \epsilon_\theta), \quad (6c)$$

$$\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = 0, \quad (1b)$$

从方程 (6a) 和 (6b) 可以写成用主应变来表示的主应力的关系如下:

$$\sigma_r = 2 \frac{\tau_s}{\gamma_s} (2\epsilon_r + \epsilon_\theta), \quad (7a)$$

$$\sigma_\theta = 2 \frac{\tau_s}{\gamma_s} (2\epsilon_\theta + \epsilon_r). \quad (7b)$$

其次要討論大应变概念的应变的定义。本文所考虑的問題都受到相当大的載荷,所产生的应变到达硬化区的大应变,因此需要采用大应变概念,即应力和应变中需用瞬时尺寸。在大应变概念下,应力等于力被瞬时面积除;瞬时而增加的应变等于同时間内增加的长度除以瞬时长度,

$$\delta \epsilon_i = \frac{\delta l_i}{l_i},$$

方程中 l_i 是沿着任何一个主軸方向的微小綫元素的瞬时长度,它的原有长度等于 $(l_i)_0$ 。由于塑性变形是一个不可逆的过程,在塑性变形的过程中,物体内的任意一点的应变状态是决定于該点的应力状态和到达該应力状态所采取的路径。但是对于主应力的方向和主应力的比值不变的路径,已有实验証明([16—18]以及其它)八面体面上的剪应力和剪应变的关系(τ 和 γ 的关系); 八面体面上的剪应变的数值;以及主应变的数值都可以用初始的和到达的应力状态来定的。所以 $\delta \epsilon_i$ 可以作为 ϵ_i 的增量,积分后得到

$$\epsilon_i = \ln \left[\frac{l_i}{(l_i)_0} \right] \quad \text{或} \quad e^{\epsilon_i} = \frac{l_i}{(l_i)_0}, \quad (8)$$

方程(8)所代表的应变只有在“主应变的方向和主应变的比值在加载过程中保持不变”的情况下才有意义,也就是只有在简单加载下才有意义。这和形变理論的条件相同,因此当形变理論可以应用时,方程(8)所表达的应变 ϵ 也能应用。

对于形变理論应用的条件依留欣曾着重地提出并加以詳細的討論^[19]。在[12]中,依留欣証明了在小塑性变形时,当各載荷成比例的增加,同时材料的应力强度 σ_e 是应变强度 ϵ_e 的指数函数(即 $\sigma_e = A' \epsilon_e^m$, A' 和 m 为常数),則物体內各点的主应力的方向及主应力的比值在加载过程中保持不变,也就是形变理論的条件得到满足而可以应用。布拉格(Prager)^[19] 和朱克(Drucker)^[20] 亦分別提出并討論了形变理論的条件。且維司(Davis, E. A.)^[16], 奧司哥特(Osgood)^[17], 馬理因(Marin)^[13] 和其他研究工作者进行了很多的薄管試驗。他們的試驗是对薄管同时加拉力和內压或同时加拉力和扭轉,并且在加载过程保持主应力的方向和比值不变。这样就可以得到各种应力状态在比例加载下的应力应变的实验曲线。这些薄管試驗証明了形变理論,当它的条件满足时,可以給出相当好的結果。

在比較后期的薄管試驗中,如法郎哥尔(Fraenkel)^[21], 且維司(Davis, H. A.)和派克(Parker)^[22], 浮貝尔(Faupel)和馬理因^[23], 布地楊斯基(Budiansky)等^[24]和儒考夫(Жуков)^[25] 等,在加载过程(沒有減載)中使主应力的比值或主应力的方向和主应力的比值作了相当大的改变,实验的結果証明了形变理論在这种情况下所引起

的誤差也不很大。因此,在加载过程中主应力的方向和比值改变不大的情况下,形变理論所給出的結果也还相当可靠。

本文所考虑的問題是軸对称的問題。由于軸对称的緣故,在加载过程中主应力的方向,即主軸方向,保持不变。主应变的比值和主应力的比值在加载过程中的改变也可能不大。因此应用了形变理論来解这一組的問題,再从得到結果来討論形变理論是否能应用在这一組問題上,也就是討論所得的結果是否可靠。

II. 軸对称平面应力問題(旋轉盘、圓孔薄圓板 和圓形薄膜)的方程和解法

• 旋轉盘、圓孔薄圓板(或圓孔无限板)和圓形薄膜,一般講来,它們的厚度和它們的半径相比是很小的。作用于旋轉盘和圓孔薄圓板的力都分別平行于盘和板的平面并且沿着厚度均匀分布(图 1 和 2)。在这样的情况下应力分量 σ_z , τ_{rz} 和 $\tau_{\theta z}$ 都等于零,其中 z 軸是通过中心垂直于盘和板的平面的軸, r 和 θ 是在盘和板的平面的极坐标。至于圓形薄膜,在变形前 z 軸是通过薄膜的中心垂直于薄膜平面的軸,在受有压力而产生塑性变形后,薄膜的各点产生了很大的位移,除了薄膜中心部分的微小元素由于軸对称的緣故,仍然垂直于 z 軸外,其它的微小元素和垂直于 z 軸的平面成 ϕ 角如图 3 所示。虽然在塑性变形的情况下,整个的薄膜已不在同一平面内,而且压力是垂直于薄膜的每一小元素。但如果我們用 σ_θ 和 σ_r 分別代表变形过程中作用于薄膜每一小元素的切向应力和在小元素平面内的另一法应力,它的水平分应力是沿着半径方向(參看图 3(b)和 3(c)),同时因为薄膜很薄,它的抗弯曲应力和抗剪切应力比較它的抗拉伸应力小得很多,可以忽略,那么它的应力状态仍然仅由 σ_θ , σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 来描述,而其它的应力分量都等于零。所以这三个問題都属于平面应力問題,并且这三个問題都是軸对称的,也就是应力分量只是 r 的函数而不是 θ 的函数。

在本文所包括的研究工作进行以前,这三个問題已有很多学者进行了实验和理論的研究。对于理想塑性材料的旋轉盘和圓孔薄圓板問題納达依^[26]及納达依和唐納尔(Donnell)^[27],在 1929 年分別得到了解。密林生(Millenson)和曼生(Manson)^[28],在 1948 年,用試解法和逐次趋近法給出了部分塑性的旋轉盘的解,用弹性的应力分布和应变分布作为第一次近似数值。麦克格瑞格(MacGregor)等^[13],在 1948 年,进行了高速旋轉盘的实验研究,他們并量了旋轉盘停止轉动后的塑性应变(对数应变)的分布。荷莫司等^[13],在 1948 年,进行了旋轉盘的破裂試驗,他們假定材料性質仍和弹性区一样来计算轉盘中心在破裂时的应力。关于受压的圓形薄膜問題薩克司(Sachs)等^[29,30]和其他学者进行过很多試驗。葛莱萃尔(Gleyzal)^[31]得到硬化材料小塑性应变的受压圓形薄膜的解法,并将計算結果和实验結果进行了比較。葛莱萃尔用逐次趋近法,所取的第一次近似数值相当合理,并应用了曲綫組图使計算进行时塑性应力

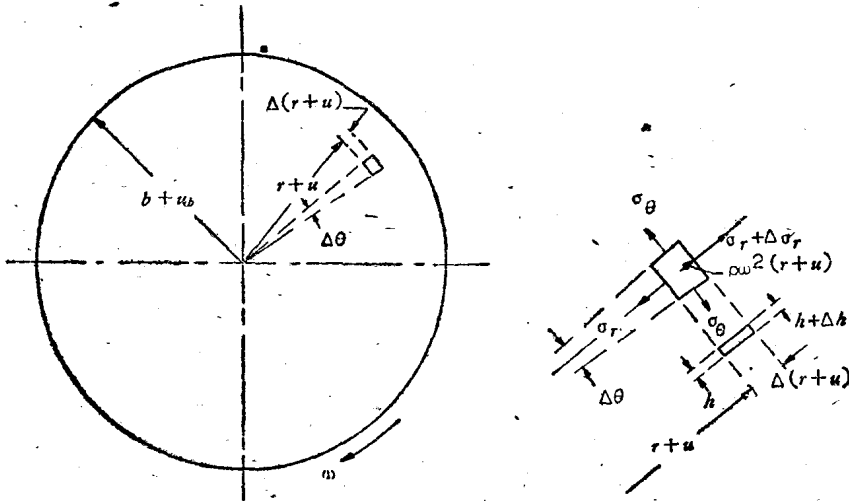
应变关系能够得到满足。苏联在这方面也进行了很多工作。

葛莱萃尔的圆形薄膜的解法以及密林生和曼生的旋转盘的解法都需用逐次趋近法, 计算很复杂, 特别是后者。这两解中都考虑硬化材料和小塑性变形, 都应用了塑性形变理论, 但对于形变理论的条件是否满足没有讨论。本节考虑硬化材料和采用大塑性应变概念。解法中首先将平衡、协调、塑性应力应变关系和屈伏函数等方程, 在引用了参数 α 之后, 简化为两个非线性的联立微分方程, 包括一个自变数和二个因变数。之后又引进了一个任意常数 k 和包括 k 的任意载荷常数。这样能避免了应用逐次趋近法的麻烦, 用数值积分直接得到结果。

2.1 用主应力和主应变表示的平衡方程和协调方程

(a) 旋转盘

考虑一外径等于 b , 厚度等于 h_0 的旋转盘如图 1(a) 所示。它绕着对称轴 z 轴旋转, 角速度为 ω 。图 1(b) 表示该旋转盘转动时在 $(r+u)$ 处的一个微小元素, 由 $r\Delta\theta$ 及 $\Delta(r+u)$ 构成。在 $(r+u)$ 和 $[r+u+\Delta(r+u)]$ 处的厚度分别是 h 和 $(h+\Delta h)$ 。在开始转动前这元素是在 r 处, 由 $r\Delta\theta$ 及 Δr 构成, 厚度是 h_0 。作用在这微小元素的各力亦在图 1(b) 中表示出来。



(a) 角速度等于 ω 时的旋转盘。

(b) 小元素在转动时的瞬时尺寸和所受的应力。

图 1 在角速度等于 ω 时的旋转盘和从转盘中取出的小元素。

综合作用在这微小元素上的沿着 r 方向的力, 得到下列的沿着旋转盘半径 r 方向的平衡方程

$$\sigma_r(r+u)h\Delta\theta - (\sigma_r + \Delta\sigma_r)[r+u+\Delta(r+u)]\Delta\theta(h+\Delta h) +$$

$$+ 2\sigma_\theta[\Delta(r+u)]\left(h + \frac{1}{2}\Delta h\right)\sin\frac{\Delta\theta}{2} - \\ - \omega^2\left[r+u+\frac{1}{2}\Delta(r+u)\right]\frac{\rho\pi[(r+\Delta r)^2-r^2]\Delta\theta}{2\pi}h_0=0$$

方程中 h_0 是原有厚度, h 是瞬时厚度, ρ 是单位体积的质量. 当 $\Delta(r+u)$ 趋于零为极限时, 上列的平衡方程成为

$$(r+u)\frac{d(\sigma_r h)}{d(r+u)} = (\sigma_\theta - \sigma_r)h - \rho\omega^2 r^2 h_0 \frac{r+u}{r} \frac{dr}{d(r+u)}. \quad (9)$$

应用大应变概念的应变的定义(方程(8)), 从微小元素的原有尺寸和瞬时尺寸可以得到下列的用位移来表示的应变:

$$\epsilon_r = \ln \frac{d(r+u)}{dr},$$

$$\epsilon_\theta = \ln \frac{r+u}{r},$$

$$\epsilon_z = \ln \frac{h}{h_0},$$

或可写作

$$e^{\epsilon_r} = \frac{d(r+u)}{dr}, \quad (10a)$$

$$e^{\epsilon_\theta} = \frac{r+u}{r}, \quad (10b)$$

$$e^{\epsilon_z} = \frac{h}{h_0}. \quad (10c)$$

综合旋转盘的平衡方程, 方程(9); 应变位移关系, 方程(10a), (10b), (10c) 和塑性应力应变关系, 方程(1b), (2c), (5a) (或(5b)), (6a) 和(6b). 共有九个独立方程和九个未知数 σ_r , σ_θ , ϵ_r , ϵ_θ , ϵ_z , $\gamma^{(s)}$, $\tau^{(s)}$, h 和 u .

将方程(10b)对 r 微分, 然后和方程(10a)组合, 得到下列的协调方程:

$$r \frac{d\epsilon_\theta}{dr} = e^{(\epsilon_r - \epsilon_\theta)} - 1. \quad (11)$$

再用方程(10a), (10b) 和(10c) 消去平衡方程(9)中的未知数 u 和 h , 得到

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \frac{d\epsilon_z}{dr} = (\sigma_\theta - \sigma_r) e^{(\epsilon_r - \epsilon_\theta)} - \rho\omega^2 r^2 e^{(-\epsilon_z)}, \quad (12)$$

这样九个独立方程和九个未知数减少到七个独立方程, 方程(1b), (2c), (5b), (6a), (6b), (11) 和(12), 和七个未知数 σ_r , σ_θ , ϵ_r , ϵ_θ , ϵ_z , τ 和 γ .

* 为了简便起见, 在以后的文中用 τ 和 γ 替代 τ_s 和 γ_s .