江西省高等院校《工科数学》系列教材

线性代数习题精选

第二版

XIANXING DAISHU XITI JINGXUAN

主　编　朱传喜　刘二根
主　审　孙弘安

江西高校出版社

江西省高等院校《工科数学》系列教材

线性代数习题精选

第二版

主　编　朱传喜　刘二根
主　审　孙弘安

江西高校出版社

线性代数习题精选（第二版）

主编　朱传喜　刘二根

江西高校出版社

（江西省南昌市洪都北大道96号）

邮编：330046　电话：(0791)8512093，8504319

各地新华书店经销

江西恒达科贸有限公司照排部照排

南昌市光华印刷厂印刷

1999年12月第2版　1999年12月第1次印刷

850mm×1168mm　1/32　4.375印张　117千字

印数：1～8100册

定价：6.50元

ISBN 7-81033-516-2/O·21

（江西高校版图书如有印刷、装订错误，请随时向承印厂调换）

前　言

本书是按照全国工科数学课程教学指导委员会提出的“数学课程教学基本要求”(线性代数部分)编写的，它通过对行列式、n 维向量、矩阵、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等内容的 113 道典型例题进行分析和求解，揭示了线性代数的解题方法与技巧．每章之后还精选了一份目标检测题作为自我检查之用．本书是高等工科院校各专业学生学习《线性代数》课程的复习辅导书，它是对教材内容的一种补充和深化，对解题能力的培养会起到很好的作用．

本书第一版于 1995 年出版，经历了几年的教学实践．现根据在教学实践中积累的经验，以及使用本书的同行们所提宝贵意见，在保持原来基本框架的基础上对部分内容作了修改，成为本书第二版．参加本书编写的有高文明(第一章)、徐义红(第二章)、刘二根(第三章)、邱淑芳(第四章)、邓毅雄(第五章)、韦金石(第六章)；由朱传喜、刘二根对全书进行统稿，孙弘安审定．

由于编者水平有限，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

1999 年 5 月

目　录

第一章　行列式

例题选讲

例 1　写出下列行列式中元素 a_{11},a_{23},a_{33} 的余子式及代数余子式．

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix};\quad (2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

［解］ (1) 元素 a_{11},a_{23},a_{33} 的余子式为：

$$M_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix},M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix},M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

相应的代数余子式为：

$$A_{11}=M_{11},\quad A_{23}=-M_{23},\quad A_{33}=M_{33}.$$

(2) 元素 a_{11},a_{23},a_{33} 的余子式为：

$$M_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & -2 \end{vmatrix},M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix},$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix}.$$

相应的代数余子式为：

$$A_{11}=M_{11},\quad A_{23}=-M_{23},\quad A_{33}=M_{33}.$$

例 2　用定义计算下面的行列式，然后再按第一列和第三行分

别展开，把第一列或第三行的元素分别乘以相应的代数余子式再相加，比较所得到的值与行列式的值是否相同．

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

［解］　由定义按第一行展开：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times(-1) - 2\times 2 + 3\times 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

按第一列展开：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \\ &\quad \times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times(-1) + 0 + (-1)\times 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

按第三行展开：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times 1 + 2 + (-1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

比较得这三个数值均相同．

例 3　利用行列式的定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

［解］ (1) 由定义按第一行展开：

原式

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} - a^2 \begin{vmatrix} b & b^3 \\ c & c^3 \end{vmatrix} + a^3 \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= a(b^2c^3 - b^3c^2) - a^2(bc^3 - b^3c) + a^3(bc^2 - b^2c)$$

$$= abc(c-a)(c-b)(b-a).$$

(2) 由定义按第一行多次展开：

$$原式 = 1 \times (-1)^{1+(n-1)} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= (-1)^n \times 2 \times (-1)^{1+n-2} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 4 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^{n+(n-1)+\cdots+3} \times (n-2)! \times \begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n+3)(n-2)/2} \cdot n!.$$

例 4 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x-1 & 2x-1\\ 1 & x-2 & 3x-2\\ 1 & x-3 & 4x-3\end{vmatrix}$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

［分析］ 要证 $f'(\xi)=0,\xi\in(0,1)$，可用罗尔中值定理先证 $f(0)=f(1)$.

［证］ $f(x)$ 关于 x 的二次多项式，在 $[0,1]$ 中可导，且

$$f(0)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ 1 & -3 & -3\end{vmatrix}=0,$$

$$f(1)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

由罗尔中值定理，知存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

例 5 设 $\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 2\\ 1 & \lambda-2 & 3\\ 2 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$，求 λ 的值．

［分析］ 可先将行列式化简，再求出 λ 之值．

［解］ 将行列式的第二列和第三列加到第一列，得

$$\begin{vmatrix}\lambda+2 & 1 & 2\\ \lambda+2 & \lambda-2 & 3\\ \lambda+2 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=0,$$

即
$$(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & \lambda-2 & 3\\ 1 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=0,$$

解得 $\lambda_1=-2$.

再看 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & \lambda-2 & 3\\ 1 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$，将第二行、第三行依次减第一行，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0,$$

即$(\lambda - 3)(\lambda - 5) - 2 = 0$,

解 $\lambda^2 - 8\lambda + 13 = 0$ 得 $\lambda_2 = 4 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 4 - \sqrt{3}$.

因此,λ 有三个值,分别为 $-2, 4 + \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}$.

例 6 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

[分析] 观察这个行列式,有没有可以使计算简化的特点.如果找不到这样的特点,可以用下面的基本方法.

[解法 1] (用性质)

$$原式 \overset{\text{行}}{\xlongequal[r_4 - r_1]{r_3 + 2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 + (-3)r_2]{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 + 2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 \times (-1) \times (-31) = 31.$$

[解法 2] (用性质及按行展开的公式)

$$\text{原式} \xlongequal[c_4+c_2]{} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

依一行(列)元为0

$$\xlongequal[\text{行展开}]{\text{按第三}} 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 31.$$

［解法 3］（按第三行展开）

$$\text{原式} = \underset{a_{32}}{1} \times (-1)^{\overset{3+2}{5}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ \underset{a_{34}}{(-1)} \times (-1)^{\overset{3+4}{7}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 31.$$

例 7　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}.$$

［分析］　这个行列式的元素 $a_{ij} = a_i - b_j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 因此可用第一行将其余各行中的 $b_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 化去．

［解］　将第一行乘以 -1 加到其他各行上去，得

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & a_2 - a_1 \\ a_3 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_3 - a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - a_1 & a_n - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{cases} a_1-b_1, & \text{当 } n=1, \\ (a_1-a_2)(b_1-b_2), & \text{当 } n=2, \\ 0, & \text{当 } n\geqslant 3. \end{cases}$$

例 8 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

[分析] 这个行列式有一个重要特点，即每行(列)有一个元素为 a，一个元素为 b，而其余元素均为 0，因此可考虑用展开定理计算.

[解] 将行列式按第一列展开，得

$$\text{原式} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= a\cdot a^{n-1}+(-1)^{n+1}b\cdot b^{n-1} = a^n+(-1)^{n-1}b^n.$$

注：此题尚可用行列式定义计算(读者自行考虑). 读者不仅要掌握并熟悉按某一行或某一列展开并计算行列式的方法，还要知道行列式展开式中各项的结构，并由此计算出行列式的值 .

例 9 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}，其中 a_1a_2\cdots a_n \neq 0.$$

［分析］ a_0的余子式是一对角行列式，因此可用a_0将它所在行（列）中位于它之后（下）的元素统统化为零．

［解］ 将第 i 行$(i = 2,3,\cdots,n+1)$乘以$-\dfrac{1}{a_{i-1}}$加到第一行，得

$$原式 = \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}).$$

注：用行列式的性质，将行列式化为三角形行列式来计算，这是计算行列式最常用的方法，读者一定要熟练掌握．

例 10　计算下列 n 阶行列式

$$(1)\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix};$$

$$(2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

[分析]　这两个行列式都有特点：各行元素之和相同，且各列的大部分元素相同，因此可以考虑下面大家熟知的解法．

[解]　(1) 将各列加到第一列，提出公因子，然后各行减去第一行，可得：

$$原式=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

(2) 将各列加到第一列,提出公因子,再从第 n 行开始,依次减前一行,可得:

$$原式 = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$\xlongequal[(i=2,\cdots,n-1)]{r_i - r_1} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$\xlongequal{c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-2} + c_{n-1}}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot n^{n-2}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^{n-1} \cdot \frac{n+1}{2}.$$

例 11 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}.$$

［分析］ 这个行列式下面的 $n-1$ 行大部分元素相同，所以有可能在下面的 $n-2$ 行中变出一些零．问题是如何得到尽可能多的零．

［解］ 从第二行开始，以后各行都减去第 n 行；然后从第二列开始，以后各列都加到最后一列，再按第一列展开得：(设 $n \geqslant 2$)

$$
\text{原式}=\begin{vmatrix}
\lambda & a & a & \cdots & a & a \\
0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\
0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\
b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\lambda & a & a & \cdots & a & (n-1)a \\
0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\
b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta
\end{vmatrix}
$$

$$
=\lambda\begin{vmatrix}
\alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\
\beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta
\end{vmatrix}
$$

$$
+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}
a & a & \cdots & a & (n-1)a \\
\alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
=\lambda(\alpha-\beta)^{(n-2)}[\alpha+(n-2)\beta]
$$

$$
+(-1)^{(n+1)}(-1)^{n}(n-1)ab(\alpha-\beta)^{n-2}
$$

$$
=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab].
$$

例 12 利用范德蒙行列式计算