

□ 李寿佛/著

刚性微分方程 算法理论

□ Li Shoufu

□ THEORY OF COMPUTATIONAL
METHODS FOR STIFF
DIFFERENTIAL EQUATIONS

□ 湖南科学技术出版社

□ 李寿佛/著

刚性微分方程 算法理论

THEORY OF COMPUTATIONAL METHODS
FOR STIFF DIFFERENTIAL EQUATIONS

□ 湖南科学技术出版社

刚性微分方程算法理论

著 者：李寿佛

责任编辑：陈一心

出版发行：湖南科学技术出版社

社 址：长沙市展览馆路 11 号

印 刷：湖南省新华印刷二厂

厂 址：邵阳市双坡岭

邮 编：422001

(印装质量问题请直接与本厂联系)

经 销：湖南省新华书店

出版日期：1997 年 1 月第 1 版第 1 次

开 本：850mm×1168mm 1/32

印 张：15.5

插 页：4

字 数：390,000

印 数：1—600

征订期号：地科 215—1

书 号：ISBN 7—5357—2146—X/O · 157

定 价：32.00 元

(版权所有·翻印必究)

序 言

本书作者是我所知道的最优秀的一位教师。他以朴实的学风和严谨的治学态度教诲、熏陶和造就了一批优秀学生，包括一些杰出的人才，为我国教育事业作出了卓越的贡献。他不仅在教书育人方面卓有成就，且长期致力于科研攻坚。凭着扎实的数学基本功，在科研上取得了系统、丰厚的成果。本书正是这些科研成果的总结。

本书详细论述了刚性微分方程数值方法研究领域的各种理论及其应用，其中包括作者近年主要进行的 B-稳定性、B-收敛性和代数稳定性等方面的研究工作。这些工作从三个方面推进了目前国际上最新的研究水平：(i) 提出更适合于非线性刚性问题的各种定义、概念，如弱 B-稳定性和 BH-相容性等，并建立了相应的理论；(ii) 突破当前国际上仅研究单步方法 B-理论的局限，将其推进到一般多值方法的研究；(iii) 将研究工作从有限维空间推进到 Hilbert 空间，甚至更一般的 Banach 空间。作者在以上三方面及其他方面的许多重要进展，丰富了刚性微分方程研究领域的知识，统一了国际上已有的许多成果，为非线性刚性问题研究提供了最一般的理论框架，为进一步的研究工作开创了途径。

由于“国际领先”、“国际先进”之类的形容词滥用太多、太俗，所以我不想借用这些词汇，但从以上描述足可看到本书在国际上应占有的席地。相信本书的出版将有助于广大读者了解这一重要研究领域的全貌和现状，并促进其进一步发展。

林 群

1997 年元月 9 日

前言

刚性微分方程常出现于航空、航天、热核反应、自动控制、电子网络及化学动力学等一系列与国防和现代化建设紧密相关的高科技领域，具有无容置疑的重要性。偏微分方程初边值问题关于空间变量离散化而转化为大规模常微分方程组是产生刚性的另一个重要源泉。

刚性问题的早期文献主要致力于算法的线性稳定性，或即基于标量线性模型方程 $y' = \lambda y$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) 的数值稳定性研究。相关的理论概念有 A -稳定 (Dahlquist, 1963)、 $A(\alpha)$ -稳定 (Widlund, 1967) 及 stiff 稳定 (Gear, 1969) 等。这些基于线性模型方程的理论和概念尽管从实用的观点来说无疑是合理和必要的，且已成功地用于指导各种更为复杂的实际问题的数值求解，但从严格的数学意义来说，它们只适用于常系数线性自治系统，不能作为一般的非线性刚性问题算法的稳定性理论基础。而且，早期文献几乎完全忽略了刚性问题算法的收敛性分析，这可能是由于当时误认为良好的稳定性加上经典相容性和经典相容阶就足以描述方法的整体误差性态。直至 1974 年，Prothero 和 Robinson 首次尖锐地指出了算法的经典误差估计由于受刚性问题巨大问题参数的影响而严重失真，产生阶降低现象，人们才认识到经典收敛理论不适用于非线性刚性问题及线性稳定性理论的不足。为了填补这块巨大理论空白，1975 年，Dahlquist 和 Butcher 首创了“非线性稳

定性分析”。1975至1979年, Butcher 和 Burrage 建立了 Runge-Kutta 方法的 B -稳定及代数稳定理论. 1981至1985年, Frank、Schneid 和 Ueberhuber 建立了 Runge-Kutta 方法的 B -收敛理论. B -稳定与 B -收敛理论统称为 B -理论, 它是近二十年来常微分方程数值解法研究领域的巨大成就之一, 是刚性问题算法理论的突破性进展, 标志着刚性问题研究从线性向非线性情形深入发展. 然而, 正如 Auzinger、Frank 和 Kirlinger 近年多次指出的那样, Runge-Kutta 法的基于单边 Lipschitz 常数和内积范数的 B -理论仍存在亟需改进的严重缺点, 尽管相对于经典理论来说是重大进展, 但还远没有达到定量收敛分析的理想目标. 为此, 1992年, 上述作者就一类非自治弱非线性刚性初值问题对现有 Runge-Kutta 法的 B -理论作了某些进一步的推广.

为了克服 Runge-Kutta 方法的局限, 近年人们的注意越来越多地转向远为广泛的一般多值方法. 后者是一个如此浩瀚的方法类, 它包括 Runge-Kutta 法、线性多步法、单支方法、循环方法、分块方法、混合方法、各种常用预校算法及大量迄今尚未探明的新算法, 因而被称为算法之海洋. 1980年, Burrage 和 Butcher 建立了一般多值方法的代数稳定准则, 1987年, 李寿佛建立弱代数稳定准则. 1988年, 李寿佛就 Hilbert 空间中刚性问题的一般多值方法建立了 B -理论, 1990年, 将该理论进一步推广到 Banach 空间及非线性一般多值方法, 并引进了初值问题的“示性参数”这一重要概念, 从而突破了单边 Lipschitz 常数和内积范数的局限. 这一新理论的建立, 为非线性刚性微分方程研究开辟了新的广阔途径. 以新理论为指针, 近年来, 李寿佛、黄乘明、肖爱国等人获得了关于单支及线性多步方法、多步多导数方法、多步 Runge-Kutta 方法及多步混合方法的一系列 B -收敛结果, 并构造了一系列高阶 B -收敛的多级多步方法.

本书主要目的是系统总结作者及其课题组在刚性微分方程研究领域的理论成果及其应用, 同时力图对国内、外该领域的研究作比较全面系统的介绍. 第一章阐述刚性微分方程概念及有关基

本知识. 第二、三两章讨论数值方法的经典收敛性和线性稳定性, 其中包括国际上一些著名工作, 如 Merson 和 Butcher 等人关于阶条件的树结构理论, Wanner、Hairer 和 Nørsett 的阶星形理论等, 同时也包括作者及其课题组的工作, 如稳定程度理论, 泛函微分方程 $(A, B, \mathcal{D})$ -方法的收敛理论等. 在阐述一般理论的同时, 注意到结合实际分析和评估一些已有的著名算法和推荐新的高效算法, 如 Curtiss、Hirschfelder 和 Gear 等人倡导的向后微分公式、Cash 的广义向后微分公式、Enright 方法、积分型 Runge-Kutta 法、单隐式及对角隐式 Runge-Kutta 法等, 同时也包括作者及其课题组的工作, 如降阶向后微分公式、高收缩二阶导数方法及高收缩混合方法、并行多步 Runge-Kutta 预校算法、并行 Adams 预校算法及刚性问题的并行多步混合方法等. 最后两章专门讨论非线性刚性问题. 鉴于国外专家——尤其是 Butcher、Burrage、Frank、Auzinger、Hundsdorfer 等人的论文及 Butcher、Dekker 和 Verwer、Hairer 和 Wanner 等人的专著已在这方面对 Runge-Kutta 法作了透彻分析, 我们不打算再单独介绍 Runge-Kutta 法, 而是把它作为远为广泛的一般多值方法的特例. 我们将在这两章专门论述抽象空间中非线性刚性问题一般多值方法的代数稳定性和 B -理论, 它是作者及其课题组近年在该领域研究工作的总结, 其中包括了作者许多尚未发表的最新成果.

本书是国内外第一本系统论述一般多值方法 B -理论的专著, 具有明显特色. 可供高年级大学生、研究生及从事计算数学研究的同行阅读, 希望能引起他们的兴趣, 也可供从事实际计算的工程师和技术人员参考, 希望所推荐的新算法和新技巧能对他们有所帮助. 由于作者水平有限, 时间仓促, 书中疏漏之处在所难免, 请读者指正.

本书中介绍和引用了国内外许多同行专家的论著, 没有他们的创造性劳动便不可能形成此书. 因此我深切地感谢这些同行们的支持和帮助. 本课题组的研究工作多次获得国家自然科学基金会的资助, 部分研究还得到湖南省教育委员会和北京应用物理与

计算数学研究所的资助，本书的出版得到湖南科学技术出版社的大力支持和湘潭大学计算与应用数学研究所的资助，在此一并表示感谢。特别要感谢林群院士为本书作序。感谢许多同行专家对出版本书的支持和鼓励。还要感谢肖爱国、曹学年、黄乘明、陈丽容和张诚坚博士，他们花了大量时间校核本书手稿。感谢尹小萍和张荣华女士，她们为出版本书做了许多工作。

李寿佛

1996 年 11 月 10 日于湘潭大学

目 录

第一章 引 论	(1)
§ 1.1 常微分方程	(1)
§ 1.1.1 常微分方程组初值问题	(1)
§ 1.1.2 解的存在性、唯一性和稳定性	(4)
§ 1.1.3 线性常微分方程组及矩阵预解式	(9)
§ 1.1.4 常系数线性系统及渐近稳定性	(10)
§ 1.1.5 线性差分方程	(13)
§ 1.2 刚性微分方程	(19)
§ 1.2.1 刚性微分方程的实际背景	(19)
§ 1.2.2 线性刚性问题的数学定义	(20)
§ 1.2.3 非线性刚性问题的数学定义	(22)
§ 1.2.4 刚性问题举例	(24)
第二章 数值方法经典理论	(29)
§ 2.1 一般多步方法	(29)
§ 2.2 相容性和零稳定性	(31)
§ 2.2.1 相容性和相容条件	(31)
§ 2.2.2 零稳定性与根条件	(34)
§ 2.3 收敛性	(37)
§ 2.3.1 收敛准则及整体误差估计	(37)
§ 2.3.2 收敛性与相容性的关系	(40)

§ 2.4 线性稳定性	(43)
§ 2.4.1 线性方法	(43)
§ 2.4.2 方法的稳定多项式和稳定域	(46)
§ 2.4.3 线性稳定性的适用范围	(48)
§ 2.4.4 各种常用稳定性定义	(54)
§ 2.5 稳定程度	(56)
§ 2.5.1 方法的稳定程度和 (δ, ρ) -稳定域	(57)
§ 2.5.2 差分方程解的若干表示	(59)
§ 2.5.3 稳定程度与稳定域的关系	(63)
§ 2.5.4 (δ, ρ) -稳定域的稳定程度	(64)
§ 2.5.5 用 (δ, ρ) -稳定域逼近方法的稳定域	(66)
§ 2.5.6 稳定程度大于零的条件	(68)
§ 2.5.7 稳定程度趋于零的含参多步方法	(69)
§ 2.6 一般多值方法	(76)
§ 2.6.1 一般多值方法及其不同表示	(76)
§ 2.6.2 一般线性方法	(78)
§ 2.6.3 一些基本概念	(81)
§ 2.6.4 零稳定的各种等价条件	(82)
§ 2.6.5 一般多值方法的收敛准则	(85)
§ 2.6.6 预相容及相容条件	(86)
§ 2.6.7 拟相容性及其与收敛性的关系	(89)
§ 2.6.8 一般线性方法的线性稳定性	(94)
§ 2.7 整体误差的渐近展式	(95)
§ 2.7.1 单步方法整体误差渐近展式	(95)
§ 2.7.2 伴随方法及对称方法	(98)
§ 2.7.3 仅含有偶次幂的整体误差渐近展式	(103)
§ 2.7.4 一般多值方法整体误差渐近展式	(103)
§ 2.7.5 一般多步方法整体误差渐近展式	(110)
§ 2.8 泛函微分方程的 $(A, B, \mathcal{D})$ -方法	(114)
§ 2.8.1 $(A, B, \mathcal{D})$ -方法	(114)
§ 2.8.2 相容性和零稳定性	(121)
§ 2.8.3 收敛准则	(128)
§ 2.8.4 应用举例	(132)

第三章 线性稳定性分析 (135)

§ 3.1 线性多步法及有关方法	(135)
§ 3.1.1 线性多步法稳定性分析	(135)
§ 3.1.2 向后微分公式	(152)
§ 3.1.3 向后微分公式的改进	(155)
§ 3.1.4 广义向后微分公式	(157)
§ 3.1.5 Enright 方法	(158)
§ 3.2 Runge-Kutta 法	(161)
§ 3.2.1 Runge-Kutta 法概述	(161)
§ 3.2.2 Runge-Kutta 法的阶条件	(165)
1. 带根树与标号树	(165)
2. 基本微分及微分方程解的 Taylor 展式	(168)
3. 基本权及 Runge-Kutta 解的 Taylor 展式	(171)
4. 阶条件	(174)
5. B -级数的组合	(176)
§ 3.2.3 Runge-Kutta 法稳定性分析	(180)
1. 稳定函数及其性质	(180)
2. 阶星形及其性质	(181)
3. $\exp(z)$ 的 A -可接受有理逼近	(186)
4. Padé 逼近及其性质	(188)
5. 仅含有实极点的有理逼近	(191)
6. 一类有理逼近的 A -可接受性及 L -可接受性	(192)
§ 3.2.4 基于高阶数值积分公式的隐式 Runge-Kutta 法	(194)
1. 简化条件与方法的阶	(194)
2. 简化条件的若干性质	(196)
3. 单步配置方法	(198)
4. Gauss-Legendre 方法	(199)
5. Radau I A 和 Radau II A 方法	(200)
6. Lobatto III C 方法	(202)
7. 积分型 Runge-Kutta 法稳定性分析	(204)
§ 3.2.5 单隐 Runge-Kutta 法	(207)
1. 单隐和对角隐式 Runge-Kutta 法及其最大可达阶	

.....	(207)
2. 单隐配置方法	(208)
3. 单隐变换方法	(211)
4. A -稳定和 L -稳定的单隐 Runge-Kutta 法	(215)
5. 单隐嵌入方法	(215)
6. Butcher 变换及隐式 Runge-Kutta 法的有效实现	(216)
7. 单对角隐式 Runge-Kutta 法	(218)
§ 3.3 刚性微分方程的收缩方法	(219)
§ 3.3.1 一般多步方法的收缩性	(219)
§ 3.3.2 A -收缩和 $A(\alpha)$ -收缩的二阶导数方法	(225)
§ 3.3.3 A -收缩和 $A(\alpha)$ -收缩的混合方法	(230)
§ 3.4 并行算法	(236)
§ 3.4.1 并行多步 Runge-Kutta 预校算法	(236)
§ 3.4.2 并行 Adams 预校算法	(245)
§ 3.4.3 刚性问题的并行多步混合方法	(248)
第四章 非线性稳定性分析	(255)
§ 4.1 Hilbert 空间中的试验问题	(255)
§ 4.1.1 问题类 $K_{\sigma, r}$	(256)
§ 4.1.2 试验问题的基本性质	(257)
§ 4.2 单支方法和线性多步法的稳定准则	(260)
§ 4.2.1 G -稳定性及 $G(c, p, q)$ -代数稳定性	(260)
§ 4.2.2 $G(c, p, q)$ -代数稳定准则	(261)
§ 4.2.3 单支方法与线性多步法的关系	(262)
§ 4.2.4 线性多步法的稳定准则及与单支方法比较	(263)
§ 4.2.5 稳定准则的应用	(266)
§ 4.3 Runge-Kutta 法的稳定准则	(270)
§ 4.3.1 代数稳定性及 (θ, p, q) -代数稳定性	(270)
§ 4.3.2 (θ, p, q) -代数稳定准则	(272)
§ 4.3.3 积分型 Runge-Kutta 法的代数稳定性	(276)
§ 4.4 一般线性方法的非线性稳定性	(278)

§ 4.4.1	(k, p, q) -稳定性	(280)
§ 4.4.2	(k, p, q) -弱代数稳定准则	(286)
§ 4.4.3	弱代数稳定准则的应用	(292)
§ 4.5	多步 Runge-Kutta 法的代数稳定性	(298)
§ 4.5.1	多步 Runge-Kutta 法	(299)
§ 4.5.2	代数稳定的必要充分条件	(301)
§ 4.5.3	简化条件的若干性质	(302)
§ 4.5.4	简化条件与代数稳定性	(304)
§ 4.5.5	高阶代数稳定的多步 Runge-Kutta 法及其分类	(308)
§ 4.5.6	I 至 VI 类代数稳定方法的构造	(311)
§ 4.6	Banach 空间中的试验问题	(316)
§ 4.6.1	问题类 $K(\mu, \lambda')$ 及 $K(\mu, \lambda', \delta)$	(317)
§ 4.6.2	试验问题的基本性质	(318)
§ 4.6.3	试验问题类的子类 $K1$ 、 $K2\lambda'$ 和 $K3\mu$	(320)
§ 4.6.4	Hilbert 空间情形下试验问题的性质	(320)
§ 4.6.5	试验微分方程条件估计	(323)
§ 4.7	对数矩阵范数	(325)
§ 4.7.1	对数矩阵范数及其基本性质	(326)
§ 4.7.2	最小单边 Lipschitz 常数	(327)
§ 4.7.3	基于对数矩阵范数的微分方程条件估计	(328)
§ 4.8	一类多步方法的非线性稳定性	(330)
§ 4.8.1	系数依赖于步长的多步方法	(331)
§ 4.8.2	方法关于 $K(\mu, \lambda')$ 类问题的稳定性	(331)
§ 4.8.3	方法关于 $K(\mu, \lambda', \delta)$ 类问题的稳定性	(333)
§ 4.8.4	若干推论	(335)
§ 4.9	显式及对角隐式 Runge-Kutta 法的非线性稳定性	(338)
§ 4.9.1	B_1 -稳定性及其准则	(339)
§ 4.9.2	主要结果的证明	(343)
§ 4.9.3	B_1 -稳定方法举例	(345)
§ 4.10	多步多导数方法的非线性稳定性	(351)
§ 4.10.1	问题类 $K_p^{(p)}$ 及其性质	(352)

§ 4.10.2 多步多导数法的稳定性准则	(357)
§ 4.10.3 应用举例	(360)

第五章 B -收敛理论..... (363)

§ 5.1 一般线性方法的 B -理论基础	(363)
§ 5.1.1 B -收敛概念.....	(364)
§ 5.1.2 B -相容性和 B -稳定性	(367)
§ 5.1.3 BS -稳定性和 BSI -稳定性.....	(371)
§ 5.1.4 级阶和广义级阶.....	(371)
§ 5.1.5 B -相容和 BH -相容的条件	(372)
§ 5.1.6 B -稳定和弱 B -稳定的条件	(375)
§ 5.1.7 B -收敛准则.....	(377)
§ 5.1.8 B -稳定的其他代数条件.....	(383)
§ 5.2 单支方法和线性多步法的 B -收敛性	(389)
§ 5.2.1 A -稳定等价于 B -稳定	(389)
§ 5.2.2 A -稳定单支方法的最佳 B -收敛阶	(392)
§ 5.2.3 A -稳定线性多步法的最佳 B -收敛阶	(394)
§ 5.2.4 线性多步法起始值计算的技巧.....	(400)
§ 5.3 数值方法的可行性	(402)
§ 5.3.1 一类算子方程解的存在及唯一性.....	(402)
§ 5.3.2 多级多值多导数方法的可行性.....	(408)
§ 5.3.3 多步多导数方法的可行性.....	(413)
§ 5.3.4 一般线性方法的可行性.....	(414)
§ 5.4 B -收敛的多步 Runge-Kutta 法	(417)
§ 5.4.1 多步 Runge-Kutta 法的级阶和广义级阶.....	(417)
§ 5.4.2 多步 Runge-Kutta 法的对角稳定性.....	(421)
§ 5.4.3 多步 Runge-Kutta 法的 B -收敛阶	(423)
§ 5.4.4 I 至 VI 类代数稳定多步 Runge-Kutta 法的 B -收敛性	(424)
§ 5.4.5 B -收敛多步 Runge-Kutta 法举例.....	(425)
§ 5.5 B -理论的进一步推广	(432)
§ 5.5.1 正规问题类和示性矢量.....	(433)

§ 5.5.2	B -收敛概念一般化.....	(442)
§ 5.5.3	B -相容性和 B -稳定性的推广	(444)
§ 5.5.4	B -收敛准则的推广.....	(447)
§ 5.5.5	线性刚性问题数值解的 B -收敛阶	(451)
§ 5.5.6	高阶 B -收敛的多步多导数法	(455)
参考文献		(465)

§ 1.1 常微分方程

§ 1.1.1 常微分方程组初值问题

由于高阶常微分方程组通常可化为一阶方程组来研究, 本书主要讨论一阶常微分方程组初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b, \end{cases} \quad (1.1.1a)$$

$$\begin{cases} y(a) = \eta, & \eta \in \mathbf{R}^m \end{cases} \quad (1.1.1b)$$

的数值方法, 这里 $f: D = [a, b] \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ 是给定的映射, $m \geq 1, a < b$. 第二、三章讨论数值方法的经典收敛性和线性稳定性时, 设 f 满足 Lipschitz 条件

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L \|y - z\|, \quad (t, y), (t, z) \in D, \quad (1.1.2)$$

式中 L 称为 Lipschitz 常数, 符号 $\|\cdot\|$ 表示空间 $\mathbf{R}^m$ 中任给的一种范数. 但从第四章起主要涉及非线性刚性问题, 此情形下经典 Lipschitz 常数因取巨大正值而不适用, 我们将不再用条件 (1.1.2) 而代之以单边 Lipschitz 条件 (4.1.7) 或其他更加有利于刚性问题及其数值计算中干扰分析的条件. 为方便计, 一切满足 Lipschitz 条件 (1.1.2) 的连续映射 $f: D = [a, b] \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ 所构成的集合记为 $\mathcal{F}$, 相应的初值问题 (1.1.1) 所构成的问题类记为 $\mathcal{L}$.

命题 1.1.1 设映射 $f(t, y)$ 在集合 D 上关于 y 连续可微. 则

f 在 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件, 当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上有界. 这里 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial f}{\partial y} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right]_{i,j=1,2,\dots,m}$, f_i 和 y_j 分别表示矢量 f 的第 i 分量和矢量 y 的第 j 分量.

证 不妨设矩阵范数从属于矢量范数. 如果 $\left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|$ 在 D 上有上界 M , 则对于任意的 $(t, y), (t, z) \in D$, 记 $z - y = h$, 由 Taylor 公式

$$f(t, y + h) = f(t, y) + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y + \theta h) h d\theta \quad (1.1.3)$$

易推出 Lipschitz 条件

$$\|f(t, z) - f(t, y)\| \leq M \|z - y\|.$$

反之, 设若 f 在 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件 (1.1.2), 其中 L 为任一 Lipschitz 常数, 则对于任意的 $(t, y) \in D, \epsilon > 0$ 及任何单位矢量 $e \in \mathbb{R}^m$, 记 $z = y + h, h = \epsilon e$, 由 (1.1.3) 及 (1.1.2) 得到

$$\left\| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y + \theta \epsilon e) \epsilon e d\theta \right\| = \|f(t, z) - f(t, y)\| \leq L \epsilon.$$

于上式两端除以 ϵ , 再令 $\epsilon \rightarrow +0$, 推出

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) e \right\| \leq L.$$

由于单位矢量 e 的任意性, 上式意味着

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right\| \leq L, \quad (t, y) \in D.$$

命题 1.1.1 证毕.

从命题 1.1.1 的证明过程易知下面结论真确:

命题 1.1.2 若 f 在 D 上有关于 y 的连续且有界的偏导数, 则最小 Lipschitz 常数为

$$L_{\min} = \sup_{(t, y) \in D} \left\| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right\|.$$

命题 1.1.3 (Bellman 不等式) 设 $\alpha, \beta \geq 0, \varphi(t)$ 是区间 $a \leq$