现代数学书丛

判定树理论导引

堵丁柱 著

ODERN ATHEMATICS
MM

湖南教育出版社

现代数学书丛

判定树理论导引

堵丁柱 著

湖 南 教 育 出 版 社

判定树理论导引

堵丁柱 著

责任编辑：郑绍辉

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　国防科技大学印刷厂印刷

787×1092 毫米　32 开　印数：3.625 字数：85000

1998 年 12 月第 1 次　1998 年 12 月 1 次印刷

印数：1—2000

ISBN7—5355—2600—4/G · 2595

定价 6.20 元

序

科学技术是第一生产力. 经济发展必须有科学技术的支持. 特别是进入 21 世纪后,科技的进步更将成为经济发展的主要动力. 其中基础性的创新研究,将使经济出现飞跃式的进展,这已为过去的历史所证明,并已成为全世界有识之士的共识. 对我国来说,科技兴国,已是当务之急,这些也已成为全国有识之士的共识.

数学作为一门基础学科,向来被认为是基础的基础. 数学主要研究数量关系与空间形式,也通过数量关系与空间形式而渗透到种种各别的科学领域. 一门科学的成熟程度,往往以应用数学的深入程度为一项重要衡量标志. 在进入 21 世纪时,数学如何发挥它应有的作用,以支持并促进我国科技的进步与经济的发展,乃是一项重大的课题. 为此,必须有一批优秀的跨世纪中青年数学人才作为主力,才能担负起这一重大责任. 国家为此已为青年数学家创造了种种良好的研究条件和学术环境,设立了各种特殊的基金与资助,还举办了种种类型旨在培养与选拔拔尖人才的讲习班、暑期学校与研

究班等.

早在若干年以前，在国际著名数学家陈省身教授的倡导之下，国家教委与国家基金委曾在天元基金的支持之下，乘每年暑期各大专院校休假之机，举办数学上各种专题的讲习班；此后又升级并改名为暑期学校. 第一次 1995 年在湖北襄樊地区举行，由武汉大学数学系主持其事，第二次 1996 年改在北京，由北大数学系主持，以后将转往其他地区，由一些著名的大学数学系轮流主持. 这些暑期学校都主要由国内外卓有成就的中青年数学家就当前某些有重要意义的活跃领域作系统介绍，使参加学习的来自全国各地的年轻学子能迅速了解这些领域的情况，掌握它们的方法技术，并进入科研前沿.

湖南教育出版社热心中国数学事业的发展，提出由该社组织编辑一套《现代数学》书丛，大部分暑期学校的讲稿经过适当增改后都将收入这一书丛，第一批包括三本：

1. 堵丁柱的《判定树理论导引》；

2. 石赫的《机械化数学引论》；

3. 张贤科的《代数数论导引》.

以后还将陆续分批出书，已定的有：

香港科技大学黄劲松的《李群的表示论》.

其余也在计划之中.

现试对此次出版的第一批的三本书略作介绍：

《判定树理论导引》一书的作者堵丁柱教授是我国

著名的青年数学家,他解决了美国贝尔电话公司关于电话布线有关 Steines 树精测长期悬而未决的问题，并因此而被英国大百科全书列为当年十大科技成就之一. 此书则涉及作者有着重要成就的另一领域:理论计算机科学中的计算复杂度理论. 所谓 Karp 猜想的提出者 Karp 是这一理论的主要开创者之一,它引导到迄今还成为悬案的所谓 P—NP 问题. 本书作者“将心比心”与“设身处地”深入浅出地介绍这一猜想，并如作者所希望的那样,这一猜想的解决可能会出自于阅读这本小册子的青年学子之手.

数学中的公理化演绎体系几乎是尽人皆知的，20 世纪重大发明之一的计算机,使数学面临变革而有进入一个新时代的可能，即数学的机械化. 计算机科学大师 Knuth 曾称计算机科学是一种算法的科学. 我国某些数学史家曾论证数学发展的历史过程中,公理化的演绎倾向与机械化的算法倾向往往互为消长交替成为当时数学的主流. 由于计算机的出现，为后一倾向带来了新的生命力. 丛书的第二本对于数学机械化作了较详细的介绍，作者石赫教授是中国科学院系统科学所的研究员，多年来从事这方面的研究，有过不少重要的贡献. 例如书中关于理论物理中杨振宁与 Baxter 方程组的解法，即是石赫教授自己的一项杰作,希望读者在阅读本书之后，能迅速进入这一方兴未艾的新颖领域，并作出多方面的贡献.

数论，它的研究对象始于最简单不过的整数，却有着最丰富不过的内涵. 早在古希腊时期，欧几里得的《几何原本》一书，就有专章通过素数概念以及素数积唯一分解与素数个数无限等定理创立了朴素而诱人的整数理论. 在中国古代，虽然整数的性质理论并非主要贯注所在，也有中国剩余定理这种光辉篇章，到近代的几个世纪，整数的理论往往吸引着许多伟大的数学家，诸如 Fermat，Euler，Gauss，Riemann，Jacobi，Dirichlet 等，他们的贡献使数论成为数学中最有魅力的一个分支，著名的难题如 Goldbach 问题，Fermat 大问题，以及 Riemann 猜测等，已成为数百年来许多大数学家所殚精竭虑的焦点. 在本世纪中，由于诸如编码等实际上的需要，使数论除了本身理论的优美以外，还成为解决实际问题的一种重要手段.

在本世纪中，由于数学中代数、拓扑、分析等多方面的发展对数论引进了诸多新的手段，经过数代人的努力，终于使 Fermat 大问题得到完全解决. 至于在我国，则通过华罗庚、闵嗣鹤等诸前辈的倡导，出现了一批优秀的数论专家，以陈景润等为代表，在 Goldbach 问题上作出了卓越的贡献，为国外所推崇.《代数数论导引》一书的作者张贤科是清华大学的教授，长期从事代数数论的研究，作出过不少重要的贡献. 此书从现代数学的角度介绍了代数数论的基本内容和类域论等很重要的现代理论. 国内有志于数论的青年学子，尽可通过此书

发愤学习而成才，迅速进入数论这一领域，并在21世纪中与国外学者争奇斗胜.

我们希望书丛中以后出版的著作，能对国内的青年学者，起到同样的作用.

吴文俊

1998年1月22日

前　言

这本小册子是为北京大学主办的1996年研究生数学暑期学校所写的讲义. 初稿是英文，应湖南教育出版社之约，将英文译成中文，并且结合实际教学体会，做了适当的改动. 主要的改动是增加了最后一讲.

共九讲的内容围绕着一个中心课题——关于判定树的Karp猜想. 判定树是种简单的计算模型，Karp猜想是判定树理论中一个重要科研课题，它的内容是关于图论问题的判定树计算复杂性，目前研究它的数学工具涉及置换群与组合拓扑以及不动点理论. 因此，它是处于计算机科学理论、组合数学与纯粹数学结合处的一个有趣的问题，而它的难度也许正是它的这一特点所造成的.

一个领域的难题被另一个领域的研究者轻而易举地解决，这样的事例在科学史上屡见不鲜. 虽然判定树属于理论计算机科学领域，但是作者殷切地期望这本小册子的读者群能包括喜欢纯数学的人. 事实上，作者选择材料的原则是“将心比心”与“设身处地”. 当作者读研究生时，对研究题目最感兴趣. 这本小册子不仅提供了Karp猜想这一研究题目给读者，而且详尽地讲解了启动本项研究的必要知识. 如果Karp猜想的解决者会在这本小册子的读者群中产生，那是最令作者高兴不过的事了.

作者在写作时，主要参考了张雁君博士所提供的Karp教授讲解计算复杂性课程的讲义以及作者听Lovasz教授的课所做的笔记. 作者虽非Karp与Lovasz的挂名弟子，但是受二者学术思想影响甚深，于此诚致谢意.

这本小册子中的许多习题是针对学生提出的问题而选编的. 作者对这些学生，特别是马宾表示深切的谢意.

最后，作者仍需感谢湖南教育出版社孟实华和郑绍辉编辑，如无他们的鼓励与督促，本书不会很快出版.

堵丁柱

1998年1月

目　录

第一讲　布尔函数与判定树

§1.1　布尔函数

当一个函数的变量取值范围和函数值取值范围均为二元集 $\{0,1\}$ 时，我们称这函数为**布尔函数**. 例如，$\neg x$ 是一元布尔函数，其定义如下表所示：

x	$\neg x$
0	1
1	0

我们称 $\neg$ 为**非**运算，有时也用 $\bar{x}$ 来记 $\neg x$. 再例如，$x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 是两个二元布尔函数，定义如下表所示：

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

我们称 $\vee$ 为**布尔和**，$\wedge$ 为**布尔积**. 这两种二元运算均满足交换律、结合律，并且二者之间还满足分配律，亦即

$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$
$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$
$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$
$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$
$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

有时，我们也简单地将 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 记为 $x+y$ 和 $x \cdot y$. 布尔和 $x+y$ 和布尔积 $x \cdot y$ 在开关电路中有很直观的解释：用 x 和 y 来代表两个开关. 开关断着表示变量取值为 0；开关接合表示变量取值为 1. 这时，布尔和 $x+y$ 表示开关的并联，而布尔积 $x \cdot y$ 表示开关的串联，亦即，$x+y$ 取值 1 当且仅当两开关 x 和 y 组成的并联电路接通，而 $x \cdot y$ 取值 1 当且仅当两开关 x 和 y 组成的串联电路接通（如图 1.1 所示）.

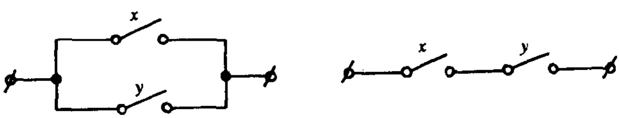

图 1.1　并联与串联

由上述解释可知，任何串并联开关电路都可以用布尔函数来表达. 例如，图 1.2 中电路可以用布尔函数 $(x+z) \cdot y$ 来描述. 这是个在工厂中常用的电路. 如果你去工厂参观学习，请注意一下机床的开关常常

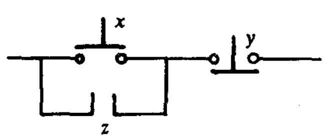

图 1.2　接触器控制电路

由红绿两个按钮组成．绿的是常开按钮，亦即图 1.2 中 x；红的是常闭按钮，亦即图 1.2 中 y．而图 1.2 中 z 是称为接触器的一种继电器的常开触头．该继电器的线圈正是由图 1.2 中的开关电路控制．要启动机床时，按下绿色按钮 x，电路接通，接触器的线圈通入电流，接触器闭合，常开触头 z 闭合．这时，即使手离开绿按钮 x 后，x 会断开，由于 z 的自锁作用，接触器仍然会处于闭合状态，使机床电路接通．要停掉机床时，按下红色按钮 y，切断了线圈的电源，接触器恢复常态，机床的电源也断开了．

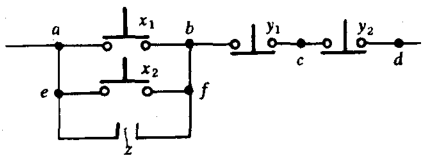

图 1.3 双开关原理图

谈到这里，禁不住使笔者想起青年时代的一段有趣经历．那时笔者跟师傅学机修钳工．一次，师傅修好机器，要电工来装配电源，以便试车．可是二个电工忙了一天也没搞完，这使笔者十分好奇，乘电工休息时，偷偷瞧了瞧原理图，原来电工遇到一个有趣的问题，这个问题的原理图如图 1.3 所示．它含有二组按钮．x_1 和 y_1 为一组绿红按钮在机器的一处，而 x_2 和 y_2 组成另一组在机器的另一处．按任何一组中绿按钮都可以启动机器，按任何一组中红按钮都可以停掉机器．按图 1.3 所示，从 x_1 和 y_1 组成的按钮开关处应引出三条线，实现三点 a、b、c 处的连接，而从 x_2 和 y_2 组成的按钮开关

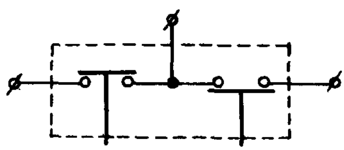

图 1.4 三线外露的按钮开关

处应该引出四条线，实现四点 c、d、e、f 处的连接. 耐人寻味的是，现实中摆在机器上的按钮开关，每组都在外面露着三根线，处于如图 1.4 所示的状态. 这该怎么连线呢？这就是电工困惑不解的有趣问题.

显然，电工需要重新设计一个具有同样功能的电路. 这个问题可以归结为布尔函数的设计问题. 设 g 是描述所求电路的布尔函数. 要使每个绿按钮都可以启动机器，g 需要满足条件

$$g|_{y_1=y_2=1} = x_1 + x_2 + z$$

要使每个红按钮都可以停掉机器，g 需要满足条件

$$g|_{x_1=x_2=0} = y_1 \cdot y_2 \cdot z$$

要使每组按钮开关只外引三条线，g 需要具有如下的形状：

$$((\cdots + x_1) \cdot y_1 + \cdots + x_2)y_2$$

从这三个条件中，不难找到如下的解

$$g = ((z + x_1) \cdot y_1 + x_2) \cdot y_2$$

它所描述的开关电路如图 1.5 所示. 这个解可以推广到 n 组按钮开关上去. 做为一个练习，请读者想一想，该怎样推广？

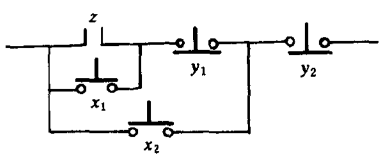

图 1.5　双开关安装图

有关布尔函数，有个重要事实，任何布尔函数都可用布尔和、布尔积以及非这三种运算来表达. 证明这事实并不难. 考虑一个 n 元布尔函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 它有 2^n 种对变量的**赋值**. **真赋值**是使函数值为 1 的赋值. 对于每个真赋值，用如下方法构造一个布尔积：如果对变量 x_i 的赋值是 1，那么放 x_i 入积中；否则，亦即对变量 x_i 的赋值是 0，那么放 $\bar{x}_i$ 入积中. 将所有由真赋值构造出的布尔积按布尔和加到一起，就得到了该函数通过布尔积、布尔和以及