21世纪高等学校教材

王元明 管 平 编著

线性偏微分方程引论

XIANXING PIANWEIFEN FANGCHENG YINLUN

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

线性偏微分方程引论

王元明　管平　编著

东南大学出版社

内　容　提　要

本节是根据作者多年授课的讲稿整理而成的．书中内容共分两大部分：第一部分较全面地介绍了二阶线性椭圆型方程的 L^2 理论、L^p 理论及 Schauder 理论，特别是 Dirichlet 问题解的各种先验估计的技巧；第二部分除了介绍二阶线性抛物型方程的极值原理与 Schauder 理论以及双曲型方程的能量不等式与 Galerkin 方法以外，还较系统地叙述了线性算子半群理论及其在线性发展方程中的应用．

本书可作为大学数学系研究生的教材，也可供教师和有关的科学工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性偏微分方程引论/王元明等编著．—南京：东南大学出版社，2002.5

ISBN 7-81089-000-X

Ⅰ．线…　Ⅱ．王…　Ⅲ．线性方程：偏微分方程—研究生—教材　Ⅳ．O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 016378 号

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼 2 号　邮编：210096）

出版人：宋增民

江苏省新华书店经销　华东有色地研所印刷厂印刷

开本 700mm×1000mm　1/16　印张 12.75　字数 243 千

2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷

定价：18.00

出版说明

近几年来，我国高等教育事业发生了许多巨大的变化，其中之一就是研究生教育正以前所未有的速度向前发展，研究生的招生规模逐年大幅度地增长．这说明我国现代化建设对高层次人才的需求越来越大，这是国家兴旺发达的重要标志．

为了适应研究生教育迅猛发展的需要，江苏省工业与应用数学学会与东南大学出版社联合组织力量撰写并出版一套研究生用的数学教材与教学参考书，其中包括数学类研究生的数学教材和参考书，也包括非数学类研究生的数学教材和参考书．这样做的主要出发点是力图动员全省的数学工作者来参与这项工作，使这套教材写得更好一点．

我们的主观愿望是这套教材具有一些自身的特点．第一，起点适中．起点太高，脱离学生的实际水平，难以教学．起点低了，又不能适应形势的发展，也满足不了学生渴望求知的要求．选择恰如其分的起点的关键，在于处理好各课程中经典内容与现代内容之间的关系，要将两者有机地结合在一起．第二，较广泛的适用面．这套教材包含数学类研究生的学位课程、选修课程、专业课程，也包含非数学类研究生的基础课程．我们希望不论哪一本教材都能被较多的专业学生所采用，这就要求在内容的处理上有一定的自封闭性，突出这门课程的主题．当然，有时为了不过多地增加篇幅，冲淡主体思想的阐述，也略去一些命题的证明，但都指出了有关的参考书籍．第三，便于阅读．研究生教育与本科生教育有很大的不同，那就是更强调学生的主观能动性和独立工作能力的培养．研究生课程的教学，除了有主讲教师启发性的讲解以外，更重要的是靠学生自学．因此，要求教材文字通顺，说理清晰，跨度不能太大，但也不能过细、过繁．书的对象是读者，只有读者认为好读的书才是一本好书．

一本好的教材需要经历一个长时期的完善过程，即不断使用，不断修改，精益求精．这套教材第一版都是有关作者在多年教学实践的基础上撰写而成的，有的讲义（书的前身）在相关的学校内已使用多年，但毕竟仍有一定局限性，缺点与错误一定还不少．我们热切地希望广大数学工作者都关心这套教材，帮助我们修改，力争在经过几次修订后，使这套教材能成为一套受欢迎的教学用书．

研究生数学教材
编委会
2001 年 11 月

前　言

从 20 世纪 80 年代初东南大学招收应用数学专业硕士研究生起,我们就开设了《线性偏微分方程理论》这门课程．当时总学时约 160 小时,分两个学期讲授,其内容包括线性偏微分方程的经典理论、Sobolev 空间、L^p($p>1$)估计与弱(强)解、分布理论与广义解、拟微分算子等．后来为了教学上的方便,就把这些内容分成几块,分别放在几门不同课程内,但其中一些基本内容仍保留在《线性偏微分方程》内,这就形成了现在出版的这本教材．

本书的内容涉及到二阶线性椭圆、抛物及双曲型方程的基本问题与理论,其中椭圆型方程部分则占了较大的篇幅,它包括 Schauder 理论与 L^p 理论,特别突出了对解进行各种先验估计的技巧,绝大部分的结果都给出了证明．有时为了叙述上的简便,把解限制在古典解的范围内,但这并不影响结果的一般性(有的从证明过程中可以直接看出)．抛物型方程部分只限于 Schauder 理论的范畴,并且有些结果也没有给出证明,只指出了证明的思路．这样处理的原因是因为抛物方程与椭圆方程在研究方法上有许多类似之处．双曲方程的内容就更少一些了,重点讲了解的能量估计与 Galerkin 方法．为了弥补后两类方程内容偏少的不足,我们增加了算子半群方法,这个内容不会给读者带来多大的困难．

学习这本教材要求读者具有大学本科中《数学物理方程》与《泛函分析》两门课程的基础,也需要用到 Sobolev 空间的理论．为了学习的方便,我们在第 1 章中把有些内容集中在一起,作为预备知识．因为这一章的内容涉及的面较广,在教学的时候不必一口气就学完,可以分散到各章去讲,以免给学生造成不必要的压力．

东南大学应用教学系王明新教授、刘继军博士曾使用这本书的讲稿和讲义,并提出了一些修改意见,东南大学出版社的同志为了本书的出版,也付出了辛勤的劳动,作者在此一并致谢．书中错误和缺点一定还很多,欢迎读者给予批评指正．

作　者

2001 年 11 月

目　　录

第1篇　线性椭圆型方程

第 1 篇

线性椭圆型方程

1　预备知识

1.1　基本问题的叙述

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n(n \geqslant 2)$ 中具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域，$u:\overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ 是边值问题

$$\begin{cases} Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.1}$$

的解，其中 a_{ij}, b_i, c, f 及 φ 已知．我们的主要问题是：关于 a_{ij}, b_i, c, f 及 φ 的性质给各种假设，对于 u 的存在性以及 u 及其导数的有界性与光滑性能说明什么？更精确地说，借助于 a_{ij}, b_i, c 等的性质能得到 u 的什么样的先验估计，在此基础上说明它的存在性．

采用以下记号和约定：

(1) $u_{x_i} \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$，　$u_{x_i x_j} \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$；

(2) 在一项中出现两次的下标都假设是从 1 到 n 求和，而省略求和"$\sum$"符号；

(3) 函数的变元常被略去．

利用(1) ~ (3)，问题(1.1.1) 可重写成

$$\begin{cases} -a_{ij}u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} + cu = f & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.2}$$

作如下椭圆性假设(Ellipticity assumption)：

存在实数 $\Theta \geqslant \theta > 0$，使得对任意 $x \in \overline{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$，有

$$\theta|\boldsymbol{\xi}|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Theta|\boldsymbol{\xi}|^2 \tag{1.1.3}$$

其中 θ 称为椭圆性常数．

$\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$ 表示一个矩阵，它的第(i,j)个分量是函数 $a_{ij}(x)$，除非特别说明，今后我们总假定对任意 $x \in \overline{\Omega}$，有

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad i,j = 1,\cdots,n$$

即矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 对所有 $x \in \overline{\Omega}$ 是对称的．

引理 1.1.1　如上述假设成立，则

(1) 对任意 $x \in \overline{\Omega}, i = 1,2,\cdots,n$，有 $\Theta \geqslant a_{ii}(x) \geqslant \theta > 0$；

(2) 对任意 $x \in \overline{\Omega}, i,j = 1,\cdots,n$,有 $a_{ij}^2(x) \leqslant a_{ii}(x)a_{jj}(x)$;

(3) 对任意 $x_0 \in \overline{\Omega}$,存在一个 $n \times n$ 实矩阵$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{x_0}$,使得$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}$,且

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}(x_0)\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i \geqslant \theta, i = 1,\cdots,n$.

证明 (1) 令 $\xi = (0,0,\cdots,1,\cdots,0)$(表示第 i 个分量为 1,其余分量为 0),代入式(1.1.3)即得.

(2) 取 $\lambda > 0$(待定),且令 $\xi = (0,\cdots,0,\underset{(第j位)}{\lambda},0,\cdots,0,\underset{(第i位)}{\pm 1},0,\cdots,0)$,代入式(1.1.3)得

$$0 \leqslant a_{kj}\xi_k\xi_j = \lambda^2 a_{jj} + a_{ii} \pm 2\lambda a_{ij}$$

所以

$$\pm a_{ij} \leqslant \frac{\lambda}{2}a_{jj} + \frac{a_{ii}}{2\lambda}$$

选取 $\lambda = \left(\dfrac{a_{ii}}{a_{jj}}\right)^{1/2}$,得

$$\pm a_{ij} \leqslant (a_{ii})^{1/2}(a_{jj})^{1/2}$$

(3) 从线性代数的基本事实及矩阵 $A(x)$ 是对称且正定的,立即可得.

为方便起见,我们采用以下符号与定义:

(1) $\nabla u \equiv \mathrm{grad}\,u \equiv (u_{x_1},\cdots,u_{x_n})$或$Du = (u_{x_1},\cdots,u_{x_n})$;

(2) $\Delta u \equiv u_{x_ix_i} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n}$;

(3) L^p 空间与 Sobolev 空间范数

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \quad 1 \leqslant p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n\int_\Omega |u_{x_i}|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} {}^*$$

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} = \|u\|_{2,p} = \left(\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n\int_\Omega |u_{x_i}|^p\mathrm{d}x + \sum_{i,j=1}^n\int_\Omega |u_{x_ix_j}|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

其中$L^p(\Omega) = \left\{f \middle| \int_\Omega |f|^p\mathrm{d}x < \infty\right\}$是$L^p$空间,$W^{m,p}(\Omega) = \left\{f \middle| D^\alpha f \in L^p,对任意|\alpha| \leqslant m\right\}$

---

* 注意: 这里的导数一般是广义导数:设 $u \in \mathrm{Loc}(\Omega)$ 是局部可积函数,称 v 为 u 的 α 阶导数,是指对任意 $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$,有

$$\int_\Omega \varphi v\mathrm{d}x = (-1)^\alpha\int_\Omega uD^\alpha\varphi\mathrm{d}x$$

其中 $C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ 见下节定义 1.2.1.

是 Sobolev 空间．$W^{m,p}(\Omega)$ 中的范数定义为 $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p}$．

(4) Hölder 范数

$$[u]_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha},0<\alpha\leq 1$$

若 $[u]_\alpha<\infty$，则称 u 是指数为 α 的 Hölder 连续函数，记成 $u\in C^\alpha(\overline{\Omega})$，其中元素的范数为

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \sup_\Omega|u| + [u]_\alpha$$

$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{f\,\middle|\, f\in C^k,\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f \text{ Hölder 连续}\right\}$，其中元素的范数(对 $k=1,2$)为

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_\Omega|u| + \sum_{i=1}^n\left(\sup_\Omega|u_{x_i}| + [u_{x_i}]_\alpha\right)$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_\Omega|u| + \sum_{i=1}^n\sup_\Omega|u_{x_i}| + \sum_{i,j=1}^n\left(\sup_\Omega|u_{x_ix_j}| + [u_{x_ix_j}]_\alpha\right)$$

类似地可以定义 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ 内的范数*，为了简单起见，将这个范数常记成 $\|\cdot\|_{k,\alpha,\Omega}$ 或 $\|\cdot\|_{k,\alpha}$．

(5) 有时将 $W^{1,2}(\Omega)$ 与 $W^{k,2}(\Omega)$ 写成 $H^1(\Omega)$ 与 $H^k(\Omega)$．

(6) 重指标 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i\in\mathbf{Z}_+$（非负整数集），$|\alpha|=\sum_1^n\alpha_i$，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$，且

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},\quad D_k=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_k},\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

这里 i 表示虚数单位．

1.2 若干技巧

我们将在本书中常用到以下技巧，现将这些技巧的理论基础引述如下．

1.2.1 单位分解定理

要获得在一般区域内解的先验估计，往往先在球域及半球域内获得相应的估计，然后利用单位分解定理由球域内的结果过渡到一般域内的结果．

定义 1.2.1 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是开集，u 是定义在 Ω 内的连续函数，集合 $\{x\in\Omega|u(x)\neq 0\}$ 的闭包称为 u 的支集(在 Ω 内)，记为 supp u，即

* $C^{k,\alpha}$ 按这里的范数 $\|\cdot\|_{k,\alpha}$ 及第6章中的范数 $\|\cdot\|_{k,\alpha}^*$ 都是 Banach 空间，这个结果将放到第 8 章证明．

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$$

以 $C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\Omega)$ 内所有满足 $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$ 内(即 $\operatorname{supp} u$ 是Ω 中的紧集)的函数的全体.

定义 1.2.2 取 $\varphi \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$, $\int \varphi \mathrm{d}x = 1$, $\varphi \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\varphi = \{x \mid |x| \leqslant 1\}$ $\left(\text{例如可取 } \varphi(x) = \dfrac{1}{\int_{\mathbf{R}^n} f(|x|^2 - 1)\mathrm{d}x} f(|x|^2 - 1)\text{,其中 } f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & t < 0 \\ 0 & t \geqslant 0 \end{cases}\right)$,则称

$$u_\varepsilon(x) = \int_{|y| \leqslant 1} u(x - \varepsilon y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \varepsilon^{-n}\int u(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y \tag{1.2.1}$$

为 u 的正则化.

定理 1.2.1 设 u 是可积的,且在 Ω 的一个紧子集 K 外恒为 0,则

(1) 若$\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) \triangleq \delta \Rightarrow u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$;

(2) 若 $u \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty \Rightarrow u_\varepsilon \xrightarrow{L^p} u(\varepsilon \to 0)$;

(3) 若 $u \in C(\Omega) \Rightarrow u_\varepsilon \xrightarrow{\text{一致}} u(\varepsilon \to 0)$.

证明 (1) 从表达式(1.2.1)中后一等式及 φ 的连续性可知,u_ε 是连续的.同时,由于右端积分仅是一个紧集上积分,利用在积分号下求导的法则知 $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$.现在 $u_\varepsilon(x) \neq 0 \Rightarrow$ 对某 y, $|y| \leqslant 1$,有 $x - \varepsilon y \in K$(由式(1.2.1)中第一个积分可知),因此 $\operatorname{supp} u_\varepsilon$ 是集合$\{x \mid \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \varepsilon\}$的一个闭子集,从而,若$\varepsilon < \delta$, $\operatorname{supp} u_\varepsilon \subset \Omega$,即 $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$.

(3) 若 $u \in C(\Omega)$,由于$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi \mathrm{d}x = 1$,故

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int (u(x - \varepsilon y) - u(x))\varphi(y)\mathrm{d}y$$

从而

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant \sup_{x \in K, |y| \leqslant 1} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|$$

由 u 的一致连续性(在紧集上连续)知,在 $\varepsilon \to 0$ 时,$u_\varepsilon \xrightarrow{\text{一致}} u$.

(2) $u \in L^p$,由 $\varphi \geqslant 0$, $\int \varphi \mathrm{d}x = 1$ 易知$\| u_\varepsilon \|_{L^p} \leqslant \| u \|_{L^p}$.利用实变函数中的知识知 $C_0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密,故对 $u \in L^p$ 及$\eta > 0$,存在 $v \in C_0(\Omega)$,使得 $\| u - v \|_{L^p} < \eta$,故$\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}}\| u_\varepsilon - u \|_{L^p} \leqslant \overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}}\| u_\varepsilon - v_\varepsilon \|_{L^p} + \| u - v \|_{L^p} + \overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}}\| u_\varepsilon - v \| < 2\eta$,即

$$u_\varepsilon \xrightarrow{L^p} u$$

推论 1.2.2 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

定理 1.2.3（截断函数的存在性） 设 K 是 Ω 内的一个紧子集，则存在函数 $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$，使得 $0 \leqslant \psi \leqslant 1$，在 K 的邻域内 $\psi = 1$.

证明 取 $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon + \varepsilon' < \delta$，其中 $\delta = \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$. 记

$$K_{\varepsilon'} = \{x \mid \mathrm{dist}(x, K) \leqslant \varepsilon'\}（为 K 的 \varepsilon' 邻域）$$

作

$$u = \begin{cases} 1 & x \in K_{\varepsilon'} \\ 0 & x \notin K_{\varepsilon'} \end{cases}$$

由于 $K_{\varepsilon'} \subset \Omega$，$u \in L^1(\Omega)$，且在 $\Omega \setminus K_{\varepsilon'}$ 上为 0，$\varepsilon < \mathrm{dist}(K_{\varepsilon'}, \partial\Omega) = \delta - \varepsilon'$，由定理 1.2.1 知，$u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$，$\mathrm{supp}\, u_\varepsilon \subset K_{\varepsilon+\varepsilon'}$，且当 $x \in K_{\varepsilon-\varepsilon'}$，$|y| \leqslant 1$ 时，$x - \varepsilon y \in K_{\varepsilon'}$，所以 $u(x - \varepsilon y) = 1$，从而 $u_\varepsilon = 1$，取 $\psi = u_\varepsilon$ 可知，在 $K_{\varepsilon-\varepsilon'}$ 内，$\psi = 1$，且 $0 \leqslant \psi \leqslant 1$（由 u 的定义知）.

定理 1.2.4（单位分解定理） 设 $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ 是开集组，K 是紧集，满足 $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$，则存在函数 $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$，使得 $\varphi_j \geqslant 0$，$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \leqslant 1$，且在 K 的邻域内 $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1$.

证明 对 $j = 1, \cdots, k$，我们可选紧集 $K_j \subset \Omega_j$，使得 $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} K_j$ *，由定理 1.2.3 知，存在 $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$，使得 $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$，在 K_j 的邻域内，$\psi_j = 1$. 作

$$\varphi_1 = \psi_1$$

$$\varphi_j = \psi_j(1 - \psi_1)\cdots(1 - \psi_{j-1}), \quad j = 2, \cdots, k$$

则

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1 - (1 - \psi_1)\cdots(1 - \psi_k)$$

即定理 1.2.4 中所有结论成立.

1.2.2 齐次化边界条件

为了处理问题的方便，总是假定所给边界条件是齐次的. 这不失一般性，因为有下列扩张定理.

---

* 开集 Ω_1 覆盖闭集 $K \setminus \bigcup_{j=2}^{k} \Omega_j$，所以 $\delta_1 = \mathrm{dist}(\partial\Omega_1, K \setminus \bigcup_{j=2}^{k} \Omega_j) > 0$，取 $K_1 = \left\{x \mid x \in \Omega_1, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega_1) \geqslant \frac{\delta_1}{2}\right\}$，$\Omega_1' = \mathrm{int} K_1$，则 Ω_1' 与 $\Omega_2, \cdots, \Omega_k$ 仍覆盖 $\Omega$$\left(\text{因为若 } x \in K \setminus \bigcup_{j=2}^{k} \Omega_j，\text{则 } \mathrm{dist}(x, \partial\Omega_1) = \delta_1 > \frac{\delta_1}{2} \Rightarrow x \in \Omega_1'，\text{即 } K \setminus \bigcup_{j=2}^{k} \Omega_j \subset \Omega_1'\right)$. 类似地可作 $K_j (j \geqslant 2)$，同时可知 $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} K_j$.