国家工科数学课程教学基地

研究生教学用书

矩阵理论

Matrix Theory

电子科技大学应用数学学院 黄廷祝 钟守铭 李正良

高等教育出版社

国家工科数学课程教学基地

研究生教学用书

矩阵理论

电子科技大学应用数学学院

黄廷祝　钟守铭　李正良

高等教育出版社

内容提要

矩阵理论是数学的一个重要分支，同时在数值分析、最优化方法、微分方程、控制理论、数学模型等分支及各种工程学科有极其重要的应用。本书正是为适应科技和工程人员对矩阵理论的需要而编写的。

全书共分七章，包括：线性代数基础、向量与矩阵的范数、矩阵的分解、特征值的估计与摄动、矩阵分析、广义逆矩阵、非负矩阵理论。内容系统全面，同时又注重矩阵理论的应用。本书是作者长期从事矩阵理论教学及研究的总结，引入了大量国内外矩阵理论的研究成果。本书既可作为工科及理科高年级本科生、研究生的教材，也可作为教师和科技工作者从事科学研究的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵理论/黄廷祝，钟守铭，李正良．—北京：
高等教育出版社，2003．10（2004重印）
ISBN 7－04－011942－0

Ⅰ．矩... Ⅱ．①黄...②钟...③李... Ⅲ．矩阵－
理论 Ⅳ．O151．21

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第037491号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	北京市联华印刷厂

开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2003年8月第1版
印　　张	17	**印　　次**	2004年1月第3次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	23.80元

前　言

随着科学技术的迅猛发展,特别是计算机的广泛应用,矩阵理论越来越受到数学工作者、科技和工程人员的重视。它不仅是一门重要的数学分支,而且在数值分析、最优化方法、微分方程、控制理论、数学模型等分支及各种工程学科有极其重要的应用。矩阵理论已成为科技领域中不可缺少的数学工具。由于利用矩阵理论与方法来处理错综复杂的工程问题时,具有表达简洁、对数学和工程问题的实质刻画深刻等优点,因此利用矩阵理论与方法来处理科学技术的各种问题越来越受到科技工作者的极大关注。本书是为适应科学和工程技术人员对矩阵理论的需要而编著的,并适合作为工科和理科研究生、高年级本科生的教材。

本书是在电子科技大学工科及理科研究生教学中长期使用的讲义与教材的基础上修改完成的。在本书的编写过程中,考虑到(理)工科研究生或工程科技人员已具备一定的数学基础,并假定读者已初步具备线性空间、线性变换、矩阵等的基本概念和基本运算知识。在此基础上,一方面力求全面、系统地介绍矩阵理论,另一方面也注重矩阵理论的应用。该书参考了国内外有代表性的文献资料,也有部分内容是作者研究工作的总结,以便读者掌握矩阵理论的最新成果,了解新的研究动态。本书在基本概念、基本理论和基本方法的论述上力求精练简洁、注重理论联系实际。本书的特点是,把矩阵方法与线性变换方法、向量空间方法结合起来,把代数与几何方法结合起来,把代数方面的结构与测度方面的结构结合起来。选材精练,内容新颖,结构严谨,推理简明,立足点高,理论性强,循序渐进,通俗易懂。

本书的内容分为七章,可分为两个部分。第一部分包括线性空间、线性变换、内积空间和线性流形等,它是作为本科线性代数课程内容的衔接与延伸,为学习第二部分打下必要的基础。第二部分包括向量与矩阵范数理论及应用、矩阵分解、特征值的估计与摄动、矩阵分析、广义逆矩阵理论及计算方法、非负矩阵理论。该部分是考虑到目前研究生的实际需要而精选的,其中包括了一些国内外有代表性的研究成果,介绍了矩阵理论中的基本概念、理论和方法。各章均配有一定数量难易程度各异的习题,以加深读者对课程的理解。

本书由黄廷祝(第四、五、七章)、钟守铭(第三、六章)、李正良(第一、

二章)三位教授共同讨论和编写。

作者感谢电子科技大学应用数学学院谢云荪教授,他仔细审阅了书稿,并提出不少好的建议。感谢高等教育出版社理工分社为本书出版所给予的大力支持和付出的辛勤劳动,感谢电子科技大学研究生院对本书出版给予的大力支持。

限于水平,书中不妥之处,敬请读者指正。

编　者

2003年2月于电子科技大学(成都)

编　　辑　胡乃[illegible]
策　　划　李艳馥
封面设计　李卫青
责任绘图　吴文信
版式设计　史新薇
责任校对　胡晓琪
责任印制　杨　明

目　　录

第一章　线性代数基础

本章所讨论的内容既是已有线性代数知识的深化，也是本书的基础.

§1　线性空间与子空间

如果数集 P 中任意两个数作某一运算后的结果仍在 P 中，我们就称数集 P 对这个运算是封闭的. 对加、减、乘、除(除数不为零)四则运算封闭的数集 P 称为数域.

最常见的数域是有理数域 $\mathbf{Q}$、实数域 $\mathbf{R}$、复数域 $\mathbf{C}$. 此外，还有其他很多数域，例如

$$Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}.$$

不难验证，$Q(\sqrt{2})$对实数的加、减、乘、除运算是封闭的，所以 $Q(\sqrt{2})$也是一个数域. 而全体整数组成的集合 $\mathbf{Z}$ 对于除法运算不封闭，故 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

定义 1　设 V 是一个非空集合，P 是一个数域. 在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算，叫做加法：即，给出了一个法则，对于 V 中任意两元 α, β，在 V 中都有唯一的一个元 ν 与它们对应，称 ν 为 α 与 β 的和，记 $\nu = \alpha + \beta$. 在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算，叫做数量乘法：就是说，对于数域 P 中任一数 k 和 V 中任一元 α，在 V 中都有唯一元 δ 与它们对应，称 δ 为 k 与 α 的数量乘积，记为 $\delta = k\alpha$. 如果加法与数量乘法满足下述规则：

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

2) $(\alpha + \beta) + \nu = \alpha + (\beta + \nu)$;

3) 在 V 中有一个元 0，对于 V 中任一元 α，有 $\alpha + 0 = \alpha$(具有这个性质的元 0 称为 V 的零元素);

4) 对于 V 中每一个元 α，都有 V 中的元 β，使 $\alpha + \beta = 0$(β 称为 α 的负元素，记为 $\beta = -\alpha$);

5) $1\alpha = \alpha$;

6) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$;

7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

则称 V 为数域P 上的线性空间(其中 $k,l\in P$,而 $\alpha,\beta\in V$),其中的元素也常称为向量.

例如,元素属于数域 P 的 $m\times n$ 型矩阵,按矩阵的加法和矩阵的数量乘法,构成数域 P 上的一个线性空间,用 $P^{m\times n}$ 表示.而全体实函数,按函数的加法和数与函数的乘法,也构成一个实数域上的线性空间.数域 P 按照本身的加法和乘法,也构成自身上的一个线性空间.

定义 2 在线性空间 V 中,如果有 n 个向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关,而 V 中任意 $n+1$ 个向量线性相关,则称 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基底,由于线性空间的所有基底总含有相同数目的向量,则 n 称为线性空间 V 的维数.常记为 $\dim V=n$.

例 1 设多项式集合

$$P_n[x]=\{a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\mid a_i\in P,i=0,1,\cdots,n-1\}.$$

按通常的多项式加法和数乘法,显然构成数域 P 上的一个线性空间.且 $x^{n-1},\cdots,x,1$ 是 $P_n[x]$的一组基底,其维数 $\dim P_n[x]=n$.

例 2 如果把复数域 $\mathbf{C}$ 看作是自身上的线性空间,则它是一维的,数 1 是一组基底;如果看作是实数域上的线性空间,则就是二维的,数 1 与 i 就是一组基底.

定义 3 如果数域 P 上线性空间 V 的一非空子集 W 对于 V 的两种运算也构成线性空间,则称 W 为 V 的一个线性子空间(简称子空间).

例如,$P_2[x]$是 $P_4[x]$的一个子空间;$W=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\0 & 0\end{pmatrix}\middle| a,b\in P\right\}$是 $P^{2\times 2}$的一个子空间;$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$,则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的全部解向量组成 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间,通常称为解空间.

§2 空间分解与维数定理

定义 1 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间,所谓 V_1 与 V_2 的和,是指由所有能表示成 $\alpha_1+\alpha_2(\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$的向量组成的子集合,记为 V_1+V_2.

不难证明,V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 均是 V 的一个子空间,它们之间的关系产生了下面的维数定理.

定理 1 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间,则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).\quad(1-1)$$

从定理 1 可看出,子空间和的维数一般比子空间的维数之和小.例

如，在三维几何空间中，两个过原点的不同平面之和是整个三维空间，而它们的维数之和却等于 4，由此说明这两个子空间的交是一维的子空间.

定义 2　设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间，若对 $\forall \alpha \in V_1 + V_2$，有

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2),$$

且这种表示是唯一的，这个和 $V_1 + V_2$ 就称为直和，记为 $V_1 \oplus V_2$.

定理 2　设 V_1、V_2 是线性空间 V 的子空间，则下列几条命题相互等价：

(1) $V_1 + V_2$ 是直和；

(2) 零向量表示法唯一. 即由 $0 = \alpha_1 + \alpha_2 (\alpha_i \in V_i)$，必有 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$；

(3) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

推论 1　设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 令 $W = V_1 + V_2$，则

$$W = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \dim W = \dim(V_1) + \dim(V_2) \tag{1-2}$$

例 1　设 α, β 是线性空间 V 中的两个线性无关的元，则 $L(\alpha) + L(\beta)$ 是直和，而 $L(\alpha, \alpha + \beta) + L(\beta)$ 不是直和（其中 $L(\alpha, \beta)$ 是由 α, β 生成的子空间）.

例 2　设 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 表示所有 n 阶实方阵形成的线性空间，而所有对称矩阵 $(A = A^{\mathrm{T}})$ 的集合 V_1 及所有反对称矩阵 $(A = -A^{\mathrm{T}})$ 的集合 V_2，是 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的两个子空间，则 $\mathbf{R}^{n \times n} = V_1 \oplus V_2$.

子空间直和的概念可以推广到多个子空间的情形.

定义 3　设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是 V 的子空间，如果和 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 中的每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s \qquad \alpha_i \in V_i (i = 1, 2, \cdots, s)$$

是唯一的，这个和就称为直和，记为 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$.

例 3　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，则它们生成的一维子空间 $L(\alpha_1), L(\alpha_2), \cdots, L(\alpha_n)$ 的和是直和，且有

$$L = L(\alpha_1) \oplus L(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus L(\alpha_n).$$

定理 3　设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是 V 的子空间，下面几个命题相互等价：

(1) $W = \sum V_i$ 是直和；

(2) 零向量的表示法唯一；

(3) $V_i \cap \left(\sum\limits_{j \neq i} V_j \right) = \{0\}, 1 \leqslant i \leqslant s$；

(4) $\dim(W) = \sum \dim(V_i)$.

§3 商 空 间

在这一节中,我们总假设 V 是一个 n 维线性空间,M 是它的子空间.现在我们将利用 M 对 V 中的向量进行分类,从而引出商集和商空间的重要概念.

定义 1 设 $\alpha\in V$,如果 $\alpha'\in V$ 满足 $\alpha'-\alpha\in M$,则称 α' 与 α 模 M 同余,记为 $\alpha'\equiv\alpha(\mathrm{mod}\ M)$.

性质 1 反身律:即 $\alpha\equiv\alpha(\mathrm{mod}\ M)$.

性质 2 对称律:若 $\alpha'\equiv\alpha(\mathrm{mod}\ M)$,则 $\alpha\equiv\alpha'(\mathrm{mod}\ M)$.

性质 3 传递律:若 $\alpha''\equiv\alpha'(\mathrm{mod}\ M)$,$\alpha'\equiv\alpha(\mathrm{mod}\ M)$,则 $\alpha''\equiv\alpha(\mathrm{mod}\ M)$.

由此看出模 M 同余是一个等价关系.

定义 2 设 $\forall\alpha\in V$,则 V 的子集 $\alpha+M=\{\alpha+m\mid m\in M\}$ 内的任一向量必与 α 模 M 同余;反之,与 α 模 M 同余的向量必属于 $\alpha+M$.我们称 $\alpha+M$ 为一个模 M 的同余类,而 α 称为这个同余类的代表.

性质 4 若 $\alpha'\in\alpha+M$,则 $\alpha'+M=\alpha+M$.因而可取 $\alpha+M$ 中任一元素来作为它的代表.

性质 5 两个模 M 同余类如不相等就没有公共元素,即其交集为空集.

事实上,若 $(\alpha+M)\cap(\gamma+M)\neq\varnothing$,设 $\gamma\in(\alpha+M)\cap(\beta+M)$,则由性质 4 知,$\alpha+M=\gamma+M=\beta+M$,矛盾.

线性空间 V 内每个向量必属于某一模 M 同余类(即以它自己为代表的那个同余类),而不同的同余类又不相交,于是,V 就可以看成是一些彼此互不相交的同余类的并集.

定义 3 V 的所有模 M 同余类的全体组成的集合称为 V 的商集,记为 $\overline{V}$.

现在我们在 $\overline{V}$ 中定义加法和数乘两种运算

(1) 定义　$(\alpha+M)+(\beta+M)=(\alpha+\beta)+M$,

(2) 定义　对 $\forall k\in P$,$k(\alpha+M)=k\alpha+M$.

下面我们将证明上面的定义在逻辑上是没有矛盾的,也就是说,在同一个同余类中选择不同的元素作代表时,上述定义的运算都不会因之而出现不同的结果,现在分别加以证明.

设 $\alpha'\equiv\alpha(\mathrm{mod}\ M)$,$\beta'\equiv\beta(\mathrm{mod}\ M)$,则有

$$\alpha+M=\alpha'+M,\quad \beta+M\equiv\beta'+M,$$

又因

$$\alpha' = \alpha + m_1, \beta' = \beta + m_2 \quad (m_1, m_2 \in M),$$

故

$$\alpha' + \beta' = \alpha + \beta + (m_1 + m_2) \in (\alpha + \beta) + M,$$
$$(\alpha' + \beta') + M = (\alpha + \beta) + M,$$

这说明

$$(\alpha + M) + (\beta + M) = (\alpha' + M) + (\beta' + M).$$

所以,上面所定义的加法运算不会因各同余类代表的不同选择而出现矛盾.

设 $\alpha' \equiv \alpha (\mathrm{mod}\ M)$,则有

$$\alpha + M = \alpha' + M,$$

又因

$$\alpha' = \alpha + m \quad (m \in M), k\alpha' = k\alpha + km \in k\alpha + M,$$

故

$$k\alpha' + M = k\alpha + M,$$

即

$$k(\alpha + M) = k(\alpha' + M).$$

所以,上面所定义的数乘也不会因为其代表的不同选择而出现矛盾的结果.

不难得如下结果:

定理 1 商集 $\overline{V}$ 关于上面所定义的加法和数量乘法运算为数域 P 上的一个线性空间,这个线性空间称为 V 对于子空间 M 的商空间,记为 V/M.

定理 2 设 M 是 V 的子空间,则

$$\dim(V/M) = \dim(V) - \dim(M). \tag{1-3}$$

证 设 M 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$,扩充成 V 的一组基为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n,$$

我们证明:$\overline{V}$ 内的 $n-s$ 个元素

$$\alpha_{s+1} + M, \alpha_{s+2} + M, \cdots, \alpha_n + M, \tag{1-4}$$

组成 $\overline{V} = V/M$ 的一组基.

(1) 先证明向量组(1-4)在 $\overline{V}$ 内是线性无关的.设

$$k_{s+1}(\alpha_{s+1} + M) + \cdots + k_n(\alpha_n + M) = 0 + M,$$

于是有

$$(k_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + k_n\alpha_n) + M = 0 + M,$$

于是

$$k_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+k_n\alpha_n=0=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s,$$

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s-k_{s+1}\alpha_{s+1}-\cdots-k_n\alpha_n=0,$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,故 $k_{s+1}=k_{s+2}=\cdots=k_n=0$,这就证明了向量组(1-4)是线性无关的.

(2) 证明任一 $\alpha+M$ 可由向量组(1-4)线性表出.设

$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+k_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+k_n\alpha_n,$$

于是有

$$\alpha-(k_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+k_n\alpha_n)=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s\in M,$$

则

$$\alpha\equiv k_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+k_n\alpha_n\pmod M,$$

因此,有

$$\begin{aligned}\alpha+M&=(k_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+k_n\alpha_n)+M\\&=(k_{s+1}\alpha_{s+1}+M)+\cdots+(k_n\alpha_n+M)\\&=k_{s+1}(\alpha_{s+1}+M)+\cdots+k_n(\alpha_n+M),\end{aligned}$$

综合(1),(2)即知向量组(1-4)是 $\bar V$ 的一组基,从而

$$\dim(V/M)=\dim(V)-\dim(M).$$

证毕

例 1 xOy 平面向量的线性空间 V 的维数是 $\dim(V)=2$,而 Ox 轴上所有向量形成 V 的一维子空间 M,且有 $\dim(M)=1$,故 $\dim(V/M)=2-1=1$.

事实上,取 $\alpha=(0,1)$,则 $\alpha+M$ 就是 V/M 的基底,由 $k(\alpha+M)=k\alpha+M$ 就得到 V/M 的所有元,从而达到了对 V 的向量进行分类的目的.

例 2 设 $V=\mathbf{R}^3$,取 M 是 Ox 轴的一维子空间,则 $\dim(V/M)=3-1=2$.

事实上,取 $\alpha=(0,1,0)$,$\beta=(0,0,1)$,则 $\alpha+M$,$\beta+M$ 就是 V/M 的一组基,且由 $k_1(\alpha+M)+k_2(\beta+M)$就得到 V/M 的所有元素(即平行于 Ox 轴的所有空间直线),从而也达到了对 $\mathbf{R}^3$的向量进行分类的目的.

§4 线性流形与凸包

定义 1 所谓线性空间 V 的线性流形,即为

$$P=r_0+V_1=\{r_0+\alpha\mid\alpha\in V_1\},\tag{1-5}$$

其中 V_1 是 V 的子空间,r_0 是 V 的固定向量,且 V_1 的维数称为线性流

形 P 的维数.一维线性流形称为直线,二维线性流形称为平面,更高维的线性流形称为超平面.

例 1 任一秩为 r 的 n 元线性方程组 $Ax=b$ 的解集合是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的 $d=n-r$ 维线性流形.反之,对 $\mathbf{R}^n$ 的任一 d 维线性流形 P,存在一系数矩阵秩为 $r=n-d$ 的 n 元线性方程组,使其解集合为 P.

证 易知 $Ax=b$ 的导出方程组 $Ax=0$ 的解空间 V_1 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 $d=n-r$ 维子空间.设 r_0 是 $Ax=b$ 的一个特解,则由方程组解的结构定理知,$Ax=b$ 的解集为 $P=r_0+V_1$,即 P 是 $\mathbf{R}^n$ 的 $n-r$ 维线性流形.

反之,设 $P=r_0+V_1$,P 是 $\mathbf{R}^n$ 的 d 维流形,V_1 是 $\mathbf{R}^n$ 的 d 维子空间.取 V_1 的一组基底为

$$\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),$$
$$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_d=(a_{d1},a_{d2},\cdots,a_{dn}),$$

作齐次方程 $A_1x=0$,其中,A_1 是以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d$ 为行的矩阵,故此方程组的解空间 V_2 是 $\mathbf{R}^n$ 的 $n-d=r$ 维子空间.设 V_2 的一组基底为

$$\beta_1=(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1n}),$$
$$\beta_2=(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2n}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_r=(b_{r1},b_{r2},\cdots,b_{rn}),$$

作齐次方程 $Ax=0$,其中,A 是以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为行的矩阵,故此方程组的解空间即为 V_1,于是令 $b=Ar_0$,则 $Ax=b$ 即为欲求的方程组.

更一般的结论如下.

定理 1 设 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的任意 $s+1$ 个向量,且 $k_0+k_1+\cdots+k_s=1$,则形如

$$x=k_0\alpha_0+k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s \tag{1-6}$$

的所有向量组成一个维数等于向量组 $\alpha_1-\alpha_0,\alpha_2-\alpha_0,\cdots,\alpha_s-\alpha_0$ 的秩的线性流形 P.

证 令

$$\alpha_1=\alpha_1-\alpha_0+\alpha_0,$$
$$\alpha_2=\alpha_2-\alpha_0+\alpha_0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_s=\alpha_s-\alpha_0+\alpha_0,$$

代入式(1-6)得(注意到 $k_0+k_1+\cdots+k_s=1$)

$$x=\alpha_0+[k_1(\alpha_1-\alpha_0)+k_2(\alpha_2-\alpha_0)+\cdots+k_s(\alpha_s-\alpha_0)].$$

如果我们任意选取 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,则

$$\begin{aligned}&\{k_1(\alpha_1-\alpha_0)+\cdots+k_s(\alpha_s-\alpha_0)\}\\&=L(\alpha_1-\alpha_0,\alpha_2-\alpha_0,\cdots,\alpha_s-\alpha_0),\end{aligned}$$

是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间,其维数由 $\alpha_1-\alpha_0,\alpha_2-\alpha_0,\cdots,\alpha_s-\alpha_0$ 的秩来定.故由线性流形的定义就证得了命题.　　证毕

读者不难发现,P 是包含所有向量 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的最小维的流形,且这些向量中的任一向量都可以担任 α_0 的角色.还有,定理 1 的逆也是成立的,即对任一 s 维线性流形 P,存在 $s+1$ 个向量 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$,使得 P 是由满足 $k_0+k_1+\cdots+k_s=1$ 的形如 $x=k_0\alpha_0+k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$ 的向量组成,且向量组 $\alpha_1-\alpha_0,\alpha_2-\alpha_0,\cdots,\alpha_s-\alpha_0$ 线性无关.

事实上,设 $P=r_0+V_1$,且 $\dim(V_1)=s$.在 V_1 中选一组基底为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$,则 $\forall\, x\in P$ 可表为

$$x=r_0+k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s,\tag{1-7}$$

其中,$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 任意.在 P 中选 $\alpha_0=r_0,\alpha_1=\beta_1+r_0,\cdots,\alpha_s=\beta_s+r_0$,则只要注意到 $k_0+k_1+\cdots+k_s=1$,就有

$$\begin{aligned}x&=r_0+k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s\\&=r_0+k_1(\alpha_1-r_0)+k_2(\alpha_2-r_0)+\cdots+k_s(\alpha_s-r_0)\\&=k_0\alpha_0+k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s,\end{aligned}$$

所以,P 是由满足 $k_0+k_1+\cdots+k_s=1$ 的形如 $x=k_0\alpha_0+k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$ 的向量组成.又由于 $\alpha_1-\alpha_0=\beta_1,\alpha_2-\alpha_0=\beta_2,\cdots,\alpha_s-\alpha_0=\beta_s$ 又是 V_1 的基底,故 $\alpha_1-\alpha_0,\cdots,\alpha_s-\alpha_0$ 线性无关.

定理 2　V_1,V_2 是 V 的子空间,而 $r_1,r_2\in V$,则 $P_1=r_1+V_1,P_2=r_2+V_2$ 相等的充要条件是 $V_1=V_2,r_1-r_2\in V_1$.

证　必要性.如果 $P_1=P_2$,因 $r_2+0\in P_2=P_1$,则有 $\alpha\in V_1$,因而 $r_1+\alpha\in P_1$,使 $r_1+\alpha=r_2+0$.故有 $\alpha+(r_1-r_2)=0\in V_1$,所以 $r_1-r_2\in V_1$.

又对 $\forall\,\beta\in V_2$,$r_2+\beta\in P_2=P_1$,则有 $\alpha\in V_1$,使 $r_1+\alpha=r_2+\beta\in P_1$,$\beta=(r_1-r_2)+\alpha\in V_1$,所以有 $V_2\subseteq V_1$.

同理,$V_1\subseteq V_2$,因此 $V_1=V_2$.

充分性.设 $V_1=V_2$,对 $P_1=r_1+V_1,P_2=r_2+V_2$,取 $r_1+\alpha\in P_1$,其中,$\alpha\in V_1$,因 $\beta=r_1-r_2+\alpha\in V_1=V_2$,于是有 $r_1+\alpha=r_2+\beta\in P_2$,