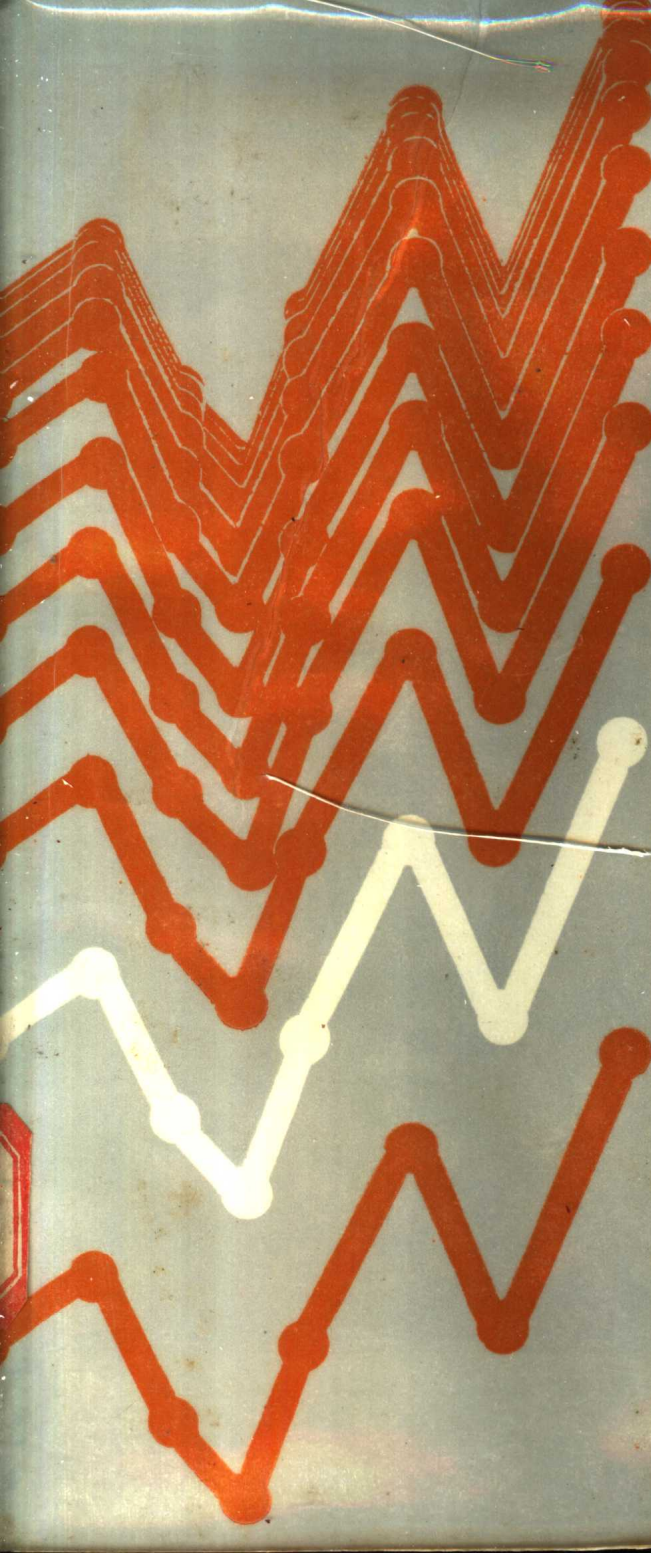




实用 经济数学 (上)

柴根象 周世武等 编

电子工业出版社

实用经济数学

(上册)

柴根象 周世武 等编

电子工业出版社

内 容 提 要

本书介绍在经济活动和管理工作中所必需的数学方法和基本理论,其中配有大量应用实例,既可作为学习经济数学的入门书,也可作为从事这方面工作的各类人员的参考书。本书分上、下册,上册包括四篇二十章,第一篇预备知识,主要介绍矩阵、模糊集及其运算、统计方法、线性差分方程等,第二篇是模型论,介绍各种实用的经济模型,第三篇是规划论,第四篇介绍数学在质量管理中的应用。本书适合于具有中学文化程度的管理干部、管理科技人员以及有关专业的在校师生阅读。

实用经济数学

(上册)

柴根象 周世武 等编

责任编辑 龚兰方

*

电子工业出版社出版(北京海淀区万寿路)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

山东电子工业印刷厂印刷

*

开本: 850×1168毫米1/32 印张: 16.5 字数: 440千字

1988年2月第一版 1988年2月第一次印刷

印数: 1—4000册 定价: 4.30元

统一书号: 15290·565

ISBN 7-5053-0155-1/G21

序

什么是经济数学？它应当包含哪些内容？这些问题，见仁见智，恐无定论，本书也没有企图对此下一个确定的结论。然而，相信读者在阅读了本书之后，能得一些有益的启示。

本书介绍了一些数学方法，从我们对“管理科学”这门年轻的科学所获得的有限经验来看，这些都是很有用的，本书也介绍了若干已见成效的应用成果，它们印证了所述理论和方法的现实意义。

本书的特点是结合实际引入概念，通过实例阐明理论和方法的使用，叙述直观性强且带有一定的趣味性。另外，作者不拘泥于国内现有同类书籍的体系，重视了从以往经济模型出发引出数学内容以及若干有实用价值的专题。

管理科学是一门综合性、边缘性的科学，它大概不能单纯看成是一门数学学科，尽管如此，也许多数人都能同意，要系统地学习管理科学或是只要求对其略知一、二，都必须对管理科学中所使用的数学方法，有一定的了解，相信本书的出版，必能对广大的读者有所裨益，对促进这门科学在我国的传播与实际应用有所裨益，自然，这也是本书作者的最大愿望。

陈希孺

1986·6·26于北京

编 者 的 话

随着四化建设的发展，管理科学无论在理论还是在实践上都已获得长足的进步，且逐渐呈现出一种量化的趋势。四化建设需要科学管理，科学管理离不开数学知识，这已为越来越多的人所接受。本书的编写希望能从应用数学这一角度为管理科学的普及与提高起一点积极作用。

本书介绍了在经济活动及管理工作中所必需的数学方法，特别是近代国内外已见成效的应用成果。本书力图结合实际引入概念，从实际问题中抽出模型，用实例阐明使用方法，不涉及过多的理论探讨。期望能引起从事这方面工作的读者的兴趣，同时也期望对有志于深入了解、掌握本学科的读者能有所裨益。因此，本书既适合于广大科技人员、有关院校的师生，也适合于广大管理干部及自学青年。

本书的写作，预备知识由张纯清、柴根象、周世武执笔；模型论、对策论由周世武执笔；规划论由谢勉忠、张纯清执笔；质量管理、图与网络由黄礼贤执笔；经济预测、决策论由柴根象执笔；排队论由张纯清执笔。全书由柴根象、周世武两人主事。

由于我们水平有限，加之编写时间较仓促，不当及疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正，并借此感谢陈希孺教授为本书作序，感谢杨振海副教授审阅了全书。

编 者

一九八六年十一月

目 录

第一篇 预 备 知 识

第一章 矩阵的运算.....	(1)
第二章 模糊(Fuzzy)集及其运算.....	(18)
第三章 统计方法的若干注解.....	(31)
第一节 主观概率.....	(31)
第二节 随机序列.....	(34)
第三节 统计检验.....	(44)
第四章 线性差分方程.....	(50)
第一节 差分方程的基本概念.....	(50)
第二节 n 阶线性差分方程的迭代解法.....	(56)
第三节 齐次线性差分方程的解法.....	(58)
第四节 非齐次线性差分方程.....	(62)

第二篇 模 型 论

第五章 模型概论.....	(67)
第一节 模型的基本概念.....	(67)
第二节 模型的性质和建立模型的要点.....	(69)
第三节 几个经济模型简介.....	(81)
第六章 蛛网模型和其它供需模型.....	(86)
第一节 引言.....	(86)
第二节 均衡理论和蛛网模型.....	(92)
第三节 连续型供需模型.....	(103)
第四节 允许存货的供需模型.....	(105)
第七章 投入产出综合平衡模型.....	(117)
第一节 引言.....	(117)
第二节 价值型投入产出模型.....	(118)

第三节	投入产出模型的应用	(131)
第四节	完全消耗系数	(137)
第五节	实物型投入产出模型简介	(139)
第八章	存储模型	(143)
第一节	存储论的基本概念	(143)
第二节	确定性存储模型	(148)
第三节	随机性存储模型	(183)

第三篇 规划论

第九章	线性规划的基本概念	(210)
第一节	数学模型	(210)
第二节	标准形式	(215)
第三节	解的性质与基本定理	(218)
第四节	图解法	(223)
第十章	单纯形方法	(226)
第一节	单纯形法的计算步骤	(226)
第二节	例题	(233)
第三节	怎样求第一个基础可行解	(240)
第四节	对偶线性规划	(251)
第五节	灵敏度分析	(265)
第十一章	运输问题的特殊解法	(273)
第一节	图上作业法	(273)
第二节	表上作业法	(278)
第三节	不平衡的运输问题	(287)
第十二章	整数规划	(299)
第一节	问题的提出	(299)
第二节	分枝定界法	(301)
第三节	0—1型整数规划	(307)
第四节	任务分派问题	(313)
第十三章	非线性规划简介	(324)
第一节	问题的提出	(324)
第二节	黄金分割法	(328)

第三节	切线法.....	(333)
第四节	抛物线法.....	(335)
第五节	其它常用方法.....	(339)
第十四章	动态规划的基本计算方法.....	(347)
第一节	什么叫做动态规划.....	(347)
第二节	动态规划的数学模型.....	(349)
第三节	动态规划的计算方法.....	(352)
第四节	随机规划.....	(375)

第四篇 数学在质量管理中的应用

第十五章	基本知识.....	(381)
第一节	基本概念.....	(381)
第二节	质量波动的损失函数.....	(386)
第三节	正交试验设计的基本概念.....	(391)
第四节	正交实验设计的方差分析.....	(396)
第五节	SN比法.....	(407)
第十六章	参数设计.....	(411)
第一节	结构尺寸的参数设计.....	(411)
第二节	生产工艺的参数设计.....	(414)
第三节	趋小质量特性的参数设计.....	(421)
第十七章	容许差设计.....	(430)
第一节	单因素容许差设计.....	(430)
第二节	多因素容许差设计.....	(436)
第十八章	动态特性设计.....	(447)
第一节	计量动态特性设计.....	(447)
第二节	计数动态特性设计.....	(460)
第十九章	工序质量管理.....	(478)
第一节	最宜诊断间隔与诊断调节费用.....	(478)
第二节	工序诊断.....	(482)
第三节	工序的预测与校正.....	(486)
第二十章	产品检验与处理.....	(507)
第一节	不考虑误检时的产品检验问题.....	(507)

第二节	有误检时的产品检验问题.....	(508)
第三节	抽样挑选检验.....	(513)

第一篇 预备知识

第一章 矩阵的运算

由数域 P 里的 $m \times n$ 个数 a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, 排成的 m 行、 n 列的一张表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数域 P 上的一个 $m \times n$ 矩阵。组成矩阵的每个数称为矩阵的元素，位于第 i 行、第 j 列的元素称为这个矩阵的 (i, j) 元，通常用 a_{ij} 表示，例如上述矩阵的 $(2, 1)$ 元是 a_{21} 。我们用大写字母 A 、 B 、 C 、 $\dots$ 表示矩阵，有时为指明矩阵的阶数及元素，也将矩阵 A 记作 A_{mn} （或 $A_{m \times n}$ ）（或 $(a_{ij})_{m \times n}$ ）。

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

如果两个矩阵 A 、 B 有相同的行数与相同的列数，并且对应位置上的元素均相等，则称矩阵 A 与矩阵 B 相等。记作 $A = B$ ，即如果 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 且 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$)，则 $A = B$ 。

一、矩阵的加法

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

是两个 $m \times n$ 矩阵, 规定

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称这个矩阵是 A 与 B 的和。

即只有行数相同、列数也相同的矩阵才能相加。矩阵的加法适合以下规律:

- (1) 交换律: $A+B=B+A$;
- (2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- (3) 零矩阵满足: $0+A=A+0=A$;
- (4) 矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的负矩阵, 记作 $-A$ 。显然 $A+(-A)=0$ 。

矩阵的减法为 $A-B:=A+(-B)$ 。

二、矩阵的乘法

矩阵的乘法很独特, 先用一个例子来说明。

[例]

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 3 + (-2) \times (-4) & 4 \times (-6) + (-2) \times 5 \\ (-8) \times 3 + 0 \times (-4) & (-8) \times (-6) + 0 \times 5 \\ 6 \times 3 + 2 \times (-4) & 6 \times (-6) + 2 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & -34 \\ -24 & 48 \\ 10 & -26 \end{pmatrix}$$

一般设 A 是一个 $s \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

B 是一个 $n \times m$ 矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

规定

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sm} \end{pmatrix}$$

其中 AB 的 (ij) 元 $= C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

由于 A 有 s 行, 所以 i 可取 $1, 2, \cdots, s$, 由于 B 有 m 列, 所以 j 可取 $1, 2, \cdots, m$ 。由此看出 AB 是一个 $s \times m$ 矩阵。

矩阵乘法应注意以下几点:

(1) 只有左矩阵的列数与右矩阵的行数相同的两个矩阵才能相乘;

(2) 两个矩阵的乘积还是一个矩阵。乘积矩阵的 (i, j) 元等于左矩阵的第 i 行与右矩阵的第 j 列的对应元素乘积之和;

(3) 乘积矩阵的行数等于左矩阵的行数，乘积矩阵的列数等于右矩阵的列数。

矩阵的乘法适合以下规律：

$$(1) (AB)C = A(BC);$$

$$(2) (A+B)C = AC + BC;$$

$$(3) C(A+B) = CA + CB;$$

$$(4) k(AB) = (kA)B = A(kB), k \text{ 是常数}.$$

注意：一般情况下，矩阵的乘法不适合交换律。

三、矩阵的转置

将 $m \times n$ 矩阵 A 的行与列互换，得到的 $n \times m$ 矩阵，称为矩阵 A 的转置矩阵，记为 A^T 或 A' 。如果

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

〔例〕 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{则} \quad A^T = (a_1 a_2 \cdots a_n)$$

转置矩阵有下列性质：

$$(1) (A^T)^T = A;$$

$$(2) (A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(3) (kA)^T = kA^T, k \text{ 是常数};$$

$$(4) (AB)^T = B^T A^T.$$

四、几种特殊的矩阵

1. 对角矩阵

如果 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 中的元素满足条件

$$a_{ij} = 0, i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则称 A 为 n 阶对角矩阵。即有

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{主对角线以外元素均为零})$$

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & & & \\ & ka_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & ka_{nn} \end{pmatrix} \quad (k \text{ 为常数})$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & & & \\ & a_{22} + b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

可见, 如果 A 、 B 为同阶对角矩阵, 则 kA 、 $A+B$ 、 AB 仍为同阶对角矩阵。

显然, 如果 A 是对角矩阵, 则 $A^T = A$ 。

2. 数量矩阵

如果 n 阶对角矩阵 A 中的元素 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a$ 时, 则称 A 为 n 阶数量矩阵。即

$$A = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

以数量矩阵 A 左乘或右乘(如果可乘)一个矩阵 B , 其乘积等于以数 a 乘矩阵 B 。

〔例〕

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}_{n \times n} & B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ & & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}_{n \times s} \\ AB &= \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ & & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \cdots & ab_{1s} \\ ab_{21} & ab_{22} & \cdots & ab_{2s} \\ & & \cdots & \\ ab_{n1} & ab_{n2} & \cdots & ab_{ns} \end{pmatrix} = aB \end{aligned}$$

3. 单位矩阵

如果 n 阶数量矩阵 A 中的元素 $a = 1$ 时, 则称 A 为 n 阶单位矩阵。记作 E_n , 有时简记为 E , 即

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵有

$$E_m A_{m \times n} = A_{m \times n}, \quad A_{m \times n} E_n = A_{m \times n}.$$

对于 n 阶矩阵 A , 规定 $A_0 = E$ 。

4. 三角形矩阵

如果 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 中的元素满足条件

$$a_{ij} = 0, \quad (i > j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则称 A 为 n 阶上三角形矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果 n 阶矩阵 $B = (b_{ij})$ 中的元素满足条件

$$b_{ij} = 0, \quad (i < j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则称 B 为 n 阶下三角形矩阵, 即

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

若 A 、 B 为同阶同结构三角形矩阵, 则 kA 、 $A+B$ 、 AB 仍为同阶同结构三角形矩阵。

五、矩阵的分块

矩阵运算中的一个重要技巧是矩阵的分块，所谓分块是将一个矩阵分成若干个“子块”，即把大矩阵看成是由一些小矩阵（“子块”）组成，这就是矩阵的分块。

〔例1〕 设

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

把 A 的行分成两组，前三行为第一组，后两行为第二组，再把 A 的列分成两组，前三列为第一组，后两列为第二组，则矩阵 A 被分成四小块，其中每一小块里的数按原次序组成一个子矩阵

$$E_3 = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad A_1 = \left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{array} \right)$$

$$0 = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad 4E_2 = \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{array} \right)$$

于是我们可以把 A 看成是由这四个子矩阵组成。即

$$A = \left(\begin{array}{cc} E_3 & A_1 \\ 0 & 4E_2 \end{array} \right)$$

象这样将一个矩阵分成若干块（称为子块或子阵），并以所分的子块为元素的矩阵称为分块矩阵。

给了一个矩阵，可以根据需要把它写成不同的分块矩阵。