高等院校规划教材

主编 汪永高 贾敬

DAXUE
WENKE
GAODENG
SHUXUE

大学文科高等数学

煤炭工业出版社

高 等 院 校 规 划 教 材

大学文科高等数学

汪永高　贾敬　主编

煤 炭 工 业 出 版 社

内 容 提 要

该书讲述了数学命题和证明方法、微积分基础、线性代数简介、统计方法、概率论和数理统计初步、数学建模浅说等理论和内容。该书内容的广度与深度恰当，实用性强，通俗易懂，可作为文科专科数学课程教材，对于一般读者也有一定的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

大学文科高等数学/汪永高，贾敬主编．—北京：煤炭工业出版社，2003

高等院校规划教材

ISBN 7－5020－2267－8

Ⅰ．大…　Ⅱ．①汪…②贾…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 004928 号

煤炭工业出版社　出版发行

（北京市朝阳区芍药居 35 号　100029）

网址：www. cciph. com. cn

煤炭工业出版社印刷厂　印刷

*

开本 787mm ×1092mm 1/16　印张 9 1/2

字数 222 千字　印数 1—1,200

2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷

社内编号 5038　定价 20.00 元

前　　言

《大学文科高等数学》的编写目的是使文科专业的大学生在了解数学文化和思维方式的基础上，掌握数学方法的应用，使其成为文科专业学生学习的思维基础和工具。

在日益强调文化素质教育的今天，把人类所创造的光辉灿烂的数学成就展示给文科专业的学生，使之能够对以往所学的数学知识有所整理和回味，从而提升对数学的理解和认识层次是非常必要的。本书的第1，2章的编写就承载了这方面的部分任务。

数学的学习也是对真善美的一种追求方式，甚至其理性的、严谨的思维和概念中准确的用词都是社会科学研究中应当予以借鉴和学习的。因此，我们相信文科专业的学生通过数学课程的学习一定会得到以下几个方面的收获：

一是对数学所讨论的内容有更加明确的认识。

二是了解数学这一学科的历史和作用。

三是建立更加理性的思维方式，从而在今后的学习和工作中自觉地追求理性精神。

四是学会用基本的数学方法解决一些实际问题；学会如何把实际问题用数学的语言来描述，用数学的原理来解释。

本书力求通俗易懂，尽量以优美的语言叙述有关的内容；避开理论推导与证明，尽量使每一章的内容独立成篇，便于教师组织教学，使学生理解数学精神、学会数学思维方法、具备运用数学知识的能力。

本书在编写的过程中得到华北科技学院教材建设委员会的大力支持。由汪永高和贾敬两位老师执笔，经过长期的酝酿和准备，终于成书。王文祥、刘海生、王涛、王昕为本书选编了习题。

本书在编写过程中广泛参考了有关专家、学者的论著，在此谨向有关作者表示真诚的谢意。

由于水平所限，书中难免存在缺点甚至错误，敬请读者批评指正。

编　者

2003.2

目　　录

1 绪　论

1.1 数学研究的内容

数学研究的内容分为两大部分，一是初等数学，一是高等数学．

初等数学主要研究常量的空间及数量关系．它主要包含几何学与代数学两部分内容．几何学是研究空间形式的学科，而代数学是研究数量关系的学科．

高等数学通常指大学本科应学习的数学内容．通常由以下几方面的内容组成．

微积分：研究变速运动及曲边图形的求积问题．

线性代数：研究求解线性方程组及相关的问题．以此为基础的线性规划问题已成为运筹学的重要分支，应用十分广泛．

概率论与数理统计：主要研究随机现象，并依据已有的数据进行推理．

对于不同院校，不同系别和专业来说高等数学的内容还可能包含高等代数、微分方程等内容．这些学科构成了高等数学的基础部分，为我们提供了用数学方法建立研究自然界奥秘的模式，有助于形成理性的思维方式．

1.2 数学的特点

在数学这一学科的发展和应用过程中基本形成三个公认的特点，即高度的抽象性、严密的逻辑性（或精确性）、应用的广泛性．

高度的抽象性是在人类认知过程中逐步形成的．例如，我们从对平面、立体三维空间的认识，抽象出 n 维空间以至无限维空间的概念；由具体事物的相加抽象出数量以至函数相加的概念．当数学的研究对象超越了具体事物，仅对其保留量之间的相互关系、运算法则进行推理和判断时，它的抽象性就突显出来了．

严密的逻辑性是数学发展过程的必然．当数学直观和猜想不能令人信服时，给予数学结论的条件和范围以准确的界定，能够保证所讨论的数学结构和关系与事实相符合，从而形成学科内在的严密要求，而这一要求就是由学科的内部的公理和公设或已经得到证明的结论加以严格的论证．例如，微积分中极限概念的描述使得其课程中关于函数连续、可导的概念在逻辑上严谨，在结构上紧密，其真伪性不会因人而异．

数学应用的广泛性已经被其他学科中所取得的一个又一个成就所证明．17 世纪伟大的科学家牛顿发现了数学的思维方式就是研究自然万物的思维方式，因而将其重要的论著命名为“自然哲学的数学原理”．19 世纪，英国物理学家麦克斯韦由实验建立起电磁现象的规律，并表达为“方程的形式”，他用纯数学的方法从方程推导出电磁波存在的可能性，并推断电磁波以光的速度进行传播．据此，他提出了光的电磁理论，并被后来者不断地论证和发展，形成了全面的理论体系．近几十年，计算机的普及已经使各学科发展的“数量化”特

MAH07/08

点越来越明显，甚至在文科研究中也借助于数学的成果和数学的方法，出现了诸如计量历史学、数理语文学、数理心理学等文理交叉的新学科.

1.3 数学发展简史

数学从古至今的发展史，是人类认识自然过程的历史，是人类智慧的发展史.它大致可分为四个时期。

1.3.1 数学的产生、形成时期

这一时期是人类建立最基本的数学概念的时期.它可分为两个阶段：数学史前阶段和最初的数学知识积累阶段.

数学史前阶段没有留下任何形式的记载和遗迹.但人类还是从生产、生活实践中逐渐产生了自然数的概念和计算方法，认识了最简单的几何形式.在这一阶段中，数学发生了第一次抽象.如人们已经能够用结绳或小石块、果核等标记被数物品，或者进行简单的运算.在许多民族中，一些叙述句用来表达某些数字，如“手”“翅膀”表示数“二”，“驼鸟的脚趾”表示数“四”，“两只手上的十个手指和一只脚上的一个脚趾”表示数“十一”等等.为了使得数字的表达更简单化，也把数字“十一”简化为“脚的一趾”.我们注意到，这里已经出现了计算单位级别的雏形，“手”“双手”“一只脚”“人”可以分别表示“五”“十”“十五”“二十”，这里“手指”相对“手”来说是低一级的单位.

数学知识的积累阶段，是随着人类对生存环境的认识、劳动者的分工和财富积累而发展起来的.在一些自然条件优越的地区形成了一批奴隶社会形态的民族部落和国家.这些部落或国家在发展贸易、农业生产、航海运输等项事业时发展了数的写法，基本的几何图形、货币单位、天文历法等数学成就.例如，古埃及人用逐次加倍的方法进行乘法运算；在古代的中国用简单的符号来表示数：𝍠=1，𝍡=2，𝍢=3，𝍣=4，𝍤=5，𝍥=6，𝍦=7，𝍧=8，𝍨=9，0=0.

1.3.2 数学常量理论（或初等数学）发展时期

在这一时期主要形成了算术、几何、代数、三角等初等数学的分支.如欧几里得的《原本》写成于两千多年前，其中的一般内容与叙述特征与现在的几何教科书非常相近，是当时最光辉的著作.

在古希腊，泰勒斯学派为平面上线与角的理论奠定了基础，而毕达哥拉斯学派则在论证数学方法方面发挥了很大的作用.毕达哥拉斯学派认为，数是现实的基础，是严整性和次序的根据，是世界的法则和关系，是一切被决定事物的条件，因而探索出数的几何形式的表示法，并由数的理论得出许多作为几何想法的结果而产生的结论；反之，算术的关系也导致某些几何上的结论.例如，“两个量的和的平方”用代数式来表示为

$$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2, \tag{1-1}$$

而其几何作图也可证明其结论的正确性.

作正方形，使它的边长等于线数 a，b 的和.过线段的分点作直线平行于正方形的边，由

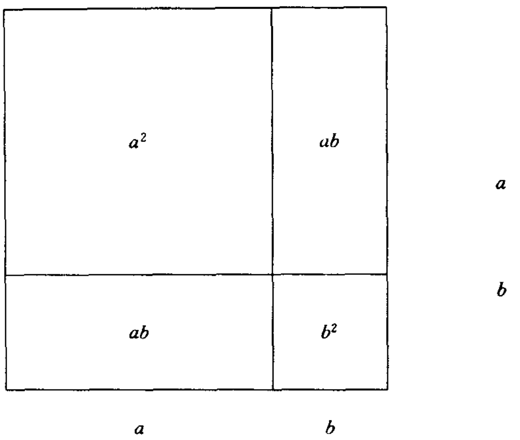

图 1-1

图 1-1 中所标注的面积即可得到式（1-1）.

在这一阶段，中亚细亚的数学家找到了求根和一系列方程求近似解的方法．在我国的数学家也早已经会解简单的不定方程，知道了几何中的近似计算及三次方程的近似解法．笛卡儿的贡献在于将数学的表达和运算用现代的符号系统来表示，从而为韦达在 1591 年进一步作出表示已知数的字母符号和表示未知数的字母符号奠定了基础．在欧洲出现了“组合论”和“牛顿二项式定理”的普遍公式、级数及纳皮尔的对数理论和布里格斯的十进对数表后，初等数学对常量的研究体系基本建立了起来．

1.3.3 变量数学时期

16 世纪，随着资本主义的发展和兴盛，大工业生产的基本条件是机器的应用，而制造、使用机器的过程，出现了对各种变化量之间的关系和各种变化过程的研究．数学的研究对象，也从不变量的研究逐渐转向变化量的一般性和变化量之间相互依赖关系的研究，因而产生了变量和函数的概念．由于数学研究对象的扩展，导致了数学向变量时期的过渡．

变量数学时期可以大致分为数学分析的出现期和发展期．

数学分析是数学中专门研究函数的领域，它的出现与笛卡儿的“几何学”，与牛顿和莱布尼兹的“微积分”有非常紧密的关系．

“几何学”奠定了解析几何的基础，解析几何则利用代数的方法研究几何对象．因此，它可以解决下列问题：

①通过计算解决作图问题；

②求由某种几何性质给定的曲线的方程；

③利用代数方法证明新的定理；

④从几何的角度来看代数方程．

牛顿在《曲线求积论》和《流数术和无穷级数方法及其对几何曲线的应用》中叙述了数学分析的方法．牛顿把我们今天称之为变化量的量叫做流动量，运动的速度叫做流数（或流动率），而我们叫它导数．牛顿解决了由已知的流动量求流动率及由已知的流动率求

流动量的问题，并由此准确地建立了微分和积分之间的联系．莱布尼茨则几乎与牛顿同时以求函数的无限小增量为出发点，得出了函数取得增量是自变量有无限小的变化的结果，并称之为函数的微分，用字母 d 表示．他还引进两个无限接近的变量值之间的差作为微分的概念；用符号“$\int$”表示以曲线为界的图形而得到积分的概念等等．莱布尼茨采用符号的方法建立了数学分析惟一的符号体系，并使得分析的运算更加方便．同微积分一起发展起来的级数理论、微分方程论、微分几何等构成了数学分析的基本内容．而复变函数论则使得分析的方法推广到了复数中，成为分析的重要分支．概率论的出现，则为研究大量“随机”现象的规律提供了数学方法，给出了偶然中的必然规律．分析的发展使其成为数学的主要部分，它也向数学的古老领域（如数论、几何等）中发展．通过分析的思想，数学才能在自然科学和技术的发展中成为精确表述其规律和解决其问题的有力工具．19 世纪，随着德国数学家康托尔所建立的集合论，数学的发展进入了新的阶段．

1.3.4 现代数学时期

现代数学发展的特征是它的主要分支：几何学、代数和分析发生了深刻的变化．几何学研究的空间种类变为无限多，而现实世界的某些形式成为几何学的研究对象．因而出现了高维欧几里得空间、射影空间、拓扑空间等等．现代代数不仅仅研究数及一般性质的量，还研究向量及其不同种类的移动的运算．代数运算范围已扩大到其运算对象既不是数，也不是量．代数的现代方法的应用逐步渗透到分析、物理、结晶学等学科中，同时它也在发展中得到很大的应用，如代数方程和微分方程．现代分析的形成深受集合论的影响，实变函数论、泛函分析等新的数学分支得到了很大发展．以哲学历史和逻辑原理为基础的数理逻辑正在科学和技术中得到应用．

1.4 文科大学生应具备数学素养

文科大学生学习数学是由现代人的基本素质要求所决定的．如果我们缺乏起码的数学素养，将成为很难弥补的文化缺憾，从而无法理解数学的价值，无法欣赏数学的美丽，无法得知数学应用的门径．

1.4.1 认识数学的理性和抽象源于实践

人们往往认为数学是非常理性和抽象的，他们的理由在于某些数学家是凭天才的头脑思维．其实，从数学发展的各个时期来看，数学都不同程度地来于实践．从古代人们对数的记法，到因测量土地的需要产生了面积的计算及天文历法的需要产生了初等数学；大机器生产和研究变速运动，推动了微积分的产生；近代科技发展带动了信息学、分形几何等数学分支的出现．因此，实践的需要是数学发展的动力．

当数学将实际中的现象抽象为理论时，一定会在问题的提出、方法的选择、结论的提示等方面以几何直观或实际现象为依据．如导数概念的提出是以物体变速直线运动的瞬时速度作为例证的．数学的理性思维也决不会停留在现实的数量关系与空间形式之上．数学会最大限度地探索非直观的一切数量关系和空间形式．试想，如果没有实数的概念，我们怎样描述连续变化的实数呢？又怎样产生极限的理论，从而建立微积分学呢？如果没有非

欧几里得几何的创立，又怎么能用几何理论来展示爱因斯坦相对论？大量的事实表明，数学理论的应用是这些理论的创始人始料不及的．数学发展的直接动力还是来自实践中的应用，并且可能远远地超出应用的界限，最终回到实践中去．

1.4.2 感悟数学的思辩特性

在初等数学发展时期，多数数学家认为世界万物是不变的常量，因而数学研究的对象是常量的关系和不变的空间形式．当笛卡儿将代数与几何结合起来形成解析几何以后，它就具备了表现运动和变化的特性，为微积分的产生奠定了基础；而微积分却抛弃了把初等数学的结论作为永恒真理的观点．

事实上，数学结论的真理性是相对的．象我们所熟知的 $1+1=2$ 在初等数学中是绝对的真理，而在布尔代数中则为 $1+1=0$！在数学研究范围随着新问题的出现而不断扩大的各个时期，数学家们如果没有敢于向前辈的思想、方法、结论挑战的勇气，没有开拓创新的精神，数学就绝不会像今天这样具有活力．

数学的理论之所以严密，是因为经过长时间知识积累到了一定程度后，理论就要求把表面看来较为散乱的结果用某种体系的形式来表现．因此，为了使理论尽可能地包括最一般、最新发现的规律，以形成新方法、创造新概念，往往需要对已有的结果（或结论）进行再认识、再审视、再思索；即使数学理论发展到一个较为成熟的阶段后，也不是认识问题的终结．现有的理论仍有可能被更深刻的认识、更一般的描述所替代，这就使得数学在不断更新的过程中发展．

在数学的研究对象中，充满了矛盾的对立面：直线与曲线，有限与无限，无穷小与无穷大，微分和积分…….对于这些问题的研究，我们不但可以体会到理论上、概念上的辩证思维，而且也能运用到方法上、技巧上的辩证互动，从而使得学习数学的过程，也是学习辩证法的过程．从这个意义上讲，数学家和哲学家都在做同样的事情，那就是在认识的前提下，找到最普遍、最一般的规律．

1.4.3 欣赏数学的美丽

学习数学的过程中也会有审美活动吗？数学也有它的美丽供我们欣赏吗？回答是肯定的．

数学的美丽主要体现在内容和方法两个方面．

1.4.3.1 内容的美丽

1）回文素数

它是这样定义的：将它的各位数码完全倒过来写，仍是素数的素数．例如，19 是素数，91 不是素数，因此 19 不是回文素数；17 是素数，71 还是素数，因此 17 是回文素数．人们可以怀着极大的兴趣去寻找更多的回文素数，到现在得知的 2 位数中回文素数有 4 对，3 位数中有 13 对，4 位数中有 102 对……到底有多少对回文素数，还有待进一步找寻．

2）黄金分割

正五边形对角线长与边长之比为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，而边长与对角线之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 两个数的积和差都是 1. 因此，它们是方程

$$x(x+1)=1 \quad 或 \quad x^2+x-1=0$$

的解.

设某线段 AB 的长度是 1，C 为 AB 上的一点，且

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AB}{AC}$$

若 AC 的长度是 x，则上式为

$$\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x},$$

即

$$x^2+x-1=0.$$

我们看到了与前面那个方程一样的方程，由此我们也就知道

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

是 AC 的长度；

$$1-x=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

是 CB 的长度. 点 C 分割了线段 AB，正好分割成

$$\frac{小段}{大段}=\frac{大段}{全段}.$$

点 C 叫做 AB 的“黄金分割”，其比值为 0.618.

人的躯干部分的宽与长的比接近 0.618；而名曲中，乐章的高潮往往出现在全曲的 0.618 处.

3）调和级数的无限大

将 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 称为调和级数.

当 n 越来越大时，后面加上的项的值越来越小，最后，和是否会接近某一定数呢？回答是否定的，其和是无穷大. 因为我们可以把级数分割成无穷多个片段，并且使每一段都大于 $\frac{1}{2}$：

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{32}>\frac{1}{2},$$

……

从以上几个简单的例子中，我们从内容上窥到了数学美丽的一斑，它能引起我们的联想和探究，往往会得到始料不及的、令人惊奇的结果.

1.4.3.2 方法的美丽

1）归纳法

归纳法的含义是：假定的一个命题 P 与正整数 k 有关，于是可将 P 写成 $P(k)$，如果

$P(k)$ 满足条件：

(1) $P(1)$ 是真的（即 P 对 $k=1$ 是真的）；

(2) 若 $P(n)$ 是真的，则 $P(n+1)$ 也是真的，那么，$P(k)$ 对所有的正整数都是真的．

从上面的含义我们可以看到，归纳法是针对无限命题而给出的有限步骤的方法．通过这种方法的应用，我们会发现无限其实是由有限延伸出去，而达到无限的原理却如此简单．

2）反证法

用反证法证明某个命题时，就是在论证：这个命题不能不成立．具体的过程是假定命题的结论不成立，然后通过一定的推导得出矛盾，从而说明，结论不成立是不可能的．我们要推导得出什么矛盾呢？一是推导出与已知条件冲突的命题；其次或是推导出与公理矛盾的命题，或是推导出与已有定理或临时假定相冲突的命题；还有，就是推导出自相矛盾的东西．

如，设有 10 本书，共 3 类，记为 A 类、B 类、C 类．证明至少有一类书有 4 本或 4 本以上．

假设 A，B，C 三类书都不超过 3 本，则所有的书加起来就不超过 9 本，与条件共有 10 本书相矛盾．所以，至少有一类书超过 3 本，即 4 本或 4 本以上．

3）抽象法

抽象法，就是抓住问题的最实质的方面，而舍去对问题暂时无关的方面，从而更加有效地推动问题的研究．其实抽象总和具体相依相伴，只有对具体问题有了深入认识，才能更好地抽象；同时也因为抽象而能更好地把握具体．

例如，我们可以将校园中的建筑物用点的形式画到一张图上，而只要有路连接，就可以在表示两建筑物的点之间连接一条线，而不关心连线的长短和曲直．这样得到的一张图就可以看做是校园地图的抽象．

抽象法不是数学所独有的，而数学的典型抽象方法能使人实现从直观认识到抽象认识的飞跃，达到抽象思维的认知高度．当我们欣赏数学的美丽时，就不能对数学的抽象法视而不见，麻木不仁．

1.4.3.3 数学美的多样性

人们对美的形容穷其辞藻，而从美的不同侧面对美的理解和感觉是不一样的．大致上，对数学的美丽可以从以下四个方面来欣赏．

1）简洁之美

数学的简洁之美，表现在命题的表述和论证上，表现在其逻辑体系上，表现在其表示符号上，表现在其思维经济上．

例如，当 x 是无穷小时，$\sin x$ 也是无穷小；但当 x 是无穷小时，$\frac{\sin x}{x}$ 却不是无穷小，且非常的接近于 1. 我们用

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

来表示，就可以省略文字的述叙，实现了语言的简洁，达到了思想的深刻．

再如，莱布尼茨给出了下面优美的式子：

$$\int \mathrm{d}y = y.$$

这一式子反映了积分与微分之间的本质关系，有效地实现了微分与积分的互逆运算，同时，我们无需想象而直接得出结果．

2）对称之美

在生活中，我们可以看到许多对称的建筑物、对称的图画等等．几何图形上的对称通常有点对称、线对称、面对称等形式．如球形，既是点对称的，又是线对称的，还是面对称的．正是由于这一点，古希腊的学者认为“一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形”．

对称性也表现在许多公式和运算之中．例如，二项展开式中，由于二项式系数 $C_n^0 = C_n^n$，$C_n^1 = C_n^{n-1}$，… 则可以写成对称的形式：

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^0 b^n,$$

又如，当 $\exp x = e^x$ 时，有

$$\log \prod_i x_i = \sum_i \log x_i,$$

$$\exp \sum_i x_i = \prod_i \exp x_i.$$

上述运算关系，也体现出其特有的对称之美．

尽管对称往往表现为一种形式上的美感，但在数学中，值得注意的有趣现象是对简洁与对称的追求往往导致结论的准确．

3）和谐之美

和谐之美往往与整齐之美、统一之美相提并论．如全等三角形与相似三角形两个概念，在仅仅考虑三角形三个角是否对应相等时，我们反映的概念是两个三角形相似的问题；而再考虑三条边的相等与否才能想到全等的概念．因此我们有理由认为概念的发展是和谐的、统一的．再如，在平面中边长为 a，b 的矩形的对角线 c 可以表示为

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

在空间中边长为 a，b，c 的立方体的对角线的长度 d 也可表示为

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

这一现象可以推广到更高维数的空间中．

由此我们看到，当新的结构或形式出现的时候，只有它在新的过程中形成新的和谐与统一，才能使人们更容易接受并使其自身有更快的发展．

4）奇异之美

奇异是引起探究的动力，正是因为数学蕴含着那么多的奇异，才吸引了无数天才的或非天才的人们的注意力．挖掘出奇异背后的东西，可以激发人们的兴趣，从而产生无可替代的美感．

例如，费马问题．

当 $n \geqslant 3$ 时，不定方程

$$x^n + y^n = z^n$$

没有正整数解．

可以说费马猜想源于不定方程

$$x^2 + y^2 = z^2$$

有无穷组解这一事实．由此而推出的不定方程

$$x^3 + y^3 = z^3$$

有正整数解吗？回答是没有．

后人将不定方程推广为

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{n-1}^n = x_n^n,$$

并证明了 $n \geqslant 4$ 时，不定方程有无穷多组正整数解．这个结论与费马猜想相去甚远，实在使人感到意外和惊奇．

2 数学命题和证明方法

本章的主要任务是介绍数学中出现的形式逻辑知识，以便我们在学习今后的课程时能自觉地、深刻地理解和认识这方面的知识，帮助我们学好数学．

2.1 概念及其内涵与外延

数学中的“概念”是指用来表达某种准确含义的“词”．这个“词”可以是文字语言，也可以是数学语言．这个“词”的含义要恰好表达我们需要的含义，不能多也不能少．例如，“三角形”表示以三条线段为边的平面图形，其他词的表述都不如“三角形”那么准确．

概念的内涵是指表达该概念特征的一切属性的总和．例如，“菱形”的内涵是三个特征属性的总和：①四边形；②两组对边互相平行；③四边相等．

概念的外延是指适合概念的一切对象的全体．例如，“三角形”的外延中包含一切类型的三角形：①直角三角形；②等边三角形；③钝角三角形……

概念的外延和内涵的关系是非常密切的．如果概念的内涵扩大了，那么它的外延就会缩小；反之也一样．例如，“直角三角形”的内涵大于“三角形”的内涵，而其外延则反之．

若概念 P 的外延包含在概念 Q 的外延内，则概念 Q 称为**种**，而概念 P 称为**属**．

种和属是相对的．同一概念由与它比较的概念的外延来决定，可以是种，也可以是属．例如，平行四边形对菱形来说是种，而对四边形来说是属．

一般情况下，概念是不可比较的，究其原因是其种属关系不可比较．

2.2 等价关系与分类

数学中，我们把集合 A 上的一个**等价关系**（用符号～表示）定义为集合 A 元素之间的一种关系，若 a，b，$c\in A$，下列条件成立：

①$a\sim a$（反射性）；

②$a\sim b\Rightarrow b\sim a$（对称性）；

③$a\sim b$，且 $b\sim c\Rightarrow a\sim c$（传递性）．

例如，在全体四边形中，若 a，b 都是平行四边形，则有等价关系 $a\sim b$.

对集合 A 来说，另一个有意思的概念是**分类**（或划分）．

定义：如果集合 A 是彼此不相交的子集合 A_i 的并集，则称 $\{A_i\}$ 是集合 A 的一个分类（或划分）．

例如，“三角形”这一集合，可以分类为“锐角三角形”“直角三角形”“钝角三角形”，分类的依据是三角形最大内角的量．

由上面的例子可以看出，对任意集合的正确分类应满足两个基本要求：

①分类是详尽无遗的；

②分类是有一定的依据来进行的．

例如，“三角形有锐角三角形，直角三角形，等边三角形”这一分类，违背了将最大内角量做为依据的分类方式．因此，是错误的分类．

2.3 定　　义

什么是定义呢？就某个概念来说，列举概念的基本属性就是给这个概念的定义．

给出定义一般要满足两个基本要求：

①在定义内指出的不是内涵的全部属性，是基本的属性；

②定义不能是恶性循环的．

所谓基本属性是相对于某些概念的内涵中包括这样的属性，即可由基本属性推导出来的属性（也可叫做非基本属性）而言的．例如，“平行四边形”有属性：①四边形；②两组对边互相平行；③对边相等；④对角相等；⑤对角线平分，等等．属性“两组对边互相平行”和“四边形”是其基本的属性，其他属性都可以由这两个属性导出．

所谓定义不能恶性循环，即不能用这样的概念来定义一个新概念．例如：“直角就是90°的角，而1°的角是直角的1/90”．

在定义一个新的概念时的依据应是以前已知的概念．如此向前推，应当存在一些在它们前面不再有任何已知的概念．这些概念被称之为无定义概念（或原始概念）．在描述这样的概念时，往往列举它们的特性来代替定义．例如，“直线”这一概念所具有的特性是过两个已知点可以画一条直线．

2.4 公　　理

公理也叫做公设．在数学理论中，不加以证明而接受的命题就是公理．

与原始概念一样，公理就是一些原始命题．在原始命题前面不再有已证明的定理．

在数学中每个门类中有不同的公理体系（公设体系）．它们是描述这一理论在反映现实世界中的数量关系和空间形式的最基本、最一般的性质．

例如，欧几里得几何的5个公理为：

①连接任何两点可以作一直线段；

②一直线段可以沿两个方向无限延长而成为一条直线；

③以任意一点为中心，通过给定的另一点可以作一圆；

④凡直角都相等；

⑤过已知直线外的已知点只能作一条直线平行于已知直线．

虽然公理都没有证明，但它们的真实性都要在实践中受到考验．当我们运用公理及其推论总能在实际活动中找到正确的方法、得到正确的结果，那么公理反映的现实世界中的最基本的性质就是千真万确的．