台港及海外中文报刊资料专辑

基础科学

KX

第 2 辑

1987

书目文献出版

出版说明

由于我国"四化"建设和祖国统一事业的发展，广大科学研究人员，文化、教育工作者以及党、政有关领导机关，需要更多地了解台湾省、港澳地区的现状和学术研究动态。为此，本中心编辑《台港及海外中文报刊资料专辑》，委托书目文献出版社出版。

本专辑所收的资料，系按专题选编，照原报刊版面影印。对原报刊文章的内容和词句，一般不作改动（如有改动，当予注明），仅于每期编有目次，俾读者开卷即可明了本期所收的文章，以资查阅；必要时附"编后记"，对有关问题作必要的说明。

选材以是否具有学术研究和资料情报价值为标准。对于反对我四项基本原则，对我国内情况进行捏造、歪曲或对我领导人进行人身攻击性的文章，以及渲染淫秽行为的文艺作品，概不收录。但由于社会制度和意识形态不同，有些作者所持的立场、观点、见解不免与我们迥异，甚至对立，或者出现某些带有诬蔑性的词句等等，对此，我们不急予置评，相信读者会予注意，能够鉴别。至于一些文中所言一九四九年以后之"我国"、"中华民国"、"中央"之类的文字，一望可知是指台湾省、国民党中央而言，不再一一注明，敬希读者阅读时注意。

为了统一装订规格，本专辑一律采取竖排版形式装订，对横排版亦按此形式处理，即封面倒装。

本专辑的编印，旨在为研究工作提供参考，限于内部发行。请各订阅单位和个人妥善管理，慎勿丢失。

北京图书馆文献信息图务中心

基 础 科 学 （2）

——台港及海外中文报刊资料专辑（1987）

北京图书馆文献信息服务中心编辑

季啸风　李文博主编

李夏波　选编

书目文献出版社出版

（北京市文津街七号）

北京百善印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

787×1092毫米　1/16开本　$5\frac{1}{2}$印张　141千字

1987年10月北京第1版　　1987年10月北京第1次印刷

印数 1—3,000册

ISBN 7—5013—0264—2/N·7

（书号 7201·223）　定价 1.55元

〔内部发行〕

目　　次

一種log 2無窮級數的推廣研究(上)

林建宏

零、前言

一般數學文獻對於 psi 函數$\psi(x)$（另稱 digamma 函數）的處理，均從定義下手，也就是根據式子

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{d}{dx}\log\Gamma(x)\ ,\ x>0$$

作爲基礎，利用 gamma 函數 $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ 的種種性質，研究 psi 函數。

本文將不採取以上定義的方式，而從log2另一種特殊形式的無窮級數爲着眼點，定義一函數 $\varphi(x)$，加以推廣分析。應用 gamma 函數的一些主要性質，推導出 $\varphi(x)$ 與 gamma 函數的對數導數相關的式子，並利用 $\varphi(x)$ 間接地把 psi 函數的一些重要特性，介紹給讀者。

由於常用數學公式表列出 psi 函數的特殊值不多，週有特別用途時，甚感不足。於是，經過筆者一番直接計算，得出許多 psi 函數的特殊值，特將計算結果列於文中，供讀者參考。同時，我們也探討兩個與 $\varphi(s)$ 有關的積分

$$\int_0^\infty\frac{xdx}{(e^x-1)^s}\ ,\ \int_0^\infty\frac{x[\log(e^x-1)]^n}{(e^x-1)^s}dx$$

並給出一些計算結果。

還有，普通微積分的教本，常遇到$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots\cdots$或 $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-+\cdots\cdots$等形式的無窮級數，但求解方法無規律可循。本文將針對這類型的無窮級數，利用與 $\psi(x)$ 有關的函數 $\beta(x)$，求解出許多不常見的無窮級數之特殊值。

一、初步分析與推廣函數

相信學過微積分的讀者，一定很熟悉下列式子

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots$$

欲得此式，我們將底下的等式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots,\ |x|<1$$

由0到1直接積分即得。我們不擬深究這個式子，而專注於 log2 的另一種特殊形式。

今考慮 $z \in C$，且除 $z=1$ 外，z 均在單位圓盤 $|z| \leqslant 1$ 上，則

$$(1.1) \quad \log\frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots\cdots$$

（證明可在任何一本複變函數的書上找到。）假設 $0<\theta<\pi$，根據式子 $\log z = \log|z| + i\arg z$，於(1.1)式中，令 $z=e^{2i\theta}$，故知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2in\theta}}{n} &= -\log(1-e^{2i\theta}) \\ &= -\log|1-e^{2i\theta}| \\ &\quad -i\arg(1-e^{2i\theta}) \\ &= -\log(2\sin\theta) \\ &\quad + i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{aligned}$$

將上式等式兩號取實部，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n} = -\log(2\sin\theta),\ 0<\theta<\pi$$

由恒等式 $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ 得知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n} &= -\log 2 - \log(\sin\theta) \\ &= -\log 2 - \frac{1}{2}\log(\sin^2\theta) \\ &= -\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-\cos^2\theta}\end{aligned}$$

顯然，(1.1)式使得上式

$$= -\log 2 + \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta + \frac{\cos^4\theta}{2} + \frac{\cos^6\theta}{3} + \cdots\right)$$

即

$$(1.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n} = -\log 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos^{2n}\theta\ ,$$
$$0<\theta<\pi$$

設 $u_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n\theta d\theta$。應用分部積分法，若 $n \geqslant 2$，則

$$\begin{aligned}u_n &= (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta d\theta \\ &= (n-1)(u_{n-2}-u_n)\end{aligned}$$

故得 $nu_n = (n-1)u_{n-2}$。因 $u_0 = \frac{\pi}{2}$，所以

$$u_{2n} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

現將(1.2)式由0到 $\pi/2$ 逐項積分，並利用上面結果可得

$$\frac{\pi}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)$$

此式兩端同乘 $4/\pi$ 即得

$$(1.3) \quad 2\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}\right)$$

這個公式也可由其他方法獲得，請參閱〔3；p.83，5〕。

由(1.3)式，我們很清楚看出下式亦成立

$$(1.4) \quad 2\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n-1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)$$

這個無窮級數就是我們在前言裏，曾提到的 log 2 之另一種特殊形式。我們的興趣是考慮將上式各括弧中的分子½，推廣至任意實數 x，經過一番研究，會發現推廣後的無窮級數，竟與 gamma 函數的對數導數相關，底下是研究過程。

首先，我們以 x 取代 (1.4) 式各括弧中的 $\frac{1}{2}$。令 $x=-t$，$t\geqslant 0$，則

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}(1+\frac{t}{n})(1+\frac{t}{n-1})\cdots\cdots\cdots$$

$$(1+t)\geqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}$$

當 $m\to\infty$，由於 $\Sigma_{n=1}^{\infty}1/n$ 發散，因此 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(1+t/n)\cdots(1+t)/n$ 亦發散。故祇剩 $x>0$ 的情況對我們有意義可言。討論之前，先列出 gamma 函數的一些性質，請參閱〔6；ch.12，7；ch.11，8〕。

gamma 函數的性質：

若 $x>0$，$y>0$，$0<\rho<1$，n 爲正整數，則

(1.5) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，$\Gamma(1)=1$

(1.6) $\Gamma(n+1)=n!$

(1.7) $\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)=\dfrac{\pi}{\sin\rho\pi}$

(1.8) $\Gamma(x)=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}\,[1+o(1)]$

(1.9) $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{n})\cdots\cdots\Gamma(x+\frac{n-1}{n})$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-nx}\Gamma(nx)$$

(1.10) $\log\Gamma(x)=-\log x-\gamma x$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}[\log(1+\frac{x}{n})-\frac{x}{n}]$$

(1.11) $\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

其中

$$\gamma=0.577215664901532\cdots\cdots$$

即 Euler 常數。令

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots\cdots(1-x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x)\ ,\ x>0$$

此處 $\lambda_n(x)=\Pi_{k=1}^{n}(1-x/k)/n$。由實數的有序性質知：若 $x\in(0,\infty)$，則存在一正整數 m，使得 $(m-1)<x\leqslant m$。討論 $x=m$ 與 $(m-1)<x<m$ 兩種情形。設

$$\xi_m=\xi_m(x)=\sum_{n=1}^{m-1}\lambda_n(x)\ ,\ \xi_1=0\ ,$$

$$\mu_m=\mu_m(x)=\sum_{n=m}^{\infty}\lambda_n(x)$$

(a)當 $x=m$，很容易看出

$$\lambda_{m'}(x)=\frac{1}{m'}(1-\frac{x}{m'})\cdots(1-\frac{x}{m})\cdots(1-x)$$

$$=0\ ,\ \forall m'\geqslant m$$

因而

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{m-1}\lambda_n(x)+\sum_{n=m}^{\infty}\lambda_n(x)=\xi_m$$

(b)對於 $(m-1)<x<m$ 的情況，我們有

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{m-1}\lambda_n(x)+\sum_{n=m}^{\infty}\lambda_n(x)$$

$$=\xi_m+\mu_m$$

綜合(a)，(b)得

$$\varphi(x)=\begin{cases}\xi_m & 若\ x=m\\ \xi_m+\mu_m & 若\ (m-1)<x<m\end{cases}$$

由於 ξ_m 祇含有限項，且每一項 $\lambda_n(x)$ 均爲有限值，因此 $|\xi_m|<\infty$，此立即顯示

$$|\varphi(x)|<\infty \qquad 若\ x=m$$

$$|\varphi(x)| < \infty \Leftrightarrow |\mu_m| < \infty$$
$$若 (m-1) < x < m$$

故對 $x = m \in Z^+$ 部份，$\varphi(x)$ 有界已得證明。其次，由上面第二式可知，當 $(m-1) < x < m$，$|\varphi(x)| < \infty$，若且唯若 $|\mu_m| < \infty$。因此，我們接下來的步驟，就是要證 $|\mu_m| < \infty$。因

$$\begin{aligned}\mu_m &= \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n(x) \\ &= \prod_{j=1}^{m-1}\left(1-\frac{x}{j}\right)\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right) \\ &= C_m g_m\end{aligned}$$

其中

$$C_m = C_m(x) = \prod_{j=1}^{m-1}\left(1-\frac{x}{j}\right), C_1 = 1,$$

$$g_m = g_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right)$$

留意 C_m 為有限值，所以 $|\mu_m| < \infty$，若且唯若 $|g_m| < \infty$。因而目前問題，決定在 g_m 是否收斂。即

$$(1.12)\quad |\varphi(x)| < \infty \Longleftrightarrow |g_m| < \infty, \quad (m-1) < x < m$$

現將 g_m 改寫如下

$$\begin{aligned}g_m &= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right) \\ &= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)(n-x)\cdots\left(\frac{1}{m}\right)(m-x) \\ &= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(m-1)!}{n!}(n-x)(n-1-x)\cdots\cdots(m-x)\end{aligned}$$

今由 (1.5)，(1.6) 知 $\Gamma(n+1) = n!$，以及

$$\frac{\Gamma(n+1-x)}{\Gamma(m-x)} = (n-x)(n-1-x)\cdots\cdots(m-x)$$

所以

$$g_m = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\Gamma(n+1-x)}{\Gamma(n+1)}$$

因 $(m-1) < x < m$，故保證了 $k - x > 0$，$k = m+1$，$m+2$，……，於是由 (1.8) 式可得

$$\begin{aligned}|g_m| &= \left|\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\Gamma(n+1-x)}{\Gamma(n+1)}\right| \\ &= \left|\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sqrt{2\pi}(n+1-x)^{n+\frac{1}{2}-x}}{\sqrt{2\pi}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^{-n-1+x}[1+o(1)]}{e^{-n-1}[1+o(1)]}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{e^x\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\right|\cdot\left|\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}(n+1)^{-x}\right|\cdot|[1+o(1)]|\end{aligned}$$

若取 $|1+o(1)| \leqslant K$，則上式又可化為

$$\begin{aligned}|g_m| &\leqslant K\left|\frac{e^x\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\right|\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+x}}\right| \\ &= |\eta_m(x)|\cdot|\zeta(1+x)|\end{aligned}$$

即

$$(1.13)\quad |g_m| \leqslant |\eta_m(x)|\cdot|\zeta(1+x)|, \quad (m-1) < x < m$$

此處

$$\begin{aligned}\eta_m(x) &= Ke^x\Gamma(m)/\Gamma(m-x) \\ &= O(1)\end{aligned}$$

而 $\zeta(s)$ 稱為 zeta 函數，它有下列性質：

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$ 在 $s\geqslant 1+\delta$ 處均勻收斂，$\delta>0$

從而由（1.13）可知 g_m 在 $x\geqslant\delta>0$ 處均勻收斂，亦即 g_m 於 $x>0$ 處收斂。由（1.12）式易知 $\varphi(x)$ 亦具有相同性質。以上我們證明了下列定理：

定理 1

無窮級數

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots(1-x)$$

於 $x\geqslant\delta>0$ 處均勻收斂，且於 $x>0$ 處收斂。

此定理對我們相當重要，因為由均勻收斂的性質可知：凡無窮級數在其定義域上均勻收斂，則可逐項積分或逐項微分。因此，往後各節中，若我們必須在運算過程，對 $\varphi(x)$ 逐項微分或積分，則定理 1 確保我們的運算是可行無誤的。

二、$\varphi(x)$ 與gamma函數的對數導數相關式的推導

考慮函數

$$f(x,w)=(1-e^{-w})^{x-1}-1,\quad x,w\in(0,\infty)$$

以下要證明的，就是下面定理

定理 2

若 $x\in(0,\infty)$，則

$$\int_0^{\infty}f(x,w)\,dw=\varphi(x) \tag{2.1}$$

證明：易見 $x=1$ 時

$$\int_0^{\infty}f(1,w)\,dw=0=\varphi(1)$$

現有兩種情形：存在一數 $\ell\in Z^+$，使(a) $x=\ell$，(b) $(\ell-1)<x<\ell$，此處 $1\neq x\in(0,\infty)$。

若情況為(a)，則由二項式定理得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}f(\ell,w)\,dw&=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\ell-1}(-1)^n\binom{\ell-1}{n}e^{-nw}\,dw\\&=\sum_{n=1}^{\ell-1}(-1)^n\binom{\ell-1}{n}\int_0^{\infty}e^{-nw}dw\\&=\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{(-1)^n}{n}\binom{\ell-1}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n}(1-\frac{\ell}{n})(1-\frac{\ell}{n-1})\cdots(1-\ell)\\&=\varphi(\ell)\end{aligned}$$

因此，(a)部份已得證。

若為(b)時，先證：當 $x\in X$ 時，$f(x,w)$ 於 W 上均勻收斂，其中 $X=\{x:0<x<\infty\}$，$W=\{w:\delta\leqslant w<\infty\}$，$\delta>0$。

因 $|e^{-w}|<1$，$\forall w>0$，故由二項式定理知

$$f(x,w)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots(1-x)e^{-nw}$$

設

$$u_l=u_l(x,w)$$

$$=\sum_{n=1}^{\ell-1}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots(1-x)e^{-nw},\ u_1=0,$$

$$t_\ell=t_\ell(x,w)$$

$$=\sum_{n=\ell}^{\infty}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots(1-x)\,e^{-nw}$$

$$\alpha_\ell=\alpha_\ell(x)=\prod_{j=1}^{\ell-1}(1-\frac{x}{j})\ ,\ \alpha_1=1\ ,$$

$$h_\ell=h_\ell(x,w)$$

$$=\sum_{n=\ell}^{\infty}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots(1-\frac{x}{\ell})e^{-nw}$$

因而

$$f(x,w)=u_\ell+t_\ell$$
$$=u_\ell+\alpha_\ell h_\ell$$

當 $x\in X$ 時，u_ℓ，α_ℓ 均有界，$\forall w\geqslant\delta$。令 $K=max\{\ |u_\ell|\ ,\ \ |\alpha_\ell|\ \}$，則

$$|f(x,w)|=|u_\ell+\alpha_\ell h_\ell|$$
$$\leqslant|u_\ell|+|\alpha_\ell|\cdot|h_\ell|$$
$$\leqslant K(1+|h_\ell|)$$

即

$$(2.2)\quad |f(x,w)|\leqslant K(1+|h_\ell|),\ x\in X,\ w\in W$$

顯然，接下來的工作是證明當 $x\in X$，h_ℓ 在 W 上均勻收斂。由於 $(\ell-1)<x<\ell$，因而 $0<1-x/\ell'<1$，$\forall\ell'\geqslant\ell$。故

$$|h_\ell|=|\sum_{n=\ell}^{\infty}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots\cdots(1-\frac{x}{\ell})e^{-nw}|$$

$$\leqslant|\sum_{n=\ell}^{\infty}e^{-nw}|$$

$$\leqslant|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nw}|$$

$$=|\frac{1}{e^{w}-1}|$$

因 $|1/(e^{w}-1)|$ 在 W 上為一有界函數，於是我們可取一正常數 L，使得

$$|h_\ell|\leqslant|\frac{1}{e^{w}-1}|\leqslant L\ ,\ w\in W$$

故由Weierstrass-M 檢定，我們得出：當 $x\in X$，h_ℓ 於 W 上均勻收斂。再由 (2.2) 式得知：若 $x\in X$，則 $f(x,w)$ 在 W 上均勻收斂。故 $f(x,w)$ 可逐項積分。因此，當 $x\in X$

$$|\int_0^m f(x,w)\,dw-\varphi(x)|$$

$$=|\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots\cdots(1-x)\cdot(\int_0^m e^{-nw}dw-\frac{1}{n})|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\prod_{j=1}^{n}(1-\frac{x}{j})|\cdot|\int_0^m e^{-nw}dw-\frac{1}{n}|$$

現由(b)知必有一數 j 足夠使 $0<1-x/j'<1$，$\forall j'\geqslant j$。顯而易見 $|\prod_{j=1}^{n}(1-x/j)|$ 有界，令其值為一正常數 M 所限制，故得

$$|\int_0^m f(x,w)\,dw-\varphi(x)|$$

$$\leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}|\int_0^m e^{-nw}dw-\frac{1}{n}|$$

$$=M\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{e^{-mn}}{n}|$$

$$=M\ \log(\frac{1}{1-e^{-m}})\to 0\text{ 當 }m\to\infty$$

綜合以上所得，即證明了定理 2 。

現在，我們將 (2.1) 式作如下變換

$$t = 1 - e^{-w}$$

則給出

$$(2.3) \quad \int_0^{\infty} f(x, w)\, dw = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{1 - t}\, dt = \varphi(x)\ ,\ \forall x > 0$$

對 (1.10) 式取導數得

$$\frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} - \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m+x} - \frac{1}{m}\right)$$

當 $x > 0$，而 $m = 0$，1，2，……時，式子

$$\frac{1}{m+x} = \int_0^1 t^{m+x-1}\, dt$$

恒成立。因而

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \int_0^1 t^{x-1} dt - \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{m=1}^{n} (t^{m+x-1} - t^{m-1})\, dt$$

$$= -\gamma - \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1 - t^{n+x} + t^n}{1 - t}\, dt$$

$$= -\gamma - \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{1 - t}\, dt + \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{t^x - 1}{1 - t}\, t^n\, dt$$

由 (2.3) 式，我們可得

$$(2.4) \quad \left| \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma + \varphi(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 \frac{t^x - 1}{1 - t}\, t^n\, dt \right|$$

當 $x \in (0, \infty)$，若 $0 \leq t < 1$，則 $|(t^x - 1)/(1 - t)|$ 顯然為 t 的有界函數，而 $t \to 1$ 時，其值趨於 x。因此，我們可取一與 t 的積分路徑無關的常數 K，使得

$$\left| \frac{t^x - 1}{1 - t} \right| < K$$

所以

$$\left| \int_0^1 \frac{t^x - 1}{1 - t}\, t^n dt \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{t^x - 1}{1 - t} \right| \cdot |t^n|\, dt < K \int_0^1 |t^n|\, dt = \frac{K}{n+1} \to 0 \text{ 當 } n \to \infty$$

亦即 (2.4) 式等號右端趨於 0。因此，我們證明了底下定理

定理 3

若 $x \in (0, \infty)$，則

$$(2.5) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma + \varphi(x) = 0$$

由 psi 函數的定義，易知下列定理亦成立

定理 4

若 $x \in (0, \infty)$，則

$$(2.6) \quad \psi(x) + \gamma + \varphi(x) = 0$$

根據定理 4，我們可列出下面式子

$$\psi(x) + \gamma + \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{1 - t}\, dt = 0\ ,\quad x \in (0, \infty)$$

此式最先由 Legendre 於 1817 年證明，參閱〔3；p.170〕。再由定理 4 知

$$\psi(x) + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right) \cdots (1 - x) = 0\ ,\ x \in (0, \infty)$$

這個式子，係由Riemann的老師Stern於1847年得到，參閱〔3；p.171〕。有關函數$\psi(x)$的其他公式證明，建議讀者參閱〔1，3〕，此處我們不再繼續討論這方面的知識。

三、$\varphi(x)$各種性質的介紹

本文以下的重點，專注於函數$\varphi(x)$各種性質的探討。主要目的是間接地向讀者介紹$\psi(x)$的一些重要性質，所有的結果均可在〔1，3，6，8〕等參考書目中找到。應用前面已知的結果，祇要能獲致$\varphi(x)$的一些特性，那麼由定理4得知$\psi(x)$亦具相同性質，因兩個函數祇差一個Euler常數。

定理5

若$0<x<\infty$，$0<\rho<1$，$0<q<p$，p，q，n均為正整數，則

$$(3.1)\qquad \varphi(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}-1}{1-t}\,dt$$

$$(3.2)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{x}-x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)}$$

$$(3.3)\qquad \varphi^{(n)}(x)=(-1)^n n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{n+1}}$$

$$(3.4)\qquad \varphi(\rho+1)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\zeta(k-1)\rho^k$$

$$(3.5)\qquad \varphi(x+1)=\varphi(x)-\frac{1}{x}$$

$$(3.6)\qquad \varphi(x+n)=\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k}$$

$$(3.7)\qquad \varphi(nx)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(x+\frac{k}{n}\right)-\log n$$

$$(3.8)\qquad \varphi(\rho)=\varphi(1-\rho)+\pi\cot\rho\pi$$

$$(3.9)\qquad \varphi\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{\pi}{2}\cot\frac{q\pi}{p}+\log 2p-2\sum_{m=1}^{l}a_m$$

此處$l=[(p-1)/2]$，$a_m=\cos(2qm\pi/p)\log\sin(m\pi/p)$，而「$x$」表Gauss函數。

證明：由假設$0<x<\infty$，知(3.1)式即為(2.3)式。今對(1.10)式取導數得

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\frac{1}{x}+x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)}$$

由定理3，得(3.2)式。接著，由定理1可知$\varphi(x)$於$x\geqslant\delta>0$處均勻收斂，因此(3.2)式可逐項微分。故(3.3)式的獲致，祇須將(3.2)式微分n次即得。現考慮將$\varphi(\rho-x)$展開成Taylor級數如下

$$\begin{aligned}\varphi(\rho+x)&=e^{\rho\frac{\partial}{\partial x}}\varphi(x)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\rho^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\rho^k\varphi^{(k)}(x)\end{aligned}$$

此處$0<\rho<1$。令$x=1$，由(3.2)式易知$\varphi^{(0)}(1)=\varphi(1)=0$，而(3.3)式使得$\varphi^{(k)}(1)=(-1)^k k!\zeta(k+1)$，$k=1，2，3\cdots\cdots$，故知

$$\begin{aligned}\varphi(\rho+1)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\rho^k(-1)^k k!\zeta(k+1)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\zeta(k+1)\rho^k,\\&\qquad 0<\rho<1\end{aligned}$$

此即證明了(3.4)式。(3.5)式的證明相當簡單，由(3.2)式得

$$\varphi(x)-\frac{1}{x}=-x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+1-k}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}-(x+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+1-k)}$$

$$=\varphi(x+1)$$

因此 (3.5) 式成立。欲證 (3.6) 式，重複運用 (3.5) 式，即

$$\varphi(x+n)=\varphi(x+n-1)-\frac{1}{x+n-1}$$

$$=\varphi(x+n-2)-\left(\frac{1}{x+n-2}+\frac{1}{x+n-1}\right)$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\varphi(x)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{x+n-1}\right)$$

這便證明了 (3.6) 式。對 (1.9) 式取對數，則給出

$$\sum_{k=0}^{n-1}\log\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2}(n-1)\log(2\pi)+\left(\frac{1}{2}-nx\right)\log n+\log\Gamma(nx)$$

微分上式得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(x+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)}=-n\log n+n\frac{\Gamma'(nx)}{\Gamma(nx)}$$

運用定理 3 化簡此式，經過整理，就可得到 (3.7) 式。對 (3.8) 式而言，我們先列出

$$(3.10)\quad \pi\cot\rho\pi=\frac{1}{\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\rho}{\rho^2-k^2},\ 0<\rho<1$$

（請參閱〔7；p.412〕）由假設 $0<\rho<1$，於 (3.2) 式中，令 x 分別等於 ρ 及 $1-\rho$，則

$$\varphi(\rho)=\frac{1}{\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho+k}-\frac{1}{k}\right)$$

$$\varphi(1-\rho)=\frac{1}{1-\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\rho+k}-\frac{1}{k}\right)$$

將此二式相減並化簡，得

$$(3.11)\quad \varphi(\rho)-\varphi(1-\rho)=\frac{1}{\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\rho}{\rho^2-k^2}$$
$$0<\rho<1$$

顯然，(3.10) 與 (3.11) 兩式蘊涵 (3.8) 式成立的事實。至於 (3.9) 式，Böhmer 書上有個很漂亮的證明，請參閱〔1；pp.77－79〕。至此定理 5 完全得證。

定理6

若 $0<x<\infty$，n 爲正整數，則

(a) $\varphi(x+1)=\varphi(x)-\frac{1}{x}$

(b) $\varphi(n+1)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$\varphi(1)=0$

(c) φ 是凸的。

證明：無疑地，(a)式即定理 5 的 (3.5) 式。由於 (3.2) 式提供 $\varphi(1)=0$，令 (3.6) 式中 $x=1$ 即得(b)。因假設 $0<x<\infty$，故由 (3.3) 式我們取二次導數，得

$$\varphi''(x)=(-1)^2 2!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^3}>0$$

此式和(c)是等價的。證畢。

這個定理看起來，似乎不怎麼起眼，因爲(a)，(b)，(c)三個性質並沒有什麼複雜的公式或深奧的推理。不過，讀者將會看到函數 $\varphi(x)$ 實際上由這三個性質所唯一決定。在 gamma 函數的研究工作中，一項相當驚人的結果，由 Bohr 及Mollerup 所發現，是以下三個條件將 $\Gamma(x)$ 完全刻劃出來了：

Bohr — Mollerup 定理：若 f 在 $(0,\infty)$ 是個正值函數，使得

(a) $f(x+1)=xf(x)$，

(b) $f(1)=1$，

(c) $\log f$ 是凸的，

則 $f(x)=\Gamma(x)$。（請參閱〔8〕）

類似於此定理，我們證明下列定理：

定理7

若函數 f 在 $(0,\infty)$ 上有下列條件

(a) $f(x+1)=f(x)-\dfrac{1}{x}$

(b) $f(1)=0$，

(c) f 是凸的，

則 $f(x)=\varphi(x)$。

證明：留意 f 具有性質(a)，因此，當 n 爲正整數時

$$f(x+n)=f(x)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+n-1}\right),\quad x\in(0,\infty) \tag{3.12}$$

成立。顯然，由此式可知，祇要對 $0<x\leq 1$ 來證就夠了。故若證明當 $0<x\leqslant 1$ 時，$f(x)=\varphi(x)$ 即足。

假設 $0<x\leqslant 1$，n 爲正整數。考慮 f 在區間 $[n,n+1]$，$[n+1,n+1+x]$，$[n+1,n+2]$ 上的差商（difference quotients），由於 f 是凸的，故

$$\frac{f(n)-f(n+1)}{n-(n+1)}\leqslant\frac{f(x+n+1)-f(n+1)}{(x+n+1)-(n+1)}\leqslant\frac{f(n+2)-f(n+1)}{(n+2)-(n+1)}$$

由(b)及(3.12)式，我們可得到

$$f(n+1)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$f(x+n+1)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\quad ,$$

將以上結果代入前面的不等式並化簡，可得下列式子

$$-\frac{x}{n}\leqslant f(x)-\frac{1}{x}+x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(x+k)}\leqslant-\frac{x}{n+1}$$

當 $n\to\infty$，式子兩端均趨於 0，即得

$$f(x)=\frac{1}{x}-\lim_{n\to\infty}x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(x+k)}$$

由(3.2)式易知 $f(x)=\varphi(x)$。明所欲證。

以上討論，我們已將 $\varphi(x)$ 各種性質說得很明白，相信讀者在完全了解之後，透過定理 4，必能間接達到知悉函數 $\phi(x)$ 的各種性質之目的，則本節任務即已完成。不過，必須提醒讀者一點，$\phi(x)$ 仍有其他性質成與定理 5 等價的關係式未予列出，請有興趣的讀者參閱 Nielsen 的書〔3〕或 Böhmer 的書〔1〕。

另外，根據 Hölder，Moore，Barnes 等人的研究，函數 $\phi(x)$ 無法滿足有理係數的微分方程式。參考文獻可在〔6；p.236〕的註脚找到。更深入的研究，牽涉到所謂的超級超越函數（transcendentally transcendental functions），參閱 E.H. Moore, Concerning Transcendentally Transcendental Functions, Math. Ann., XLVIII, 1897, pp.49 — 74. （未完待續）

—本文作者台北工專電子科畢業—

（原载：数学传播〔台〕1986 年 10 卷 3 期 19 — 28 页）

一種log 2無窮級數的推廣研究（下）

林建宏

四、$\varphi(\chi)$與兩個相關於$\varphi(\chi)$積分之特殊值計算

接下來的工作，我們想計算一些 $\varphi(x)$ 的特殊值。易知當 $x = n \in N$，由 (3.2) 式及 (3.6) 式得

$$(4.1) \quad \varphi(1) = 0 \;,\; \varphi(n+1) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

因

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma + \log n + o(1)$$

於是，對充分大的 n 而言，我們有

$$\varphi(n+1) \sim -\gamma - \log n$$

這是對 $\varphi(n+1)$ 作粗略的估計。事實上，更精確的估計需用到下式

$$\log \Gamma(x) \sim \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{1}{2} \log 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}$$

其中係數 B_{2k} 稱 Bernoulli 數：$B_2 = 1/6$，$B_4 = -1/30$，$B_6 = 1/42$，……（請參閱［6；pp.251，252］）。此即 $\log \Gamma(x)$ 的漸近級數（asymptotic series）。因漸近級數的導數仍為漸近級數，故對上式取導數，再由定理 3 給出

$$(4.2) \quad \varphi(x) \sim -\gamma - \log x + \frac{1}{2x} + \left(\frac{1}{12x^2} - \frac{1}{120x^4} + \frac{1}{252x^6} - \cdots\cdots\right)$$

這是 $\varphi(x)$ 的一個很"好"的漸近級數。蓋因我們如果在計算 $\varphi(n)$ 時，採用 (4.1) 式的調和級數（harmonic series）$\Sigma\, 1/k$，對相當大的 n 值，是很不經濟的。原因是調和級數雖發散，但增加緩慢。而 (4.2) 式易見括弧內各項收斂甚速。例如，求 $\varphi(101)$ 時，利用 (4.2) 式，則

$$\begin{aligned}\varphi(101) &\sim -\gamma - \log 101 + \frac{1}{2\times 101} + \frac{1}{12\times 101^2} - \\ &\sim -0.5772156 \\ &\quad -4.6151205 \\ &\quad +0.0049505 \\ &\quad +0.0000081 \\ &\sim -5.187377\end{aligned}$$

也就是說，(4.2)式祇須取括弧內第一項，即可精確到小數點以下第六位。對(4.1)式而言，欲達同樣的精確度，非取 100 項不可。所謂“好”的原因就是指此，這使得(4.2)式在求調和級數時，倒成爲一有力的工具。因此，在數值計算方面，漸近展開式（asymptotic expansion）是相當重要的課題之一。（以上內容，取材自[4]）

繼續(4.1)式的工作，我們進一步地求當 x 爲有理數時，$\varphi(x)$ 之值。因對所有形如

$$\frac{q}{p}+n \quad (0<q<p,\ p,q,n \text{ 均爲正整數})$$

的有理數而言，由(3.6)式可知

$$\varphi\left(\frac{q}{p}+n\right)=\varphi\left(\frac{q}{p}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{q}{p}+k} \tag{4.3}$$

很明顯地，我們祇須求 $\varphi(q/p)$ 即足。對於其他的有理數 $q/p+n$ 而言，$\varphi(q/p+n)$ 均可由(4.3)式推導得出。

利用(3.9)式，表 1 列出一些計算 $\varphi(q/p)$ 的結果。

表 1

q/p	$\varphi(q/p)$
1/2	$+2\log 2$
1/3	$+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\log 3$
2/3	$-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\log 3$
1/4	$+\frac{\pi}{2}+3\log 2$
3/4	$-\frac{\pi}{2}+3\log 2$
1/5	$+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{2}\log 2+\frac{5}{4}\log 5+\frac{\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
2/5	$+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{2}\log 2+\frac{5}{4}\log 5-\frac{\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
3/5	$-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{2}\log 2+\frac{5}{4}\log 5-\frac{\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
4/5	$-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{2}\log 2+\frac{5}{4}\log 5+\frac{\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
1/6	$+\frac{\pi}{2}\sqrt{3}+2\log 2+\frac{3}{2}\log 3$
5/6	$-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}+2\log 2+\frac{3}{2}\log 3$
1/8	$+\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)+4\log 2+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$
3/8	$+\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)+4\log 2-\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$
5/8	$-\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)+4\log 2-\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$
7/8	$-\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)+4\log 2+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$
1/10	$+\frac{\pi}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\left(2-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\log 2+\frac{5}{4}\log 5+\frac{3\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
3/10	$+\frac{\pi}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\left(2+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\log 2+\frac{5}{4}\log 5-\frac{3\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
7/10	$-\frac{\pi}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\left(2+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\log 2+\frac{5}{4}\log 5-\frac{3\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$

9/10	$-\frac{\pi}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}+(2-\frac{3\sqrt{5}}{2})\log 2$ $+\frac{5}{4}\log 5+\frac{3\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
1/12	$+\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3$ $+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$
5/12	$+\frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3$ $-\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$
7/12	$-\frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3$ $-\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$
11/12	$-\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3$ $+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$

通常，我們都知道

$$\int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{e^x-1}=\Gamma(s+1)\zeta(s+1),\forall s>0$$

而對於

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(e^x-1)^s}$$

所知極少。現在，我們着手求此積分之値。假設 $0<s<1$，則由(1.7)及(1.11)兩式得

$$\begin{aligned}\varphi(s)&=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}(1-\frac{s}{n})(1-\frac{s}{n-1})\cdots(1-s)\\&=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{\Gamma(n+1-s)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-s)}\\&=\frac{\sin\pi s}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{\Gamma(n+1-s)\Gamma(s)}{\Gamma(n+1)}\\&=\frac{\sin\pi s}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-s}(1-t)^{s-1}\,dt\\&=\frac{-\sin\pi s}{\pi}\int_0^1 t^{-s}(1-t)^{s-1}\log(1-t)\,dt\end{aligned}$$

將前式作 $t=1-e^{-x}$ 變換，得出

$$\frac{\sin\pi s}{\pi}\int_0^\infty\frac{x\,dx}{(e^x-1)^s}$$

於是，我們獲知

$$\text{(4.4)}\quad \int_0^\infty\frac{x\,dx}{(e^x-1)^s}=\frac{\pi}{\sin\pi s}\varphi(s),\quad 0<s<1$$

令 $s\to 1$，可得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{x\,dx}{e^x-1}&=\lim_{s\to1}\frac{\pi\varphi(s)}{\sin\pi s}\\&=\lim_{s\to1}\frac{\pi\varphi'(s)}{\pi\cos\pi s}\\&=-\varphi'(1)\\&=\zeta(2)\quad[\text{由 (3.3) 式}]\end{aligned}$$

若將(4.4)式的積分視爲 s 的函數，並以 $Q(s)$ 表示，則(4.4)式可寫成

$$\text{(4.5)}\quad Q(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}\varphi(s),\quad 0<s<1$$

利用(3.8)式，將 $Q(s)$ 減去 $Q(1-s)$，可得

$$\text{(4.6)}\quad Q(s)-Q(1-s)=\frac{\pi^2\cos\pi s}{\sin^2\pi s},\quad 0<s<1$$

考慮當 $0<q<p$，p，q 均爲正整數時，由(3.9)及(4.5)兩式可得

$$\text{(4.7)}\quad Q(\frac{q}{p})=\frac{\pi}{\sin\frac{q}{p}\pi}(\log 2p+\frac{\pi}{2}\cot\frac{q\pi}{p}-2\sum_{m=1}^{\ell-1}a_m)$$

其中 ℓ 及 a_m 如定理5所定義。

於(4.7)式中，令 q 以 $p-q$ 代入，則有

(4.8) $$Q(1-\frac{q}{p})=\frac{\pi}{\sin\frac{q}{p}\pi}\left(\log 2p-\frac{\pi}{2}\cot\frac{q\pi}{p}-2\sum_{n=1}^{\ell-1}a_n\right)$$

易見 (4.7) 及 (4.8) 兩式蘊涵下式成立

(4.9) $$Q(\frac{q}{p})+Q(1-\frac{q}{p})=\frac{2\pi}{\sin\frac{q\pi}{p}}\left(\log 2p-2\sum_{n=1}^{\ell-1}a_n\right)$$

令 $s=1/2$，則由 (4.5) 式及表 1 得

(4.10) $$Q(\frac{1}{2})=2\pi\log 2$$

當 $s=1/3$，由 (4.5) 及 (4.6) 兩式，給出

(4.11) $$Q(\frac{1}{3})=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(3\log 3+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

(4.12) $$Q(\frac{2}{3})=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(3\log 3-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

同樣地，當 $s=1/4$ 時，得

(4.13) $$Q(\frac{1}{4})=\pi\sqrt{2}\left(3\log 2+\frac{\pi}{2}\right)$$

(4.14) $$Q(\frac{3}{4})=\pi\sqrt{2}\left(3\log 2-\frac{\pi}{2}\right)$$

進一步地，我們想求形如

$$\int_0^\infty\frac{x[\log(e^x-1)]^n}{\sqrt[p]{(e^x-1)^q}}dx\ ,\quad 0<q<p$$

n，p，q 均為正整數

之積分值。欲達成此目的，首先，我們證明

引理 1

令 $H=\{s:a\le s\le A\}$，其中 $0<a<A<2$。

(a)對每個 $\varepsilon>0$，有一個 $\delta>0$ 使

$$\left|\int_\alpha^\beta x(e^x-1)^{-s}dx\right|<\varepsilon\ ,\quad \forall s\in H$$

恆成立，當 $0<\alpha<\beta<\delta$。

(b)對每個 $\varepsilon>0$，有一數 ν 使

$$\left|\int_\alpha^\beta x(e^x-1)^{-s}dx\right|<\varepsilon\ ,\quad \forall s\in H$$

恆成立，當 $\beta>\alpha>\nu$。

證明：(a)先設 $x\in(0,1]$，且 s 在 H 中。因

$$(e^x-1)^{-s}\le x^{-s}\le x^{-A}$$

故知

$$\left|x(e^x-1)^{-s}\right|\le x^{1-A}\ ,\quad \forall x\in(0,1]$$

利用這個不等式，若 $0<\alpha<\beta<1$，則

$$\left|\int_\alpha^\beta x(e^x-1)^{-s}dx\right|\le\int_\alpha^\beta x^{1-A}dx$$

$$=\frac{1}{2-A}\left(\beta^{2-A}-\alpha^{2-A}\right)\ ,\quad \forall s\in H$$

若 $\varepsilon>0$，則我們可取 δ，$0<\delta<1$，使得

$$\left|\frac{1}{2-A}\left(\beta^{2-A}-\alpha^{2-A}\right)\right|<\varepsilon$$

當 $0<\alpha<\beta<\delta$，這就證明了(a)部份。

(b)設 $x\in[1,\infty)$，且 s 在 H 中。由於 $(1-e^{-x})^{-s}$ 在 $[1,\infty)$ 上為 x 的有界函數，即存在常數 c_1，使得

(4.15) $$\left|(1-e^{-x})^{-s}\right|\le c_1\ ,\quad \forall x\in[1,\infty)$$

此外，因 $xe^{-\frac{a}{2}x}$ 在 $[1,\infty)$ 上連續，且當 $x\to\infty$，其值收斂為零，故存在一正常數 c_2，使得

(4.16) $$\left|xe^{-\frac{a}{2}x}\right|\le c_2\ ,\quad \forall x\in[1,\infty)$$

顯然，由 (4.15) 及 (4.16) 兩式可得

$$\left|x(e^x-1)^{-s}\right|=\left|xe^{-sx}(1-e^{-x})^{-s}\right|$$

$$\le\left|xe^{-ax}\right|\cdot\left|(1-e^{-x})^{-s}\right|$$

$$\le c_1c_2e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$\forall x\in[1,\infty)$$