全国著名的数学考研辅导专家主持编写

全国研究生入学考试数学复习指南

赵达夫 龚漫奇 刘晓 编著

按照最新的数学考研大纲编写

囊括全部要背记的公式和定理

着重方法的介绍和问题的讲解

北方交通大学出版社
http://press.njtu.edu.cn

全国研究生入学考试数学复习指南

赵达夫　龚漫奇　刘　晓　编著

北方交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是为参加全国研究生数学统一考试的考生而编写的复习用书，其内容是按照最新的数学考研大纲逐项编写的，包括高等数学 8 章、线性代数 6 章、概率论与数理统计 7 章。每章分为本章导读，大纲及其基础内容，题型、方法与小结三个部分，有的还附有习题与参考解答。本书起点低，覆盖面广，着重方法介绍和问题小结，有助于考生全面而深入地复习。

本书的作者是全国著名考研数学辅导专家，曾主编过多本考研数学辅导、考研数学题型分析、模拟试卷等书籍。

本书是参加全国研究生入学数学统一考试的考生的复习用书，也可作为大学生学习大学数学课程（高等数学、线性代数、概率论与数理统计）的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

全国研究生入学考试数学复习指南 / 赵达夫，龚漫奇，刘晓编著. —北京：北方交通大学出版社，2004.2

ISBN 7-81082-138-5

Ⅰ. 全… Ⅱ. ①赵… ②龚… ③刘… Ⅲ. 高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 035068 号

责任编辑：郭　洁　　特邀编辑：蔡君子

印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司

出版发行：北方交通大学出版社　　电话：010－51686045，62237564

北京市海淀区高梁桥斜街 44 号　　邮编：100044

经　　销：各地新华书店

开　　本：787×1092　1/16　　印张：32.75　　字数：820 千字

版　　次：2004 年 2 月第 1 版　2004 年 2 月第 1 次印刷

印　　数：1 ～ 3 000 册　　定价：42.00 元

编者的话

近几年来，我国的研究生教育发展很快，考生人数也越来越多。本书就是为广大考生准备研究生入学数学考试而编写的复习用书。

本书具有以下特点：

——起点低，从基础讲起，包括了数学考研大纲的内容和全部需要背记的公式和定理。因此，考生可以只用这一本书来复习数学。另外，许多内容是按读者没学过的水平来编写的，如多元积分部分。

——重视知识的总结与归纳，使读者能够对所学知识融会贯通并触类旁通。如证明定积分不等式的小结就总结了 11 种方法，这对考生全面、深入地掌握这种较难的内容会有很大的帮助。

——重点介绍解题的思想方法。如第 1 章中介绍的“农村包围城市”(分出可算部分先算)的思想方法，就是解决各类复杂问题的一种行之有效的解题思想方法。又如，在第 3 章中比较详细地用“求和不增加相对误差”和“以直代曲”的哲学思想介绍了微元法，由此帮助读者了解微积分的精髓，并能自如地应用。

——注重应试能力的培养和应试经验的总结。如为了便于考生记忆和理解，书中编了许多有助于应试的口诀。像计算三重积分的口诀“含 Z 方程上下面，无 Z 消 Z 围 D 线”，计算分部积分的口诀“指三幂、定 $\mathrm{d}V$，分部积分不可畏”，等等。

参加本书编写的作者都是多年从事考研辅导和考研判卷工作的有经验的教师。其中高等数学第 1～6 章由龚漫奇编写，高等数学第 7～8 章由赵达夫编写，线性代数和概率统计由刘晓编写。

由于我们的水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2004 年 1 月

目　　录

第1篇　高等数学

第 2 篇　线性代数

第 3 篇 概率论与数理统计

第1篇 高等数学

高等数学是研究生入学考试数学试题中的主要部分，它在数学一的试题中占60％. 在数学二的试题中占80％，在数学三、数学四的试题中占50％. 其具体内容为：

(1) 函数、极限、连续

(2) 一元函数微分学

(3) 一元函数积分学

(4) 向量代数与空间解析几何

(5) 多元函数微分学

(6) 多元函数积分学

(7) 无穷级数

(8) 微分方程

注：以上8项内容中，(4)的内容对数学二、数学三、数学四是不要求的，(7)的内容对数学二、数学四是不要求的.

第1章 函数、极限、连续

1.1 本章导读

本章的重点内容是极限的概念和极限的性质，也是高等数学的基础．比如：①一个式子中含有两个极限号的含义是什么？②怎么理解极限不存在？③什么时候能把一个极限写成两个极限？④什么时候能把两个极限写成一个极限？这类问题虽有的不是应试内容，但对理解后面的应试内容，如导数、积分、级数的性质却很有帮助．其中③、④两个问题，对于理解极限的四则运算法则是很重要的；①、③、④是理解广义积分的基础；而②则是高等数学的最基础问题——是否可导？是否可积？级数是否收敛？

另外结合本章内容，我们还介绍一些重要的思想方法．这些方法有的可以在全部数学学科中使用，如证存在性的证明思路(例 1-34)；有的还可推广到解决各类问题的实践中，如“农村包围城市”(分出可算部分先算)的思想方法(见 1.3.3 节)．

本章重点介绍的是极限计算(1.3.1 节总结了各类计算极限的方法)，因此第 2 章的洛必达法则我们也放在本章中一起讲了．

从历届(1987 年到现在)数学考试出题的范围来看，常出的题型依次是两个重要极限(19 分)，极限的四则运算法则(14 分)，洛必达法则(14 分)，复合函数(8 分)，单调有界、夹逼准则(6 分)，无穷小的阶(3 分)．有关内容本书都有较深刻和详细的介绍．

1.2 大纲及其基础内容

1．函数的概念及其表示法(本级标题均系数学考研大纲原文，下同)

概念：设有非空集合 $D\subset\mathbf{R}$ 及 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个对应规则 $f:x\to y=f(x)$，$\forall x\in D$，称 f 或 $y=f(x)$ 为 D 上的一个函数．D 称为 f 的定义域，$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为 f 的值域．表示法：解析法、图像法、表格法．

注：①D 与 f 称为函数的两要素．两函数相同，当且仅当两函数的定义域(D)与对应规则(f)相同．②除特别声明外，函数都是指单值函数，即 $\forall x\in D$，$f(x)$ 都是一个元素．多值函数的 $f(x)$ 是一个非空集合．

2．函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性

设 $y=f(x)$，$x\in D$．

(1) 有界性：如 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in I\subset D$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$(或 $f(x)\leqslant M$ 或 $f(x)\geqslant -M$)，则称 $f(x)$ 在 I 上有界(或有上界或有下界)．有界性的几何意义是：$y=f(x)$ 的图形在

两直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间．

(2) 单调性：如 $\forall x_1,x_2\in I\subset D$ 都有 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<$（或 $>$ 或 $\geqslant$ 或 $\leqslant$）$f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加（或减少，或非严格减少，或非严格增加）．$f(x)$ 单调增加（或减少）的几何意义是 $y=f(x)$ 的图向右上（或右下）倾斜．

(3) 周期性：如 $\exists T\neq 0$，使得 $\forall x\in D$ 都有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数．其几何意义是 $y=f(x)$ 的图在 x 方向每隔距离 $|T|$ 反复重复．

注：①$f(x)$ 的最小正周期也简称为周期 T．如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 $T=2\pi$，$\tan x$，$\cot x$ 的 $T=\pi$．②如 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $T/|a|$ 是 $f(ax+b)$ 的周期．③如 T_i 是 $f_i(x)$ 的周期（$i=1,2,\cdots,n$），则 T_i 的最小公倍数是由 $f_i(x)$ 经加、减、乘、除和复合所生成的函数的周期．

(4) 奇偶性：如 $\forall x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），则称 $f(x)$ 为奇（或偶）函数．从几何上讲，奇（或偶）函数 $y=f(x)$ 的图关于原点（或 y 轴）对称．

注：①可用计算 $f(-x)-[\mp f(x)]$ 是否为0来判断奇偶．②两个奇偶函数的四则运算：奇 ± 奇 = 奇，偶 ± 偶 = 偶，奇（$\neq 0$）+ 偶（$\neq 0$）= 非奇非偶（参见例1-35），奇 ×÷ 奇 = 偶，偶 ×÷ 偶 = 偶，奇 ×÷ 偶 = 奇．

例1-1　判断 $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在其定义域 D 上，是否具有函数的上述四个性质．

解：(1) 取 $x_n=(2n\pi+\pi)^{-1}\in D$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(2n\pi+\pi)(-1)=\infty$，所以 $f(x)$ 在 D 上无界（注意，取 $x_n\in D$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$ 是证明 $f(x)$ 在 D 上无界的常用方法）．

(2) 因为 $f((\pi/2)^{-1})=f((2\pi+(\pi/2))^{-1})=0$，$f((2\pi)^{-1})=2\pi$，所以 $f(x)$ 不单调．

(3) 因为使 $f(x)=0$ 的点：$(2k\pi\pm(\pi/2))^{-1}$，$k\in\mathbf{Z}$ 没有周期性，所以 $f(x)$ 不是周期函数．

(4) 因为 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数．

注：此题从几何角度想，较为直观和自然．利用解析几何小常识"如 $g(x)$ 是振幅为1的振动函数，则 $f(x)=h(x)g(x)$ 与 $g(x)$ 的振动（即绝对值达到最高和0的）规律相同，而 $y=\pm h(x)$ 是 $f(x)$ 的振幅的轮廓线"可知，$f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 是与 $\cos\dfrac{1}{x}$ 的振动（x 越靠近0，振动频率越快）相同且振幅轮廓线为 $y=\pm\dfrac{1}{x}$ 的一条振动曲线，所以4个结论是显然的．

3．反函数

如 $y=f(x)$，$x\in D\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$，则称 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$ 为 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数．在几何上，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 同图，$y=f(x)$（即 $x=f^{-1}(y)$）与 $y=f^{-1}(x)$ 关于 $x=y$ 对称（相当于 x 轴 y 轴互换）．

注：(1) 多值反函数一定存在．而一般来说，函数只在它的单调区间上存在单值反函数．

(2) 由反函数的定义可知：①由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$，可求得 $f^{-1}(x)=\varphi(x)$．

如求反函数：(a) $y=\begin{cases}4-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ (x/2)+8, & 2<x\leqslant 4;\end{cases}$　(b) $y=\begin{cases}2x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2^x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

答：(a) $y=\begin{cases}\sqrt{4-x}, & 0\leqslant x\leqslant 4;\\ 2(x-8), & 9<x\leqslant 10.\end{cases}$　(b) 不存在．

②把一个函数符号从等号的一端移到另一端时，变为其反函数的符号．如 $y=\sin x$，$x\in[-\pi/2,\pi/2]\Rightarrow x=\arcsin y$．

(3) 单值反函数 f^{-1} 存在时，有公式 $f^{-1}(f(x))=x$，$x\in D$；$f(f^{-1}(y))=y$，$y\in f(D)$．

如 $e^{\ln x}=x$，$x>0$；$\arccos(\cos x)=x$，$x\in[0,\pi]$.

4．分段函数

把定义域分为若干个集合，并分别在各集合上定义对应规则而形成的函数称为分段函数．

5．复合函数

如 $y=f(u)$，$u\in D_f$；$u=\varphi(x)$，$x\in D_\varphi$，则 $y=f(\varphi(x))$，$x\in D=\{x\mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}$（当 $D\neq\varnothing$ 时）称为 f 与 φ 的复合函数．

注： 求 $f(\varphi(x))$ 的定义域就是解不等式组：$x\in D_\varphi,\varphi(x)\in D_f$.

例如，已知 $f(x)$ 的定义域为$(-2,2)$，求 $f(\sqrt{x})$ 的定义域 D．答：$D=[0,4)$.

例 1-2　已知 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 1,\\ x^3, x>1,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析： $f(\square)$的表达式就是把 $f(x)$ 的表达式中所有的 x 都换为$\square$.

解法 1： 先内后外法．

$$f(g(x))=\begin{cases}f(x^2), x\leqslant 1\\ f(x^3), x>1\end{cases}=\begin{cases}\begin{cases}\ln x^2, & x^2>0,\\ x^2, & x^2\leqslant 0,\end{cases} x\leqslant 1;\\ \begin{cases}\ln x^3, & x^3>0,\\ x^3, & x^3\leqslant 0,\end{cases} x>1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\ln x^2, & x^2>0 \text{ 且 } x\leqslant 1\\ x^2, & x^2\leqslant 0 \text{ 且 } x\leqslant 1\\ \ln x^3, & x^3>0 \text{ 且 } x>1\\ x^3, & x^3\leqslant 0 \text{ 且 } x>1\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2, & x\neq 0 \text{ 且 } x\leqslant 1,\\ x^2, & x=0,\\ \ln x^3, & x>1.\end{cases}$$

解法 2： 先外后内法．

$$f(g(x))=\begin{cases}\ln g(x), & g(x)>0\\ g(x), & g(x)\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2, & x\leqslant 1 \text{ 且 } g(x)>0,\\ \ln x^3, & x>1 \text{ 且 } g(x)>0,\\ x^2, & x\leqslant 1 \text{ 且 } g(x)\leqslant 0,\\ x^3, & x>1 \text{ 且 } g(x)\leqslant 0.\end{cases}$$

因为 $g(x)>0\Leftrightarrow x^2>0$ 且 $x\leqslant 1$（或 $x^3>0$ 且 $x>1$）$\Leftrightarrow x\neq 0$ 且 $x\leqslant 1$（或 $x>0$ 且 $x>1$）$\Leftrightarrow x\neq 0$，因此 $g(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x=0$. 所以可得 $f(g(x))$的最终表达式同解法 1.

6．隐函数

方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的定义域 D 与对应规则 $x\to y=y(x)$ 的定义为：$D=\{x\mid \exists\, x,y$ 使 $F(x,y)=0\}$；$y(x)=\{y\mid F(x,y)=0\}$.

注： 隐函数可以是多值函数．通常我们把多值函数分为若干个连续（或可微）的单值分支来研究．如 $x^2-y^2=0$ 确定了一个多值的隐函数 $y=\pm x, x\in\mathbf{R}$. 它可分为两个可微（当然也连续）的单值分支 $y_1=x$ 与 $y_2=-x$；还可分出另外两个连续的分支 $y_3=|x|, y_4=-|x|$.

7．基本初等函数的性质及其图形

共有 6 类基本初等函数：①常数函数 C．②幂函数 x^α．③指数函数 a^x．④对数函数 $\log_a x$．⑤三角函数 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$．⑥反三角函数 $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$．这些函数的图形参见各类高等数学教材，其性质由图即知．

需要强调的是,应熟悉这些函数在其定义域的开区间的端点处的单向极限值(从函数图可看出这些值). 如 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty(\ln 0^+=-\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty(\ln(+\infty)=+\infty.)$

其他情况: ① $\alpha>0$ 时,$(0^+)^\alpha=0^+$,$(+\infty)^\alpha=+\infty$;$\alpha<0$ 时,$(0^+)^\alpha=+\infty$,$(+\infty)^\alpha=0^+$.

② $a>1$ 时,$a^{+\infty}=+\infty$,$a^{-\infty}=0^+$;$0<a<1$ 时,$a^{+\infty}=0^+$,$a^{-\infty}=+\infty$.

③ $a>1$ 时,$\log_a(+\infty)=+\infty$,$\log_a 0^+=-\infty$;$0<a<1$ 时,$\log_a(+\infty)=-\infty$,$\log_a 0^+=+\infty$.

④ $\cos(\pm\infty)$不存在,$\sin(\pm\infty)$不存在.

⑤ $\arctan(-\infty)=(-\pi/2)^+$,$\arctan(+\infty)=(\pi/2)^-$,$\text{arccot}(-\infty)=\pi^-$,$\text{arccot}(+\infty)=0^+$.

8. 初等函数及其连续性

由基本初等函数经有限次四则运算和复合而成的函数称为初等函数. 初等函数在其有定义的点连续.

9. 简单应用问题的函数关系的建立

参见例 5-34.

10. 数列极限与函数极限的定义

$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$ 的定义:$\forall\varepsilon>0$,当 $x\to\square$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$(或$\pm\infty$)的定义:$\forall M>0$,当 $x\to\square$时,$|f(x)|$(或$\pm f(x)$)$>M$.

"当 $x\to x_0$(或 $x_0^\pm$)时"的定义:"$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|$(或$\pm(x-x_0)$)$<\delta$ 时".

"当 $x\to\infty$(或$\pm\infty$)时"的定义:"$\exists X>0$,当$|x|$(或$\pm x$)$>X$ 时".

$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$中的 $n\in\mathbf{N}$;"当 $n\to\infty$时,"的定义:"$\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时".

注: ①当$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$ 时,称 $x\to\square$时 $f(x)$收敛,否则称 $f(x)$发散或$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$不存在. ②"不存在"$\supset$"$\infty$"$\supset$"$\pm\infty$". 如$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在(但$\neq\infty,\pm\infty$),$\lim\limits_{x\to\infty}x^3$ 不存在(也$=\infty$,但$\neq\pm\infty$)$\lim\limits_{x\to\infty}x^2$ 不存在(也$=\infty$,或$=+\infty$,但$\neq-\infty$). ③$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\overset{\text{记}}{\Leftrightarrow}$当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A\Leftrightarrow f(x)\to A(x\to x_0)$. 其中 $x\to x_0$ 时,x 不能等于x_0,$f(x)$可以等于 A.

11. 极限的性质

(1) 保号性:①如$\lim\limits_{x\to\square}f(x)>\lim\limits_{x\to\square}g(x)$,则当 $x\to\square$时,$f(x)>g(x)$. ②如当 $x\to\square$时,$f(x)\leqslant g(x)$,则$\lim\limits_{x\to\square}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to\square}g(x)$.

(2) 有界性:如$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$存在,则当 $x\to\square$时,$f(x)$有界.

注: "当 $x\to\square$时"的定义见 1.2 节中 10.

12. 函数的左极限与右极限

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\overset{\text{记}}{=\!=}f(x_0-0)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\overset{\text{记}}{=\!=}f(x_0+0)$.

注: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,此式中的 $x_0,x_0^\pm$ 可同时换为$\infty,\pm\infty$. 又$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)\overset{\text{记}}{=\!=}f(\pm\infty)$.

13. 无穷小和无穷大的概念

如$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$(或$\infty$),则称 $f(x)$是当 $x\to\square$时的无穷小(或大).

14. 无穷小和无穷大的关系

(1) 如 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\infty$；则 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

(2) 如 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$ 且当 $x\to\square$ 时，$f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

上述两个结论可以简单地记作：① $\dfrac{1}{\infty}=0\left(\dfrac{1}{\pm\infty}=0^{\pm}\right)$，② $\dfrac{1}{0}=\infty\left(\dfrac{1}{0^{\pm}}=\pm\infty\right)$. 类似地还有：③ $\infty\times a\,(a\neq 0)=\infty\,(a>0$ 时 $(\pm\infty)\times a=\pm\infty$，$a<0$ 时 $(\pm\infty)\times a=\mp\infty)$；④ $\infty\times\infty=\infty\,((\pm\infty)\times(\pm\infty)=+\infty,(\pm\infty)\times(\mp\infty)=-\infty)$；⑤ $\infty+$ 有界 $=\infty\,((\pm\infty)+$ 有界 $=\pm\infty)$；⑥ $(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty,(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$；⑦ $0\times$ 有界 $=0$（见下面的“无穷小的性质”）.

另外，还有一些没有肯定结论的“不定式”：$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\times\infty$ 及上述⑥中所列以外的 $\infty\pm\infty$.

注：$a<0$ 时，$(-\infty)\times a=+\infty$ 的含义是：如 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=a<0$，则 $\lim\limits_{x\to\square}(f(x)g(x))=+\infty$. 其他含义类似 .

15. 无穷小的性质

(1) 无穷小乘有界变量仍为无穷小（简记为“$0\times$ 有界 $=0$”）.

(2) $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)-A \xlongequal{\text{记}} \alpha$ 是当 $x\to\square$ 时的无穷小 .

利用(1)解题时，常遇到的有界（但可能无极限）变量：$\sin f(x)$，$\cos f(x)$，$\arctan f(x)$，$\operatorname{arccot} f(x)$，$(-1)^{f(n)}$.

16. 无穷小的比较

(1) 如 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\lim\limits_{x\to\square} g(x)=0$，则当 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$（或 ∞ 或 1 或 $A\neq 0$）时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶（或低阶，或等价，或同阶）无穷小（$x\to\square$）. 又当 $k>0$，$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=A\neq 0$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 k 阶无穷小（$x\to\square$）.

(2) 两个符号“o”和“$\sim$”（读作小 o 和等价）的定义：$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=o(g(x))\ (x\to\square)$；$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)\sim g(x)\ (x\to\square)$.

注：(2)中的 $f(x)$，$g(x)$ 不必是无穷小. 如 $x^2=o(x^3)\ (x\to\infty)$；$\sin x=o(1)\ (x\to 0)$；$\sqrt{2n+3}-\sqrt{n}\sim(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}\ (n\to\infty)$；$\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\tan x}\sim 2\ (x\to 0)$.

【等价替换定理】 如 $\alpha\sim\beta\ (x\to\square)$，则 $\lim\limits_{x\to\square}(\alpha f(x))=\lim\limits_{x\to\square}(\beta f(x))$，且 $\lim\limits_{x\to\square}(f(x)/\alpha)=\lim\limits_{x\to\square}(f(x)/\beta)$.

注：等价替换只能用于乘除法，不能用于加减法或复合等其他情况 .

常用的等价无穷小：当 $\square\to 0$ 时，$\square\sim\sin\square\sim\tan\square\sim e^{\square}-1\sim\ln(1+\square)$，又 $a^{\square}-1=e^{\square\ln a}-1\sim\square\ln a$，$(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\square$，$1-\cos\square\sim\dfrac{1}{2}\square^2$. 最后对任意的 $f(x)$，都有 $f(x)+o(f(x))\sim f(x)$.

例 1-3 求极限：(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan(2^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1)}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2-1}}-1}$，　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{2x})\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

解:(1) 因为 $x\to1$ 时,$2^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1\to0$,所以 $\arctan(2^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1)\sim2^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1\sim\sqrt[3]{x^3-1}\times\ln2$(因为$\square\to0$ 时,$a^{\square}-1\sim\square\ln a$).

又因为 $x\to1$ 时,$\sqrt[3]{x^2-1}\to0$,所以$\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2-1}}-1=(1+\sqrt[3]{x^2-1})^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2-1}$.

故　原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}\ln2}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2-1}}=2\ln2\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}}=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}(2\ln2)$.

(2) 因为 $x\to+\infty$时,$\dfrac{3}{x}\to0$,所以 $\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\sim\dfrac{3}{x}$.

又注意到 $x\to+\infty$时,$e^{2x}\to+\infty$,故可知 $\ln(1+e^{2x})$的主要部分是 $\ln e^{2x}$,所以猜测应该有 $\ln(1+e^{2x})=\ln e^{2x}+o(\ln e^{2x})\sim\ln e^{2x}$.

下面验证这一结论:$\ln(1+e^{2x})-\ln e^{2x}=\ln(1+\dfrac{1}{e^{2x}})=o(\ln e^{2x})$.

(注意小 o 等式的验证方法:$\alpha=o(\beta)\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\beta}\to0$,可以这样形象地记忆这个结论:$o(\beta)$就像 o 乘以β,故将 β 移到左边变成除以β,"o"变成"0","="变成"$\to$")

故　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln e^{2x})\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x\cdot\dfrac{3}{x}=6$.

常见错误:$\ln(1+e^{2x})\sim e^{2x}$,即不管是否$\square\to0$,都用等价式 $\ln(1+\square)\sim\square$进行代换.

17. 极限的四则运算

$$\lim_{x\to\square}(f(x)\pm(\text{或}\times\div)g(x))\xlongequal{\text{当右边存在时}}\lim_{x\to\square}f(x)\pm(\text{或}\times\div)\lim_{x\to\square}g(x).$$

推论 1-1　$\lim\limits_{x\to\square}(f(x)^{g(x)})\xlongequal[\text{且 }f(x)>0(x\to\square)]{\text{当右边存在}}(\lim\limits_{x\to\square}f(x))^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}$.

注:当一个式子中含有两个极限号时,只要其中一个不存在,则该式不存在(当然,两个极限都不存在时,该式也不存在).

又由反证法易证:当$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$存在,$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=$不存在时,$\lim\limits_{x\to\square}(f(x)+g(x))=$不存在.此结论可简记为"存在±不存在=不存在".下面总结一下这类结构:① 存在±不存在=不存在.② (非 0 存在)×不存在=不存在.③ 1÷(不存在但非∞)=不存在.

另外,还有两个没有肯定结论的"不定式":(不存在)+ − × ÷(不存在),0×(不存在).

18. 极限存在的夹逼准则

如果当 $x\to\square$时,$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\lim\limits_{x\to\square}h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$.

注:"当 $x\to\square$时"的定义见 1.2 节中 10.

例 1-4　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_s^n}$,其中 $a_i>0,i=1,2,\cdots,s$.

解:记 $\max\{a_1,a_2,\cdots a_s\}=M$,因为 $0\leqslant a_i^n\leqslant M^n$,所以$\sqrt[n]{M^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_s^n}\leqslant\sqrt[n]{sM^n}$.又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M^n}=M$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{sM^n}=\lim\limits_{n\to\infty}s^{\frac{1}{n}}\cdot M=M$,所以原式$=M$.

19. 极限存在的单调有界准则

(1) 如果当 $n\to\infty$时,x_n 单增有上界(或单减有下界),则 x_n 收敛.

(2) 如果当 $x \to x_0^+$ 时, $f(x)$ 单减有下界(或单增有上界), 则 $f(x)$ 收敛.

(3) 有关 $x \to +\infty, x_0^-$ 的情形与 $n \to \infty$ 类似; $x \to -\infty$ 的情形与 $x \to x_0^+$ 类似.

20. 两个重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

21. 函数连续的概念

(1) 如 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (\text{或} x_0^- \text{或} x_0^+)}} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 (或 x_0 左, 或 x_0 右)连续.

(2) 如 $f(x)$ 在区间 I 上的每一点都连续(闭区间端点只要求单侧连续), 则称 $f(x)$ 在 I 上连续.

注: 当 $f(x)$ 在点 $u_0 = \lim\limits_{x \to \square} \varphi(x)$ 连续时, $\lim\limits_{x \to \square} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x \to \square} \varphi(x))$, 即极限号可以进到连续函数的内部.

22. 函数间断点的类型

间断点的定义: 如 $f(x)$ 在 x_0 不连续(即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 不成立), 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

注: ① x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 不成立只有三种情况: (a) 左边 $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x))$ 不存在. (b) 右边 $(f(x_0))$ 不存在. (c) 左右都存在但不相等. ② 严格地说, 只有当 $x \to x_0$ (或 $x_0^{\pm}$) 时, 在 $f(x)$ 有定义的情况下, x_0 才可能成为间断点.

间断点的分类: 当 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在时, x_0 称为第一类间断点; 否则, x_0 称为第二类间断点. 在第一类间断点中, 使 $f(x_0+0) = f(x_0-0)$ 的, 称为可去型间断点; 使 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$ 的, 称为跳跃型间断点. 在第二类间断点中, 使 $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 中至少有一个为无穷大的称为无穷型间断点, 否则称为振荡型间断点.

23. 闭区间上连续函数的性质

如 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 一定能够取到 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值、最小值及介于两个最值之间的每一个值.

例 1-5 已知 $f(x)$ 在 (a,b) 连续, 且 $x_i \in (a,b), i = 1,2,\cdots,n$, 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

分析: 因为等式右端是 $f(x_i)$ 的平均值, 所以它一定介于最值之间.

证: 设 n 个值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 中最大值为 $f(x_p)$, 最小值为 $f(x_t)$. 则

$$f(x_t) = \frac{nf(x_t)}{n} \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leqslant \frac{nf(x_p)}{n} = f(x_p).$$

故由介值定理, 存在 ξ 在 x_t 与 x_p 之间 $\Rightarrow \xi \in (a,b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

常见错误: ① 令 $M = \max\limits_{(a,b)}\{f(x)\}$, 因为 $f(x)$ 在开区间可能没有最值.

② 令 $M = \max\limits_{[x_1, x_n]}\{f(x)\}$, 因为可能 $x_2 \notin [x_1, x_n]$.