

全国著名的数学考研辅导专家主持编写

全国研究生入学考试 数学复习指南

赵达夫 龚漫奇 刘 晓 编著

着重方法的介绍和问题的讲解

囊括全部要背记的公式和定理

按照最新的数学考研大纲编写



北方交通大学出版社
<http://press.njtu.edu.cn>

全国研究生入学考试 数学复习指南

赵达夫 龚漫奇 刘 晓 编著

北方交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是为参加全国研究生数学统一考试的考生而编写的复习用书,其内容是按照最新的数学考研大纲逐项编写的,包括高等数学8章、线性代数6章、概率论与数理统计7章。每章分为本章导读,大纲及其基础内容,题型、方法与小结三个部分,有的还附有习题与参考解答。本书起点低,覆盖面广,着重方法介绍和问题小结,有助于考生全面而深入地复习。

本书的作者是全国著名考研数学辅导专家,曾主编过多本考研数学辅导、考研数学题型分析、模拟试卷等书籍。

本书是参加全国研究生入学数学统一考试的考生的复习用书,也可作为大学生学习大学数学课程(高等数学、线性代数、概率论与数理统计)的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

全国研究生入学考试数学复习指南 / 赵达夫, 龚漫奇, 刘晓编著. —北京: 北方交通大学出版社, 2004.2

ISBN 7-81082-138-5

I. 全… II. ①赵… ②龚… ③刘… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 035068 号

责任编辑: 郭 洁 特邀编辑: 蔡君子

印刷者: 北京鑫海金澳胶印有限公司

出版发行: 北方交通大学出版社

电话: 010-51686045, 62237564

北京市海淀区高粱桥斜街 44 号

邮编: 100044

经 销: 各地新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 32.75 字数: 820 千字

版 次: 2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

印 数: 1~3 000 册 定价: 42.00 元

编者的话

近几年来,我国的研究生教育发展很快,考生人数也越来越多。本书就是为广大考生准备研究生入学数学考试而编写的复习用书。

本书具有以下特点:

——起点低,从基础讲起,包括了数学考研大纲的内容和全部需要背记的公式和定理。因此,考生可以只用这一本书来复习数学。另外,许多内容是按读者没学过的水平来编写的,如多元积分部分。

——重视知识的总结与归纳,使读者能够对所学知识融会贯通并触类旁通。如证明定积分不等式的小结就总结了11种方法,这对考生全面、深入地掌握这种较难的内容会有很大的帮助。

——重点介绍解题的思想方法。如第1章中介绍的“农村包围城市”(分出可算部分先算)的思想方法,就是解决各类复杂问题的一种行之有效的解题思想方法。又如,在第3章中比较详细地用“求和不增加相对误差”和“以直代曲”的哲学思想介绍了微元法,由此帮助读者了解微积分的精髓,并能自如地应用。

——注重应试能力的培养和应试经验的总结。如为了便于考生记忆和理解,书中编了许多有助于应试的口诀。像计算三重积分的口诀“含 Z 方程上下面,无 Z 消 Z 围 D 线”,计算分部积分的口诀“指三幂、定 dV ,分部积分不可畏”,等等。

参加本书编写的作者都是多年从事考研辅导和考研判卷工作的有经验的教师。其中高等数学第1~6章由龚漫奇编写,高等数学第7~8章由赵达夫编写,线性代数和概率统计由刘晓编写。

由于我们的水平有限,错误与不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。

编者

2004年1月

目 录

第 1 篇 高等数学

第 1 章 函数、极限、连续	(3)	3.1 本章导读	(80)
1.1 本章导读	(3)	3.2 大纲及其基础内容	(80)
1.2 大纲及其基础内容	(3)	3.3 题型、方法和小结	(84)
1.3 题型、方法和小结	(10)	3.3.1 不定积分计算方法的小结	(84)
1.3.1 求极限方法的小结	(10)	3.3.2 广义积分的概念与计算	(100)
1.3.2 求极限时常用变形方法的小结	(16)	3.3.3 定积分计算与证明定积分等式的小结	(103)
1.3.3 分出可算部分先算的思想方法	(20)	3.3.4 变限积分与含参积分的求导方法	(112)
1.3.4 由极限定义的函数	(21)	3.3.5 有关变上限函数问题的小结	(113)
1.3.5 函数方程	(23)	3.3.6 证明定积分不等式及相关题型	(116)
1.3.6 求函数的间断点及其类型	(26)	3.3.7 利用积分中值定理的题目	(123)
1.3.7 确定极限等式中的参数	(27)	3.3.8 将微分问题与积分问题互化的方法	(125)
1.3.8 n 项和与 n 项积的极限	(29)	3.3.9 定积分应用	(127)
1.3.9 递推数列的极限	(31)	3.3.10 杂例	(136)
1.4 习题与参考答案	(34)	3.3.11 经济应用问题总汇	(137)
1.4.1 习题	(34)	3.4 习题与参考答案	(141)
1.4.2 参考答案及提示	(37)	3.4.1 习题	(141)
第 2 章 一元函数微分学	(40)	3.4.2 参考答案及提示	(143)
2.1 本章导读	(40)	第 4 章 向量代数与空间解析几何	(146)
2.2 大纲及其基础内容	(40)	4.1 本章导读	(146)
2.3 题型、方法和小结	(48)	4.2 大纲及其基础内容	(146)
2.3.1 各类导数与微分的计算及其小结	(48)	4.3 题型、方法和小结	(150)
2.3.2 求 n 阶导数方法的小结	(56)	4.3.1 向量代数的题型	(150)
2.3.3 有关函数性态的题型	(57)	4.3.2 空间解析几何的题型	(152)
2.3.4 可用辅助函数求解的题型的小结	(61)	4.4 习题与参考答案	(155)
2.4 习题与参考答案	(72)	4.4.1 习题	(155)
2.4.1 习题	(72)	4.4.2 参考答案及提示	(156)
2.4.2 参考答案及提示	(75)		
第 3 章 一元函数积分学	(80)		

第 5 章 多元函数微分学	(157)
5.1 本章导读	(157)
5.2 大纲及其基础内容	(157)
5.3 题型、方法和小结	(160)
5.3.1 二元函数极限的计算方法	(160)
5.3.2 多元函数可微、连续、可导 问题的总结	(163)
5.3.3 多元函数复合求导法	(164)
5.3.4 多元隐函数的求导法	(166)
5.3.5 解简单偏微分方程及偏微分 方程的变换	(168)
5.3.6 方向导数和梯度的概念与计算	(171)
5.3.7 多元函数微分学的几何应用	(172)
5.3.8 多元函数的极值与最值	(174)
5.3.9 杂例	(181)
5.4 习题与参考答案	(181)
5.4.1 习题	(181)
5.4.2 参考答案及提示	(183)
第 6 章 多元函数积分学	(185)
6.1 本章导读	(185)
6.2 大纲及其基础内容	(185)
6.3 题型、方法和小结	(202)
6.3.1 各类坐标系下计算重积分 的理论与方法	(202)
6.3.2 I 型、II 型多元积分的各种 对称性	(204)
6.3.3 多重积分与多次积分和定积分 的关系	(208)
6.3.4 多重积分与多次积分计算 的小结	(210)

6.3.5 利用积分域的表达式化简 被积函数	(218)
6.3.6 曲线积分计算小结	(219)
6.3.7 曲面积分计算小结	(228)
6.3.8 含参多元积分问题	(232)
6.3.9 多元积分应用	(236)
6.3.10 杂例	(243)
6.4 习题与参考答案	(245)
6.4.1 习题	(245)
6.4.2 参考答案及提示	(246)
第 7 章 无穷级数	(248)
7.1 本章导读	(248)
7.2 大纲及其基础内容	(248)
7.3 题型、方法和小结	(255)
7.3.1 常数项级数敛散性的判定	(255)
7.3.2 幂级数有关问题	(264)
7.3.3 傅里叶级数的有关问题	(272)
7.4 习题与参考答案	(276)
7.4.1 习题	(276)
7.4.2 参考答案及提示	(279)
第 8 章 微分方程	(281)
8.1 本章导读	(281)
8.2 大纲及其基础内容	(282)
8.3 题型、方法和小结	(287)
8.3.1 一阶微分方程的求解	(287)
8.3.2 高阶微分方程的求解及 综合题	(292)
8.3.3 微分方程的应用	(297)
8.3.4 差分方程及其应用	(300)
8.4 习题与参考答案	(302)
8.4.1 习题	(302)
8.4.2 参考答案及提示	(303)

第 2 篇 线性代数

第 9 章 行列式	(307)	9.2 大纲及其基础内容	(307)
9.1 本章导读	(307)	9.3 题型、方法和小结	(309)

第 10 章 矩阵	(316)
10.1 本章导读	(316)
10.2 大纲及其基础内容	(316)
10.3 题型、方法和小结	(323)
10.3.1 求解矩阵方程	(323)
10.3.2 方阵的行列式	(327)
10.3.3 逆矩阵	(328)
10.3.4 伴随矩阵	(330)
10.3.5 分块矩阵	(331)
10.3.6 方阵的幂	(332)
10.3.7 矩阵运算规律	(333)
10.3.8 杂题	(334)

第 11 章 向量	(338)
11.1 本章导读	(338)
11.2 大纲及其基础内容	(338)
11.3 题型、方法和小结	(344)
11.3.1 向量组的线性相关性	(344)
11.3.2 求向量组或矩阵的秩	(348)
11.3.3 有关向量空间的问题	(350)
11.3.4 有关正交化或正交矩阵的问题	(350)
11.3.5 向量的应用问题	(351)
11.3.6 向量组的线性表示或等价问题	(352)
11.3.7 杂题	(353)

第 12 章 线性方程组	(356)
12.1 本章导读	(356)
12.2 大纲及其基础内容	(356)
12.3 题型、方法和小结	(360)
12.3.1 Cramer 法则的运用	(360)
12.3.2 判断线性方程组解的形式	(360)

12.3.3 线性方程组解的结构	(362)
12.3.4 线性方程组的应用问题	(366)
12.3.5 杂题	(368)

第 13 章 矩阵的特征值与特征向量	(370)
13.1 本章导读	(370)
13.2 大纲及其基础内容	(370)
13.3 题型、方法和小结	(372)
13.3.1 有关矩阵相似的问题	(372)
13.3.2 矩阵的特征值问题	(374)
13.3.3 已知特征值和特征向量求矩阵	(377)
13.3.4 有关矩阵的相似对角化问题	(378)
13.3.5 矩阵相似对角化的应用问题	(380)
13.3.6 求矩阵的特征值与特征向量问题	(382)
13.3.7 杂题	(384)

第 14 章 二次型	(389)
14.1 本章导读	(389)
14.2 大纲及其基础内容	(389)
14.3 题型、方法和小结	(391)
14.3.1 化二次型为标准形	(391)
14.3.2 正定二次型或正定矩阵的判别法及性质	(394)
14.3.3 二次型问题的应用	(397)
14.3.4 杂题	(399)

第 3 篇 概率论与数理统计

第 15 章 随机事件及其概率	(405)
15.1 本章导读	(405)
15.2 大纲及其基础内容	(405)
15.3 题型、方法和小结	(410)

15.3.1 随机事件的表示	(410)
15.3.2 利用概率的性质计算概率	(410)
15.3.3 古典概型中概率的计算	(411)

15.3.4 条件概率的计算	(413)	18.3.1 切比雪夫不等式的应用	(466)
15.3.5 乘法公式的运用	(415)	18.3.2 列维-林德伯格定理的应用	(470)
15.3.6 全概率公式与 Bayes 公式	(415)	18.3.3 棣美佛-拉普拉斯定理的应用	(472)
15.3.7 随机事件的独立性	(417)		
15.3.8 n 重 Bernoulli 试验	(418)		
第 16 章 随机变量及其分布	(420)	第 19 章 数理统计的基本概念	(476)
16.1 本章导读	(420)	19.1 本章导读	(476)
16.2 大纲及其基础内容	(420)	19.2 大纲及其基础内容	(476)
16.3 题型、方法和小结	(429)	19.3 题型、方法和小结	(480)
16.3.1 离散型随机变量的问题	(429)	19.3.1 数理统计的基本概念	(480)
16.3.2 连续型随机变量的问题	(431)	19.3.2 有关常见统计量的数字特征	(480)
16.3.3 多维随机变量的问题	(433)	19.3.3 有关样本量的问题	(482)
16.3.4 随机变量的独立性	(435)	19.3.4 有关抽样分布的问题	(483)
16.3.5 随机变量函数的分布	(437)		
第 17 章 随机变量的数字特征	(446)	第 20 章 参数估计	(487)
17.1 本章导读	(446)	20.1 本章导读	(487)
17.2 大纲及其基础内容	(446)	20.2 大纲及其基础内容	(487)
17.3 题型、方法和小结	(450)	20.3 题型、方法和小结	(492)
17.3.1 求随机变量的数学期望或方差	(450)	20.3.1 求未知参数的矩估计	(492)
17.3.2 求随机变量和的数学期望或方差	(452)	20.3.2 求未知参数的极大似然估计	(493)
17.3.3 求随机变量函数的数学期望或方差	(453)	20.3.3 求未知参数的矩估计与极大似然估计	(499)
17.3.4 求多维随机变量函数的数学期望或方差	(457)	20.3.4 估计量的评选方法	(500)
17.3.5 求二维随机变量的协方差或相关系数	(458)	20.3.5 求正态总体参数的置信区间	(504)
17.3.6 求随机变量的矩	(461)	20.3.6 杂题	(506)
17.3.7 杂题	(462)		
第 18 章 大数定律与中心极限定理	(464)	第 21 章 假设检验	(509)
18.1 本章导读	(464)	21.1 本章导读	(509)
18.2 大纲及其基础内容	(464)	21.2 大纲及其基础内容	(509)
18.3 题型、方法和小结	(466)	21.3 题型、方法和小结	(512)
		21.3.1 检验一个正态总体的均值或方差	(512)
		21.3.2 检验两个正态总体的均值或方差	(514)
		21.3.3 计算犯两类错误的概率	(516)

第 1 篇 高等数学

高等数学是研究生入学考试数学试题中的主要部分,它在数学一的试题中占 60%. 在数学二的试题中占 80%,在数学三、数学四的试题中占 50%. 其具体内容

为:

- (1) 函数、极限、连续
- (2) 一元函数微分学
- (3) 一元函数积分学
- (4) 向量代数与空间解析几何
- (5) 多元函数微分学
- (6) 多元函数积分学
- (7) 无穷级数
- (8) 微分方程

注:以上 8 项内容中,(4)的内容对数学二、数学三、数学四是不要的,(7)的内容对数学二、数学四是不要的.

1118634/01

第 1 章

函数、极限、连续

1.1 本章导读

本章的重点内容是极限的概念和极限的性质,也是高等数学的基础.比如:①一个式子中含有两个极限号的含义是什么?②怎么理解极限不存在?③什么时候能把一个极限写成两个极限?④什么时候能把两个极限写成一个极限?这类问题虽有的不是应试内容,但对理解后面的应试内容,如导数、积分、级数的性质却很有帮助.其中③、④两个问题,对于理解极限的四则运算法则是很重要的;①、③、④是理解广义积分的基础;而②则是高等数学的最基础问题——是否可导?是否可积?级数是否收敛?

另外结合本章内容,我们还介绍一些重要的思想方法.这些方法有的可以在全部数学学科中使用,如证存在性的证明思路(例 1-34);有的还可推广到解决各类问题的实践中,如“农村包围城市”(分出可算部分先算)的思想方法(见 1.3.3 节).

本章重点介绍的是极限计算(1.3.1 节总结了各类计算极限的方法),因此第 2 章的洛必达法则我们也放在本章中一起讲了.

从历届(1987 年到现在)数学考试出题的范围来看,常出的题型依次是两个重要极限(19 分),极限的四则运算法则(14 分),洛必达法则(14 分),复合函数(8 分),单调有界、夹逼准则(6 分),无穷小的阶(3 分).有关内容本书都有较深刻和详细的介绍.

1.2 大纲及其基础内容

1. 函数的概念及其表示法(本级标题均系数学考研大纲原文,下同)

概念:设有非空集合 $D \subset \mathbf{R}$ 及 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个对应规则 $f: x \rightarrow y = f(x), \forall x \in D$, 称 f 或 $y = f(x)$ 为 D 上的一个函数. D 称为 f 的定义域, $f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为 f 的值域. 表示法:解析法、图像法、表格法.

注:① D 与 f 称为函数的两要素. 两函数相同,当且仅当两函数的定义域(D)与对应规则(f)相同. ②除特别声明外,函数都是指单值函数,即 $\forall x \in D, f(x)$ 都是一个元素. 多值函数的 $f(x)$ 是一个非空集合.

2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性

设 $y = f(x), x \in D$.

(1) 有界性:如 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in I \subset D$ 都有 $|f(x)| \leq M$ (或 $f(x) \leq M$ 或 $f(x) \geq -M$), 则称 $f(x)$ 在 I 上有界(或有上界或有下界). 有界性的几何意义是: $y = f(x)$ 的图形在

两直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

(2) 单调性: 如 $\forall x_1, x_2 \in I \subset D$ 都有 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < (\text{或} > \text{或} \geq \text{或} \leq) f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(或减少, 或非严格减少, 或非严格增加). $f(x)$ 单调增加(或减少)的几何意义是 $y = f(x)$ 的图向右上(或右下)倾斜.

(3) 周期性: 如 $\exists T \neq 0$, 使得 $\forall x \in D$ 都有 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 其几何意义是 $y = f(x)$ 的图在 x 方向每隔距离 $|T|$ 反复重复.

注: ① $f(x)$ 的最小正周期也简称为周期 T . 如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 $T = 2\pi$, $\tan x$, $\cot x$ 的 $T = \pi$. ② 如 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 $T/|a|$ 是 $f(ax + b)$ 的周期. ③ 如 T_i 是 $f_i(x)$ 的周期 ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 T_i 的最小公倍数是由 $f_i(x)$ 经加、减、乘、除和复合所生成的函数的周期.

(4) 奇偶性: 如 $\forall x \in D$ 都有 $f(-x) = -f(x)$ (或 $f(-x) = f(x)$), 则称 $f(x)$ 为奇(或偶)函数. 从几何上讲, 奇(或偶)函数 $y = f(x)$ 的图关于原点(或 y 轴)对称.

注: ① 可用计算 $f(-x) - [\mp f(x)]$ 是否为 0 来判断奇偶. ② 两个奇偶函数的四则运算: 奇 $\pm$ 奇 = 奇, 偶 $\pm$ 偶 = 偶, 奇 ($\neq 0$) + 偶 ($\neq 0$) = 非奇非偶 (参见例 1-35), 奇 $\times$ 奇 = 偶, 偶 $\times$ 偶 = 偶, 奇 $\times$ 偶 = 奇.

例 1-1 判断 $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在其定义域 D 上, 是否具有函数的上述四个性质.

解: (1) 取 $x_n = (2n\pi + \pi)^{-1} \in D$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi + \pi)(-1) = \infty$, 所以 $f(x)$ 在 D 上无界 (注意, 取 $x_n \in D$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ 是证明 $f(x)$ 在 D 上无界的常用方法).

(2) 因为 $f((\pi/2)^{-1}) = f((2\pi + (\pi/2))^{-1}) = 0$, $f((2\pi)^{-1}) = 2\pi$, 所以 $f(x)$ 不单调.

(3) 因为使 $f(x) = 0$ 的点: $(2k\pi \pm (\pi/2))^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$ 没有周期性, 所以 $f(x)$ 不是周期函数.

(4) 因为 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

注: 此题从几何角度想, 较为直观和自然. 利用解析几何小常识“如 $g(x)$ 是振幅为 1 的振动函数, 则 $f(x) = h(x)g(x)$ 与 $g(x)$ 的振动(即绝对值达到最高和 0 的)规律相同, 而 $y = \pm h(x)$ 是 $f(x)$ 的振幅的轮廓线”可知, $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 是与 $\cos \frac{1}{x}$ 的振动 (x 越靠近 0, 振动频率越快) 相同且振幅轮廓线为 $y = \pm \frac{1}{x}$ 的一条振动曲线, 所以 4 个结论是显然的.

3. 反函数

如 $y = f(x)$, $x \in D \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, $y \in f(D)$, 则称 $y = f^{-1}(x)$, $x \in f(D)$ 为 $y = f(x)$, $x \in D$ 的反函数. 在几何上, $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 同图, $y = f(x)$ (即 $x = f^{-1}(y)$) 与 $y = f^{-1}(x)$ 关于 $x = y$ 对称(相当于 x 轴 y 轴互换).

注: (1) 多值反函数一定存在. 而一般来说, 函数只在它的单调区间上存在单值反函数.

(2) 由反函数的定义可知: ① 由 $y = f(x)$ 解出 $x = \varphi(y)$, 可求得 $f^{-1}(x) = \varphi(x)$.

如求反函数: (a) $y = \begin{cases} 4 - x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ (x/2) + 8, & 2 < x \leq 4; \end{cases}$ (b) $y = \begin{cases} 2x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2^x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

答: (a) $y = \begin{cases} \sqrt{4 - x}, & 0 \leq x \leq 4; \\ 2(x - 8), & 9 < x \leq 10. \end{cases}$ (b) 不存在.

② 把一个函数符号从等号的一端移到另一端时, 变为其反函数的符号. 如 $y = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow x = \arcsin y$.

(3) 单值反函数 f^{-1} 存在时, 有公式 $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in D$; $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(D)$.

如 $e^{\ln x} = x, x > 0$; $\arccos(\cos x) = x, x \in [0, \pi]$.

4. 分段函数

把定义域分为若干个集合,并分别在各集合上定义对应规则而形成的函数称为分段函数.

5. 复合函数

如 $y = f(u), u \in D_f; u = \varphi(x), x \in D_\varphi$, 则 $y = f(\varphi(x)), x \in D = \{x | x \in D_\varphi \text{ 且 } \varphi(x) \in D_f\}$ (当 $D \neq \emptyset$ 时)称为 f 与 φ 的复合函数.

注:求 $f(\varphi(x))$ 的定义域就是解不等式组: $x \in D_\varphi, \varphi(x) \in D_f$.

例如,已知 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$, 求 $f(\sqrt{x})$ 的定义域 D . 答: $D = [0, 4)$.

例 1-2 已知 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x^3, & x > 1, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析: $f(\square)$ 的表达式就是把 $f(x)$ 的表达式中所有的 x 都换为 $\square$.

解法 1: 先内后外法.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \begin{cases} f(x^2), & x \leq 1 \\ f(x^3), & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \begin{cases} \ln x^2, & x^2 > 0, \\ x^2, & x^2 \leq 0, \end{cases} & x \leq 1; \\ \begin{cases} \ln x^3, & x^3 > 0, \\ x^3, & x^3 \leq 0, \end{cases} & x > 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \ln x^2, & x^2 > 0 \text{ 且 } x \leq 1 \\ x^2, & x^2 \leq 0 \text{ 且 } x \leq 1 \\ \ln x^3, & x^3 > 0 \text{ 且 } x > 1 \\ x^3, & x^3 \leq 0 \text{ 且 } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln x^2, & x \neq 0 \text{ 且 } x \leq 1, \\ x^2, & x = 0, \\ \ln x^3, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

解法 2: 先外后内法.

$$f(g(x)) = \begin{cases} \ln g(x), & g(x) > 0 \\ g(x), & g(x) \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \ln x^2, & x \leq 1 \text{ 且 } g(x) > 0, \\ \ln x^3, & x > 1 \text{ 且 } g(x) > 0, \\ x^2, & x \leq 1 \text{ 且 } g(x) \leq 0, \\ x^3, & x > 1 \text{ 且 } g(x) \leq 0. \end{cases}$$

因为 $g(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \text{ 且 } x \leq 1 \text{ (或 } x^3 > 0 \text{ 且 } x > 1) \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ 且 } x \leq 1 \text{ (或 } x > 0 \text{ 且 } x > 1) \Leftrightarrow x \neq 0$, 因此 $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$. 所以可得 $f(g(x))$ 的最终表达式同解法 1.

6. 隐函数

方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 的定义域 D 与对应规则 $x \rightarrow y = y(x)$ 的定义为: $D = \{x | \exists x, y \text{ 使 } F(x, y) = 0\}; y(x) = \{y | F(x, y) = 0\}$.

注:隐函数可以是多值函数. 通常我们把多值函数分为若干个连续(或可微)的单值分支来研究. 如 $x^2 - y^2 = 0$ 确定了一个多值的隐函数 $y = \pm x, x \in \mathbf{R}$. 它可分为两个可微(当然也连续)的单值分支 $y_1 = x$ 与 $y_2 = -x$; 还可分出另外两个连续的分支 $y_3 = |x|, y_4 = -|x|$.

7. 基本初等函数的性质及其图形

共有 6 类基本初等函数: ① 常数函数 C . ② 幂函数 x^a . ③ 指数函数 a^x . ④ 对数函数 $\log_a x$. ⑤ 三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$. ⑥ 反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$. 这些函数的图形参见各类高等数学教材, 其性质由图即知.

需要强调的是,应熟悉这些函数在其定义域的开区间的端点处的单向极限值(从函数图可看出这些值). 如 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ($\ln 0^+ = -\infty$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ ($\ln(+\infty) = +\infty$).

其他情况: ① $\alpha > 0$ 时, $(0^+)^{\alpha} = 0^+$, $(+\infty)^{\alpha} = +\infty$; $\alpha < 0$ 时, $(0^+)^{\alpha} = +\infty$, $(+\infty)^{\alpha} = 0^+$.

② $a > 1$ 时, $a^{+\infty} = +\infty$, $a^{-\infty} = 0^+$; $0 < a < 1$ 时, $a^{+\infty} = 0^+$, $a^{-\infty} = +\infty$.

③ $a > 1$ 时, $\log_a(+\infty) = +\infty$, $\log_a 0^+ = -\infty$; $0 < a < 1$ 时, $\log_a(+\infty) = -\infty$, $\log_a 0^+ = +\infty$.

④ $\cos(\pm\infty)$ 不存在, $\sin(\pm\infty)$ 不存在.

⑤ $\arctan(-\infty) = (-\pi/2)^+$, $\arctan(+\infty) = (\pi/2)^-$, $\operatorname{arccot}(-\infty) = \pi^-$, $\operatorname{arccot}(+\infty) = 0^+$.

8. 初等函数及其连续性

由基本初等函数经有限次四则运算和复合而成的函数称为初等函数. 初等函数在其有定义的点连续.

9. 简单应用问题的函数关系的建立

参见例 5-34.

10. 数列极限与函数极限的定义

$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A$ 的定义: $\forall \varepsilon > 0$, 当 $x \rightarrow \square$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \infty$ (或 $\pm\infty$) 的定义: $\forall M > 0$, 当 $x \rightarrow \square$ 时, $|f(x)|$ (或 $\pm f(x)$) $> M$.

“当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x_0^{\pm}$) 时”的定义: “ $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0|$ (或 $\pm(x - x_0)$) $< \delta$ 时”.

“当 $x \rightarrow \infty$ (或 $\pm\infty$) 时”的定义: “ $\exists X > 0$, 当 $|x|$ (或 $\pm x$) $> X$ 时”.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ 中的 $n \in \mathbb{N}$; “当 $n \rightarrow \infty$ 时,” 的定义: “ $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时”.

注: ① 当 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A$ 时, 称 $x \rightarrow \square$ 时 $f(x)$ 收敛, 否则称 $f(x)$ 发散或 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$ 不存在.

② “不存在” $\supset$ “ ∞ ” $\supset$ “ $\pm\infty$ ”. 如 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 不存在 (但 $\neq \infty, \pm\infty$), $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3$ 不存在 (也 $= \infty$, 但 $\neq \pm\infty$), $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$ 不存在 (也 $= \infty$, 或 $= +\infty$, 但 $\neq -\infty$). ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 记为当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow A \Leftrightarrow f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$. 其中 $x \rightarrow x_0$ 时, x 不能等于 x_0 , $f(x)$ 可以等于 A .

11. 极限的性质

(1) 保号性: ① 如 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) > \lim_{x \rightarrow \square} g(x)$, 则当 $x \rightarrow \square$ 时, $f(x) > g(x)$. ② 如当 $x \rightarrow \square$ 时, $f(x) \leq g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \square} g(x)$.

(2) 有界性: 如 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$ 存在, 则当 $x \rightarrow \square$ 时, $f(x)$ 有界.

注: “当 $x \rightarrow \square$ 时”的定义见 1.2 节中 10.

12. 函数的左极限与右极限

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \stackrel{\text{记}}{=} f(x_0 - 0)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \stackrel{\text{记}}{=} f(x_0 + 0)$.

注: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 此式中的 $x_0, x_0^{\pm}$ 可同时换为 $\infty, \pm\infty$.

又 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \stackrel{\text{记}}{=} f(\pm\infty)$.

13. 无穷小和无穷大的概念

如 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0$ (或 ∞), 则称 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow \square$ 时的无穷小 (或大).

14. 无穷小和无穷大的关系

(1) 如 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \infty$; 则 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(2) 如 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0$ 且当 $x \rightarrow \square$ 时, $f(x) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

上述两个结论可以简单地记作: ① $\frac{1}{\infty} = 0$ ($\frac{1}{\pm \infty} = 0^\pm$), ② $\frac{1}{0} = \infty$ ($\frac{1}{0^\pm} = \pm \infty$). 类似地还有: ③ $\infty \times a$ ($a \neq 0$) $= \infty$ ($a > 0$ 时 $(\pm \infty) \times a = \pm \infty$, $a < 0$ 时 $(\pm \infty) \times a = \mp \infty$); ④ $\infty \times \infty = \infty$ ($(\pm \infty) \times (\pm \infty) = +\infty$, $(\pm \infty) \times (\mp \infty) = -\infty$); ⑤ $\infty + \text{有界} = \infty$ ($(\pm \infty) + \text{有界} = \pm \infty$); ⑥ $(\pm \infty) + (\pm \infty) = \pm \infty$, $(\pm \infty) - (\mp \infty) = \pm \infty$; ⑦ $0 \times \text{有界} = 0$ (见下面的“无穷小的性质”).

另外, 还有一些没有肯定结论的“不定式”: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ 及上述⑥中所列以外的 $\infty \pm \infty$.

注: $a < 0$ 时, $(-\infty) \times a = +\infty$ 的含义是: 如 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = a < 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} (f(x)g(x)) = +\infty$. 其他含义类似.

15. 无穷小的性质

(1) 无穷小乘有界变量仍为无穷小(简记为“ $0 \times \text{有界} = 0$ ”).

(2) $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) - A \stackrel{\text{记}}{=} \alpha$ 是当 $x \rightarrow \square$ 时的无穷小.

利用(1)解题时, 常遇到的有界(但可能无极限)变量: $\sin f(x)$, $\cos f(x)$, $\arctan f(x)$, $\arccot f(x)$, $(-1)^{f(n)}$.

16. 无穷小的比较

(1) 如 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = 0$, 则当 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (或 ∞ 或 1 或 $A \neq 0$) 时, 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶(或低阶, 或等价, 或同阶)无穷小($x \rightarrow \square$). 又当 $k > 0$, $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{(g(x))^k} = A \neq 0$ 时, 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 k 阶无穷小($x \rightarrow \square$).

(2) 两个符号“ o ”和“ $\sim$ ”(读作小 o 和等价)的定义: $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow \square$); $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow \square$).

注: (2) 中的 $f(x)$, $g(x)$ 不必是无穷小. 如 $x^2 = o(x^3)$ ($x \rightarrow \infty$); $\sin x = o(1)$ ($x \rightarrow 0$); $\sqrt{2n+3} - \sqrt{n} \sim (\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ ($n \rightarrow \infty$); $\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\tan x} \sim 2$ ($x \rightarrow 0$).

【等价替换定理】如 $\alpha \sim \beta$ ($x \rightarrow \square$), 则 $\lim_{x \rightarrow \square} (\alpha f(x)) = \lim_{x \rightarrow \square} (\beta f(x))$, 且 $\lim_{x \rightarrow \square} (f(x)/\alpha) = \lim_{x \rightarrow \square} (f(x)/\beta)$.

注: 等价替换只能用于乘除法, 不能用于加减法或复合等其他情况.

常用的等价无穷小: 当 $\square \rightarrow 0$ 时, $\square \sim \sin \square \sim \tan \square \sim e^\square - 1 \sim \ln(1 + \square)$, 又 $a^\square - 1 = e^{\square \ln a} - 1 \sim \square \ln a$, $(1 + \square)^a - 1 \sim a \square$, $1 - \cos \square \sim \frac{1}{2} \square^2$. 最后对任意的 $f(x)$, 都有 $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$.

例 1-3 求极限: (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(2\sqrt[3]{x^3-1}-1)}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2-1}}-1}$, (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{2x}) \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

解:(1) 因为 $x \rightarrow 1$ 时, $2^{\sqrt[3]{x^3-1}} - 1 \rightarrow 0$, 所以 $\arctan(2^{\sqrt[3]{x^3-1}} - 1) \sim 2^{\sqrt[3]{x^3-1}} - 1 \sim \sqrt[3]{x^3-1} \times \ln 2$ (因为 $\square \rightarrow 0$ 时, $a^\square - 1 \sim \square \ln a$).

又因为 $x \rightarrow 1$ 时, $\sqrt[3]{x^2-1} \rightarrow 0$, 所以 $\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2-1}} - 1 = (1+\sqrt[3]{x^2-1})^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2-1}$.

$$\text{故 原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3-1} \ln 2}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2-1}} = 2 \ln 2 \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} (2 \ln 2).$$

(2) 因为 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{3}{x} \rightarrow 0$, 所以 $\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) \sim \frac{3}{x}$.

又注意到 $x \rightarrow +\infty$ 时, $e^{2x} \rightarrow +\infty$, 故可知 $\ln(1+e^{2x})$ 的主要部分是 $\ln e^{2x}$, 所以猜测应该有 $\ln(1+e^{2x}) = \ln e^{2x} + o(\ln e^{2x}) \sim \ln e^{2x}$.

下面验证这一结论: $\ln(1+e^{2x}) - \ln e^{2x} = \ln(1 + \frac{1}{e^{2x}}) = o(\ln e^{2x})$.

(注意小 o 等式的验证方法: $\alpha = o(\beta) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$, 可以这样形象地记忆这个结论: $o(\beta)$ 就像 o 乘以 β , 故将 β 移到左边变成除以 β , “ o ”变成“0”, “ $=$ ”变成“ $\rightarrow$ ”)

$$\text{故 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^{2x}) \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot \frac{3}{x} = 6.$$

常见错误: $\ln(1+e^{2x}) \sim e^{2x}$, 即不管是否 $\square \rightarrow 0$, 都用等价式 $\ln(1+\square) \sim \square$ 进行代换.

17. 极限的四则运算

$$\lim_{x \rightarrow \square} (f(x) \pm (\text{或} \times \div) g(x)) \xrightarrow{\text{当右边存在时}} \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \pm (\text{或} \times \div) \lim_{x \rightarrow \square} g(x).$$

$$\text{推论 1-1} \quad \lim_{x \rightarrow \square} (f(x)^{g(x)}) \xrightarrow[\text{且 } f(x) > 0 (x \rightarrow \square)]{\text{当右边存在}} (\lim_{x \rightarrow \square} f(x))^{\lim_{x \rightarrow \square} g(x)}.$$

注: 当一个式子中含有两个极限号时, 只要其中一个不存在, 则该式不存在 (当然, 两个极限都不存在时, 该式也不存在).

又由反证法易证: 当 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = \text{不存在}$ 时, $\lim_{x \rightarrow \square} (f(x) + g(x)) = \text{不存在}$. 此结论可简记为“存在 $\pm$ 不存在 = 不存在”. 下面总结一下这类结构: ① 存在 $\pm$ 不存在 = 不存在. ② (非 0 存在) $\times$ 不存在 = 不存在. ③ $1 \div$ (不存在但非 ∞) = 不存在.

另外, 还有两个没有肯定结论的“不定式”: (不存在) $+$ $- \times \div$ (不存在), $0 \times$ (不存在).

18. 极限存在的夹逼准则

如果当 $x \rightarrow \square$ 时, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = \lim_{x \rightarrow \square} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A$.

注: “当 $x \rightarrow \square$ 时”的定义见 1.2 节中 10.

例 1-4 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_s^n}$, 其中 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, s$.

解: 记 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_s\} = M$, 因为 $0 \leq a_i^n \leq M^n$, 所以 $\sqrt[n]{M^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_s^n} \leq \sqrt[n]{sM^n}$. 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M^n} = M$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{sM^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s^{\frac{1}{n}} \cdot M = M$, 所以原式 $= M$.

19. 极限存在的单调有界准则

(1) 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 单增有上界 (或单减有下界), 则 x_n 收敛.

(2) 如果当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 单减有下界(或单增有上界), 则 $f(x)$ 收敛.

(3) 有关 $x \rightarrow +\infty, x_0^-$ 的情形与 $n \rightarrow \infty$ 类似; $x \rightarrow -\infty$ 的情形与 $x \rightarrow x_0^+$ 类似.

20. 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

21. 函数连续的概念

(1) 如 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (\text{或 } x_0^- \text{ 或 } x_0^+)}} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 (或 x_0 左, 或 x_0 右) 连续.

(2) 如 $f(x)$ 在区间 I 上的每一点都连续(闭区间端点只要求单侧连续), 则称 $f(x)$ 在 I 上连续.

注: 当 $f(x)$ 在点 $u_0 = \lim_{x \rightarrow \square} \varphi(x)$ 连续时, $\lim_{x \rightarrow \square} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \rightarrow \square} \varphi(x))$, 即 极限号可以进到连续函数的内部.

22. 函数间断点的类型

间断点的定义: 如 $f(x)$ 在 x_0 不连续(即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 不成立), 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

注: ① x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 不成立只有三种情况: (a) 左边 ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$) 不存在. (b) 右边 ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$) 不存在. (c) 左右都存在但不相等. ② 严格地说, 只有当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x_0^\pm$) 时, 在 $f(x)$ 有定义的情况下, x_0 才可能成为间断点.

间断点的分类: 当 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在时, x_0 称为第一类间断点; 否则, x_0 称为第二类间断点. 在第一类间断点中, 使 $f(x_0+0) = f(x_0-0)$ 的, 称为可去型间断点; 使 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$ 的, 称为跳跃型间断点. 在第二类间断点中, 使 $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 中至少有一个为无穷大的称为无穷型间断点, 否则称为振荡型间断点.

23. 闭区间上连续函数的性质

如 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 一定能够取到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值、最小值及介于两个最值之间的每一个值.

例 1-5 已知 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且 $x_i \in (a, b), i = 1, 2, \dots, n$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

分析: 因为等式右端是 $f(x_i)$ 的平均值, 所以它一定介于最值之间.

证: 设 n 个值 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ 中最大值为 $f(x_p)$, 最小值为 $f(x_t)$. 则

$$f(x_t) = \frac{nf(x_t)}{n} \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq \frac{nf(x_p)}{n} = f(x_p).$$

故由介值定理, 存在 ξ 在 x_t 与 x_p 之间 $\Rightarrow \xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

常见错误: ① 令 $M = \max_{(a, b)} \{f(x)\}$, 因为 $f(x)$ 在开区间可能没有最值.

② 令 $M = \max_{[x_1, x_n]} \{f(x)\}$, 因为可能 $x_2 \notin [x_1, x_n]$.