7354/64

小学数学教师参考书

XIAOXUE SHUXUE GAINIAN JIAOXUE

小学数学概念教学

上海教育出版社

小学数学教师参考书

小学数学概念教学

陈 幼 民

上海教育出版社

小学数学教师参考书
小 学 数 学 概 念 教 学
陈 幼 民
上海教育出版社出版
(上 海 永 福 路 123 号)
新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 1.75　字数 37,000
1979 年 11 月第 1 版　1979 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—50,000 本

统一书号：7150·2210　　定价：0.14 元

目　　录

一、什么是数学概念

客观世界中存在着无数的事物。任何一类事物都有很多属性。其中有些是某一类事物所特有的，借此可以把这一类事物和其他的事物区别开来。这些属性叫做事物的本质属性。概念就是人们反映事物的本质属性的思维形式，是人们对客观事物的一种认识。

例如，人们从5个人、5棵树、5只羊、5头牛、5辆汽车、5架飞机等集合中，逐步排除它们非特有的属性，最后就抽象得到它们共同的本质属性——都有5个单位的物体，从而得到数“5”的概念。

再如，一切物体，不管它多少重量，啥样颜色，是由什么物质构成的，都有一定的外形和占有一部分空间。由此，我们就得到了抽象的几何体(简称体)的概念。即体就是物体占有空间的形式。

需要注意的是，事物的概念与客观存在着的事物，不是一个东西。前者是一种认识，是一种思想，存在于人们的头脑之中；而后者却是一种独立存在于人类的头脑以外的客观事物。这是它们的区别。谁见过“加法”这个概念？人们只做过2+3、4+5等具体的运算。同样，球体的概念，人们也看不见，摸不着，而只能看到木球、铁球、皮球、雪球等具体的实物。

空间形式和数量关系，以及它们的本质属性在人的思维中的反映，就是数学概念。换言之，数学概念是客观事物在数与形方面的抽象化，是反映空间形式和数量关系的本质属性

的思维形式。小学数学中包含着大量的数学概念，主要有以下几个方面：

（1）数的概念：整数、小数、分数、正数、负数、有理数，及有关概念，如奇数、偶数、基数、序数、数序、数位、计数单位、数的进位制、分数单位、绝对值和数轴等。

（2）几何形体及有关概念：点，直线、射线、线段、曲线、垂线、平行线，锐角、直角、钝角，正方形、长方形、平行四边形、梯形、三角形、多边形，圆，正方体、长方体、圆柱、圆锥、球，周长、面积、地积、体积、容积等。

（3）运算方面的概念：加、减、乘、除、乘方，及有关的术语，如和、差、积、商、幂，代数和、加数、减数、被减数、指数、底数，第一级运算、第二级运算、第三级运算等。

（4）有关数的整除性方面的概念：如整除、约数、倍数、公约数、公倍数、最大公约数、最小公倍数、因数、质数、合数、互质数等。

（5）比和比例的概念：如比、比例尺、连比，比例、正比例、反比例、解比例等。

（6）量和计量单位的概念：离散量单位，如个、只、匹、头、台、元、角、分等；连续量单位，如时间单位（年、月、天、小时、分、秒）、重量单位（吨、公斤、克，斤、两）、长度单位（米、分米、厘米、毫米，丈、尺、寸）、面积单位（平方公里、平方米、平方分米、平方厘米，平方里、平方丈、平方尺、平方寸）、地积单位（平方公里，平方里、亩、分）、体积单位（立方米、立方分米、立方厘米、立方毫米，立方尺、立方寸）、角度单位（度、分）等。

（7）式的有关概念：等式、方程、不等式、代数式，及有关概念，如代数式的值、方程的解、解方程等。

（8）其他有关数学术语：如增加、减少、增加到、减少到、

扩大、缩小、平均、倍、单价、总价、剩余、距离、速度、横断面等。

二、数学概念教学的地位和作用

在小学数学课中，要特别强调基础知识和基本技能的教学，而知识与技能都是建立在一系列概念的基础之上。学生如果有了正确、清晰、完整的数学概念，就有助于掌握基础知识，提高运算和解题的技能、技巧。

在教学中，可以看到不少学生由于概念清晰、明确，于是具有较强的分析问题和解决问题的能力。譬如：

例 1. 计算：$\left(9\frac{5}{13}\times21.3+3.4\times9\frac{5}{13}-9\frac{5}{13}\times24.5\right)\div0.037\times0\div5.6$。

解：$\left(9\frac{5}{13}\times21.3+3.4\times9\frac{5}{13}-9\frac{5}{13}\times24.5\right)\div0.037\times0\div5.6=0$。

这道题，由于学生正确理解了零的意义和性质，因而直接得出了计算结果。

例 2. 若 $(x-3)^2+(y+4)^2=0$，求 $xy+2xy+3xy$ 的值。

此题初看起来，似乎无法可解。但是，如果学生对有理数的平方和零的概念理解得比较清楚的话，就能找到解题的线索。

解：因为任何一个有理数的平方都是非负数，即

$$(x-3)^2\geqslant0,\qquad (y+4)^2\geqslant0,$$

因此，要使

$$(x-3)^2+(y+4)^2=0,$$

就必须有

$$(x-3)^2=0 \quad 和 \quad (y+4)^2=0,$$

所以求得

$$x=3, \quad y=-4。$$

于是

$$\begin{aligned} & xy+2xy+3xy \\ = & 6xy \\ = & 6\times3\times(-4) \\ = & -72。\end{aligned}$$

反之，如果学生对概念理解不清，那么就会经常出现运算错误、推理荒谬的情况。譬如:

例 1. 老师读: 十四、十七、十九、十二、二十。

同学写: 104、107、109、102、20。

上面这种错误，经常是由于教师在讲 11～20 各数的读法和写法时，数位概念没有讲清楚而造成的。

如讲 12，教师说左边有 1 个十，右边有 1 个 2，合起来写成 12，读作"十二"。

这样，部分学生就理解成: 左边有 1 个 10，右边有 1 个 2，合起来写成"102"，读作"十二"。而不知道十位上写"1"就代表一个"10"。

例 2. $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}。$$

这是学生中经常出现的一个典型错误。出现这种错误的原因有两个: (1)学生对分数概念糊涂，不知道$\frac{1}{2}$是把整体"1"平均分成 2 份，表示其中 1 份的数；而错误地把 1 和 2 分割开，看成两个无关的整数。结果盲目地套用整数加法，将分子

加分子，分母加分母。(2) 不理解分数单位及约分的意义。不知道$\frac{2}{4}$是由 2 个$\frac{1}{4}$组成的，而不是由 2 个$\frac{1}{2}$所组成；也不知道$\frac{2}{4}$约分后仍是$\frac{1}{2}$。所以闹出了“半个加半个仍是半个”的笑话。

例 3.

$$\begin{array}{r} 2\;1.\;5\\ +\;3.\;6\;4\\ \hline 5.\;7\;9 \end{array}$$

这是整数竖式加法的痕迹性错误，反映了学生对小数及其数位概念的模糊。学生误认为 21.5 和 3.64 都是三位数，相加时应该首尾分别对齐。和的定位，也只是盲目地将与其靠近的加数 3.64 的小数点移下来了事。

例 4.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}+\overset{2}{\cancel{6}}-2}{\underset{1}{\cancel{5}}+\underset{1}{\cancel{8}}+9}=\frac{0}{9}=9。$$

本例由于概念模糊而一错再错：

(1) 约分是约去分子、分母公有的约数(因子)。这里分子、分母都是和的形式，而学生却错误地对加数进行了约分。

(2) 把“1”的加法与“1”的乘法相混淆，在分子、分母中都丢掉了加数 1，于是分子成了 $2-2=0$，分母成了 9。

(3) “0”的概念糊涂，因而造成$\frac{0}{9}=9$的错误。

例 5.　$16\div\left[4\times3^2+\left(-6\frac{1}{2}\right)\times\frac{8}{13}\right]$

$$=16\div\left[4\times 6+\left(-\frac{13}{2}\right)\times\frac{8}{13}\right]$$
$$=16\div[24+(-4)]$$
$$=16\div 20$$
$$=\frac{4}{5}。$$

此题由于学生仅对"乘方"一个概念掌握得不牢固，错将3^2算成$3\times 2=6$，而造成全盘计算错误。

下面再举一个由于概念模糊而造成推理荒谬的例子。

例 6. 设

$$a=b。$$

两边都乘以a，得

$$a^2=ab,$$

两边再各减去b^2，得

$$a^2-b^2=ab-b^2。$$

分解因式：

$$(a+b)(a-b)=b(a-b),$$

两边都除以$a-b$，得

$$a+b=b,$$

即 $$b+b=b,$$

$$2b=b,$$

所以 $$2=1。$$

真是荒谬绝伦！问题就在于，在上面的推理过程中，等式两边约去了$(a-b)$，而根据已知条件$a=b$，有$a-b=0$。大家都知道，零是不能做除数的。

此外，概念教学对培养学生的思维能力，也起着重要的作用。因为概念是判断和推理的起点，是学生发展正确思维的

基础。如果学生对概念理解不清，那么就不可能有正确的思维。概念不清的地方多了，就会严重阻碍学生思维能力的发展。

所以，我们必须对小学数学的概念教学，进行认真的研究。

三、小学数学概念教学的特点和要求

概念是比较抽象的，数学概念更其抽象。但是小学生，小的六岁，大的也不过十二、三岁，他们的心理特征却是容易理解和接受直观的具体的感性知识，而不容易理解和接受抽象的理性知识。事实上，小学生的这个心理特征也是符合一般人的认识规律的。人类对事物的认识，就是在多次感性认识的基础上产生飞跃而形成概念的。只不过由于小学生的思维还未充分发展，因而他们的思维更带有直观性罢了。鉴于上面的原因，所以小学数学的概念教学，必须在直观的、感性的基础上进行。

入学前的孩子，一岁到七岁，虽然年龄较小，但接触事物也已很多。二岁学说话，三岁哇喇哇喇跟人吵架，再大一点就拿小工具挖土，模仿大人劳动，……。孩子进入学校后，教师应该有意识地不断丰富他们的感性知识，并在此基础上，帮助学生逐步抽象、概括出某些概念来。

但是对于每一个人来说，所接触的事物、观察的世界毕竟是有限的，不能事事直接经验，许多概念和知识都是间接得来的，是从别人或书本那里学来的。况且数学是一门高度抽象

的学科，要学好它必须具有一定的抽象思维的能力。所以，在小学数学教学中，教师还应在直观的基础上，逐步培养学生从概念到概念的抽象思维的能力。

事实上，学生在入学以前，就已在他们的实践中获得了一些简单的数和形的概念。三、四岁的孩子已能用手指来表示1个、2个、3个物体，并读出这些数来。能辨别敞开的图形和闭合的图形。如你要他照样画一个四边形或三角形，他便会画一个闭合的圆圈。并且还能用圆来表示他所想画的苹果、西瓜等物，用曲线来表示直线。一个五、六岁的儿童，可以从一数到十。假如把十根火柴排成一行，他能够数得很正确。而经过训练的幼儿园的儿童，则多数能从一数到二十。能顺利地画出三角形和四边形，画出相交线和平行线。所以，即使是刚入学的小学生，他们在数和形的概念方面也已不是一张白纸。教师应该在学生已有的基础上，帮助他们将概念逐步完善起来，并由此及彼，沟通概念间的联系，使学生逐步明确概念是怎样得到的，是怎样定义的，以及概念间的关系等。

综上所述，在小学数学教学中，应该根据学生的接受能力，从具体到抽象，从简单到复杂，从已知到未知，使学生在观察具体事例的基础上抽象、概括出数学的概念和规律来。年级愈低，教学中生动、直观、具体的事例就需要愈多。随着学生年龄的增长、年级的升高，抽象的定义、推理等可逐渐地、适当地增加。

下面再谈谈概念教学的要求。

概念教学的最基本的要求，就是要使学生概念明确。所谓概念明确，就是要明确概念的内涵和外延。在逻辑上，概念的内涵，就是概念所反映的事物的本质属性。我们在研究事物的本质属性时，不只要了解其中的一部分，而且要了解它的全

部，即总和。概念的内涵，是概念所反映的事物的一切本质属性的总和。例如：加法的内涵包含有运算，把两个数合并成一个数等两个本质属性；质数的内涵包含有是一个数，只有1和它本身两个约数等两个本质属性；方程的内涵包含有是等式，且含有未知数等两个本质属性；钝角三角形的内涵包含有是三角形，一个角是钝角等两个本质属性；等腰梯形包含有是四边形，一组对边互相平行，另一组对边相等等三个本质属性；等等。

概念的外延，就是概念所指的对象（事物）的全体。例如："非负整数"的外延是全体自然数和零；分数的外延是所有的真分数、假分数（带分数）及零分数；算术四则运算的外延是加法、减法、乘法、除法；三角形的外延包含所有的锐角三角形、直角三角形和钝角三角形；等等。

不难了解，概念所包含的本质属性增多，它所适合的对象的范围就减小；概念所包含的本质属性减少，它所适合的对象的范围就增大。反之亦然。例如图1中，每次增添一个本质属性后就得到一个新的概念。显然，这些概念所指的对象的范围越来越小。

图 1

这说明，概念的内涵和外延是相互制约的。

在小学数学教学中，当然不必向学生提出内涵和外延这两个术语。但是教师应当从这两个方面来讲清概念，并且也应从这两个方面来检查学生对所学的概念是否明确。

在明确概念的基础上，教师应该要求学生牢固地掌握概

念。例如，要求学生能复述概念的定义，能熟记一些数和形的性质，能搞清一概念和它概念的区别和联系，能掌握概念的分类等等。并进而要求学生正确灵活地运用概念．例如，要求学生能正确灵活地运用概念组成判断、进行推理、计算、作图等，分析和解决实际问题。

除了课堂教学的要求外，教师还应力图使学生能以发展的辩证的观点来认识概念，能在三大革命实践中自己丰富概念。

四、恰当地引入概念

概念教学的第一步，就是要引入概念。概念引入得好还是坏，直接关系到学生对概念的理解和接受，关系到教学的成败。因此，教师对此不能掉以轻心。在教学中，引入一个新的概念，一般有以下几种途径。

（一）形象地引入概念

所谓形象地引入概念，就是通过学生所熟悉的实例以及生动形象的比喻，提出问题，引入概念；或者采用模型教具、图画演示、幻灯、电影等，增加学生的感性知识，然后逐步抽象，引入概念。

例如，一年级教“3”的认识时，教师可先引导学生数三枝铅笔、三本书、三张桌子、三辆汽车等他们所熟悉的物体，使学生逐步领悟各组物体所具有的共同特征，然后再概括出抽象的数——“3”。实际上，这就是通过列举一系列3个物体的办

法，逐步使学生加深对数 3 的内涵的认识，而引入数“3”的概念。

又如，在认 10 以内的数时，教师可如图 2 所示，先用小棒摆成一条直线，同时在每根小棒的右下角依次用一个自然数与它对应，让学生认读；然后再过渡到让学生认读直尺上的数，使学生了解，在自然数 1 上添上 1 就得到自然数 2，在 2 上添上 1 就得到自然数 3，在 3 上添上 1 就得到自然数 4，……，使学生有一个自然数列的具体的模式。象图 2 这样的图示反复出现多次后，再引入数序、大小、基数、序数等概念，学生就比较容易接受了。

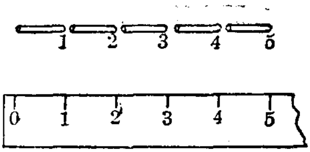


图 2

再如，教乘法这个概念时，教师可以举出很多乘法的实例，例如：

（1）每堆 2 穗玉米，4 堆有多少穗？

$$2+2+2+2=8(\text{穗}),$$

可以简写成 $2\times4=8(\text{穗})$。

（2）白菜每斤 3 分，买 5 斤要多少钱？

$$3+3+3+3+3=15(\text{分}),$$

可以简写成 $3\times5=15(\text{分})$。

（3）每行树有 9 棵，6 行树有多少棵？

$$9\times6=54(\text{棵})。$$

使学生逐步归纳出乘法的意义。

在讲授分数、分数的大小、直线、平行线、图形、体积等概念时，一般也都是采用这种直观的教学方法。这样教学既联系了工农业生产实际，又易调动学生学习的积极性，使学生对概念的外延了解具体，对概念的内涵印象鲜明。

(二)在学生原有概念的基础上引入新的概念

当新概念与原有的概念联系十分紧密时，只需抓住它们内涵的差异作出简要的说明，就可以使学生建立起新的概念。

例如，数的整除性是小学数学的重要内容之一，有关数的整除性的概念很多，它们的内在联系十分紧密。在教学中，可参照下列步骤，从整除概念出发，一环紧扣一环，逐步引出其他的概念。

(1) 使学生牢固地掌握整除的概念。所谓整除，就是指整数除法里，两个数相除，其商正好是整数而没有余数。如 $15\div3=5$，我们说 15 能被 3 整除；而 $15\div2=7$（余 1），我们就说 15 不能被 2 整除。

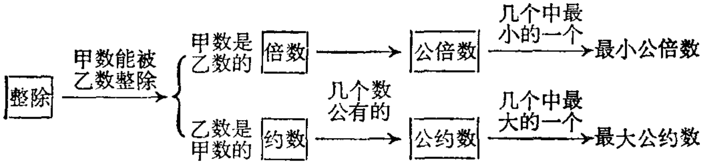
(2) 应用整除的概念，引出约数和倍数的概念。如 15 能被 3 整除，则 15 是 3 的倍数，3 是 15 的约数；而 15 不能被 2 整除，则 15 不是 2 的倍数，2 也不是 15 的约数。

在引出倍数和约数的概念后，还应强调指出：1°倍数和约数是以整除为前提的；2°倍数和约数是一对相互依存的概念，不能孤立地说某数是约数，某数是倍数；3°一个数的约数的个数是有限的，其中最小的是 1，最大的是它本身；而一个数的倍数的个数是无限的，其中最小的就是它本身，但没有最大的。学生理解了最后一点，就为下面引出最大公约数和最小公倍数等概念准备了条件。

(3) 在约数和倍数的概念中，添上“几个数公有的”这一特性，而引出公约数和公倍数的概念；在公约数和公倍数的概念中，再分别添上“最大”、“最小”的限制，而引出最大公约数

和最小公倍数的概念。

上面就是在学生原有概念——整除的基础上，逐步加深这个概念的内涵，而引出一系列的新概念。



(4) 利用约数的概念引出质数与合数的概念。

在自然数范围内观察：

24 的所有约数为：{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}；

13 的所有约数为：{1, 13}；

37 的所有约数为：{1, 37}；

121 的所有约数为：{1, 11, 121}；

1 的所有约数为：{1}。

分析、归纳得出：

13, 37 是一类数，它们除了 1 和本身外，没有其他约数，引出质数(又叫素数)的概念；

24，121 是另一类数，它们除了 1 和本身外，还有其他约数，引出合数的概念；

1 是单独的一类数，它只有一个约数“1”，引出 1 既不是质数也不是合数。

(5) 利用公约数的概念引出互质数的概念。

观察：

3 和 7(两个都是质数)只有公约数 1；

7, 9 和 12(一个质数，两个合数)只有公约数 1；

9, 10 和 25(三个都是合数)只有公约数 1；