

21

世纪通向研究生之路系列丛书

考试要点·例题精解·实战习题

理、工科线性代数

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

● 考研成功的阶梯

● 课程学习的帮手

徐仲等 编

常见题型解析及模拟题

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书通过对大量有代表性的典型例题进行分析和求解,揭示了线性代数的解题方法和技巧,使学生可以“按图索骥”、“举一反三”,通过练习提高基本运算、推理及应试能力。本书分上、下两篇。上篇共6章,主要内容为行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型,这部分内容供工科、经济学科的学生复习线性代数及考研使用;下篇共4章,主要内容为线性空间、 λ -矩阵、线性变换、欧氏空间,全书内容供理科学生复习线性代数及考研使用。各章由基本概念、重要结论与公式、典型例题解析、练习题四部分组成。本书的主要特点是:理工兼顾,层次分明;图表醒目,内容丰富;专题分类,解析透彻;例题精选,习题全解。

本书可供学习线性代数和高等代数的理工科大学生以及报考硕士研究生的读者复习应试之用,也可作为有关教师及科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

理、工科线性代数常见题型解析及模拟题/徐仲等编. —西安:西北工业大学出版社,2002.7
(21世纪通向研究生之路丛书)

ISBN 7-5612-1519-3

I. 理... II. 徐... III. 线性代数-研究生-入学考试-解题 IV. 0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 036436 号

出版发行:西北工业大学出版社出版发行

通信地址:西安市友谊西路 127 号,邮编 710072 电话:029-8493844

网 址:<http://www.nwpu.com>

印 刷 者:陕西友盛印务有限责任公司印装

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:18.75

字 数:553 千字

版 次:2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

印 数:1~6 000 册

定 价:22.00 元

通向研究生之路系列丛书编委会

顾问 戴冠中(西北工业大学原校长,博士生导师,教授)

主任委员 徐德民(西北工业大学原副校长,博士生导师,教授)

副主任委员 孙朝(陕西省学位委员会办公室主任)

王润孝(西北工业大学校长助理,教务处处长,教授)

冯博琴(西安交通大学教务处原副处长,教授)

韦全生(西安电子科技大学教务处原副处长,教授)

郑永安(西北工业大学出版社社长兼副总编,副编审)

委员 史忠科 张畴先 王公望 葛文杰

刘达 支希哲 范世贵 武自芳

丛书策划 王璐 张近乐

序

● 邱关源^①

面向 21 世纪, 社会对德才兼备的高素质科技人才的需求更加迫切。通过行之有效的途径和方法培养符合时代要求的优秀人才, 是摆在全社会尤其是高等学校、科研院(所)面前一项艰巨而现实的问题。

为了强化素质教育, 使大学生学有所长, 增强才智, 高等教育部门各有关单位对高等学校公共基础课、技术基础课到专业课的整个教学过程做了大量细致的工作。与之相配合, 不少出版社也相继出版了指导学生理解、领会教学内容, 增强分析、解决问题能力的辅导读物, 其中多数是关于外语、数学、政治等公共基础课的, 极大地满足了大学生基础课学习阶段相应的要求。但当学习技术基础课时, 学生们同样需要合适的参考书来帮助他们掌握课程重点和难点, 提高课程学习水平, 以及指导解题的思路和技巧, 乃至适应研究生入学考试的需求。不过, 这类读物目前比较少见。基于此, 西北工业大学出版社的同志们深入作者、读者之中, 进行市场调研研究, 在广泛听取意见的基础上, 组织数十位在重点大学执教多年, 具有较高学术造诣的一线教师, 经历两年, 精心编撰了这套旨在有效指导大学生学习技术基础课, 为课程学习、应试考研及以后工作提供帮助的参考书。

^① 邱关源——西安交通大学教授, 博士生导师。曾任第一、二届中国电工技术学会理论电工专业委员会副主任委员, 高等教育委员会工科电工课程教学指导委员会委员。

该丛书首批推出 9 种,所有书稿几经修改,并经同行专家审定。内容选材符合课程基本要求,并且重在对基本概念的启发、理解和提高读者分析问题的能力。我热情地向大家推荐这套丛书,希望它能对广大读者的学习有所帮助,更期望它能在强化素质教育、推动教学改革方面起到积极作用。

邱 芳 源

1997 年 10 月

出版说明

随着经济建设的快速发展和科教兴国战略的实施,社会对高素质专业人才的需求更加迫切。崇尚知识,攻读学位,不仅是一种知识价值的体现,更是社会进步的标志。“考研热”已成为当今社会一道引人注目的风景线,成为莘莘学子乃至全社会关注的热点。

研究生入学考试是通向研究生之路上必过的一关。除了政治、英语、数学等公共基础课之外,技术基础课(专业基础课)和专业课也是必考的科目。为了配合全国各高校加强高素质、知识型人才的培养的需求,也为了给广大同学提供一套行之有效的、切合实际的考研指导用书,西北工业大学出版社精心策划和组织编写了《通向研究生之路系列丛书》,并于1997年9月陆续出版,至今已出版17种,基本涵盖了全国工科院校所开设的技术基础课和拟选定的考研科目。

本丛书具有以下4大特点。

1. 选题新颖,独树一帜

该丛书站在新的视角,有针对性、有计划地推出整套工科学技术基础课的学习用书,令人耳目一新。

2. 紧扣大纲,严把尺度

丛书紧紧围绕国家教育部制定的教学大纲及研究生入学考试大纲,按照基础知识与提高解题技巧的主线,把握住内容的深浅程度,既保证课程学习时开卷有益,又能对复习应试行之有效。

3. 重视能力,提高技巧

该丛书严格遵从不管是课程学习还是考试,其最终目的都是为提高学生分析问题、解决问题的能力这一主旨,重在通过阐明基本要点及典型例题解析来引导学生识题、解题。

4. 选材得当,重点突出

参加本丛书编写的作者均是从事教学工作多年的资深教师。在丛书内容的取舍、材料的选编及文字表达方面能更胜

一筹。因此,丛书内容得当,材料全而不滥,精而易懂,注释简明,解析扼要。

这套丛书的价值和生命,在时间的考验和市场的竞争中得到充分的证实。3年多来,从读者热忱的来函、来电和来访中可以看出,丛书不仅使广大报考硕士研究生的同学们深受裨益,而且对高校的教学改革起到了推波助澜的作用。基于此,在科学技术高速发展、高校基础课教材不断更新的今天,我们深感有责任、有义务,增新摒旧,扬长弥短,下大功夫,继续努力,使这套丛书日臻完美,以更好地为广大读者服务,为科技进步服务。

本次修订我们是在组织了资深作者,经过认真的讨论,多次的酝酿,在完成扎实的前期工作的基础上进行的。首先,对各分册第1版进行了精细、严格的审订;其次,在保持原有的结构严谨、重点突出、实用性强等特点的基础上,对部分内容予以删改、补充、更新;第三,为了配合当前高等学校注重培养高素质的知识型人才,拓宽基础知识面,加强基础理论的教学要求,修订时特别注意将科技发展中成熟的新技术予以补充;第四,与新修订的全国通用教材的内容相应配套,补充了例题或习题,有的分册增加了新的章节;第五,各个分册的附录部分都做了较大的变动,使读者不仅可以了解具体内容,而且为那些有志深造的读者提供有积累价值的资料。

本丛书的出版得到了多方面的支持和关心,陕西省学位委员会办公室、西安交通大学、西安电子科技大学、西北工业大学等单位的有关人士为本丛书的出版出谋划策,提出了许多建设性的意见。西安交通大学邱关源教授献身教育事业50余年,德高望重,学识渊博,他在百忙中为本丛书写了序,充分肯定了本丛书的价值。为此,我们一并表示衷心的感谢。

这套丛书现以《21世纪通向研究生之路系列丛书》的崭新面貌进入市场。它把丛书的作者、读者和出版者紧紧地联系在一起。在本套丛书第2版即将付梓之际,我们对辛勤耕耘在教学、科研第一线,将自己在实践中积累的知识无私奉献给社会、奉献给读者的各位作者老师表示衷心的感谢。我们坚信,修订后的这套丛书将为在书海中勤奋进取的同学们指引一条通向成功的捷径,也必将成为在知识海洋中遨游的学子们不断搏击,获取胜利的力量源泉。

丛书编委会

2000年9月

前言

线性代数是高等学校理工科及经济学科各专业普遍开设的一门数学课程,这门课程不仅是继续学习其它数学课程的基础,也是学习物理、力学、电路等课程的基础。特别是由于计算机技术的飞速发展与广泛应用,使大量工程与科研中的问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决,这就使得以处理离散量为主的线性代数课程占有越来越重要的地位,成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础。在全国统一命题的硕士研究生入学数学考试中,线性代数的内容在工学类的“数学一”和“数学二”中含两小题、两大题,约占 20 分;经济学类的“数学三”和“数学四”中含三小题、两大题占 25 分。正如瑞典数学家 L. 戈丁在其所著的《数学概观》中指出的:“如果不熟悉线性代数的概念,如线性性质、向量、线性空间、矩阵等等,要去学习自然科学,现在看来就和文盲差不多,甚至学习社会科学也是如此。”因此,作为一个大学生或研究生,如果不较好地掌握线性代数方面的知识,恐怕将来连阅读文献都会感到困难。

线性代数课程内容多,比较抽象,且具有一套特有的理论体系、思维方法及解题技巧。学生在学习线性代数时,往往感到抽象难懂,对如何解题缺少思路,对课程考试和考研的相关内容把握不准,本书就是为帮助读者解决这些问题而编写的。

本书分上、下两篇。上篇共 6 章,主要内容为行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和二次型,这部分内容供工科、经济学科的学生复习线性代数及考研使用;下篇共四章,主要内容为线性空间、 λ -矩阵、线性变换和欧氏空间,全书内容供理科学生复习线性代数及考研使用。各章由基本概念、重要结论与公式、典型例题解析、练习题四部分组成。附录中给出了数套工科模拟题、理科模拟题,并给出了全部习题及模拟题的解答。

本书的主要特点是:

(1)理工兼顾,层次分明。书中涉及了理、工科线性代数的几乎全部内容。特点是后四章的内容在目前的有关辅导教材中是不多见的。

(2)图表直观,内容丰富。各章中将主要概念和结论进行了简明扼要的叙述、归纳和总结,部分内容通过表格或借助框图直观地表示。对于有些内容未按通常线性代数教材的章节顺序给出,这是由于线性代

数的知识前后联系紧密、相互渗透,集中给出有利于加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确使用。

(3)专题分类,解析透彻。在各章的典型例题解析部分,按线性代数的内容与知识点进行分门别类,归纳出了一些小专题。通过对一些有代表性的典型例题进行分析和求解,揭示了线性代数的解题方法和技巧,使学生可以“按图索骥”、“举一反三”,通过练习提高基本运算、推理及应试能力。

(4)例题精选,习题全解。为巩固所学内容,各章均精选了一些练习题,其中包括了考研的部分试题。特别是对全部习题给出了简要解答或分析过程,便于学生检验有关内容的掌握程度。

本书可供报考硕士研究生的读者复习应考之用,可作为理、工科和经济学科大学生学习线性代数和高等代数的辅导教材,也可作为有关教师及科技工作者的参考书。

书中的疏漏或不妥之处,敬请读者指正。

作 者

2002年1月于西北工业大学

目 录

上 篇

1 行列式	3
1.1 基本概念	3
1.1.1 n 阶行列式的定义	3
1.1.2 转置行列式	4
1.1.3 余子式与代数余子式	4
1.2 重要结论与公式	5
1.2.1 行列式的性质	5
1.2.2 与行列式有关的结论	5
1.3 典型例题解析	7
1.3.1 具体行列式的计算	7
1.3.2 抽象矩阵行列式的计算	12
1.3.3 有关代数余子式的计算	14
1.3.4 其它	16
1.4 练习题	16
2 矩阵	18
2.1 基本概念	19
2.1.1 矩阵的概念	19
2.1.2 矩阵的相等	19
2.1.3 矩阵的线性运算	19
2.1.4 矩阵乘法	19
2.1.5 转置矩阵	19
2.1.6 方阵的行列式	19
2.1.7 几类特殊矩阵	19
2.1.8 可逆矩阵与逆矩阵	20
2.1.9 伴随矩阵	20

2.1.10	分块矩阵	20
2.1.11	矩阵的秩	21
2.1.12	矩阵的初等变换	21
2.1.13	正交矩阵	21
2.1.14	正(负)定矩阵	21
2.2	重要结论与公式	21
2.2.1	矩阵的运算律与有关公式	21
2.2.2	矩阵运算中可能不成立的结论	22
2.2.3	矩阵可逆的充要条件	23
2.2.4	矩阵的等价标准形	23
2.2.5	初等矩阵的性质	24
2.2.6	等价矩阵的充要条件	24
2.2.7	矩阵秩的有关结论	24
2.2.8	一些 n 阶特殊矩阵的有关结果	25
2.3	典型例题解析	26
2.3.1	求逆矩阵	26
2.3.2	求解矩阵方程	28
2.3.3	求方阵的幂	30
2.3.4	求矩阵的秩	32
2.3.5	初等变换与初等矩阵	35
2.3.6	分块矩阵的有关运算	37
2.3.7	其它	39
2.4	练习题	40
3	向量	42
3.1	基本概念	43
3.1.1	n 维向量的概念	43
3.1.2	向量的运算	43
3.1.3	线性组合与线性表出	43
3.1.4	线性相关与线性无关	44
3.1.5	向量组的秩与极大无关组	44
3.1.6	向量空间	44
3.1.7	基、维数、坐标	44
3.1.8	向量的长度与夹角	44
3.1.9	标准正交基	44
3.1.10	基变换、过渡矩阵	44
3.2	重要结论与公式	45
3.2.1	向量的运算律及性质	45
3.2.2	线性表出与线性相关的关系	45

3.2.3	线性相关与线性无关的判别	46
3.2.4	向量组的秩与矩阵秩的关系	46
3.2.5	等价向量组的性质	46
3.2.6	生成子空间的有关结果	47
3.2.7	过渡矩阵、坐标变换公式	47
3.2.8	Schmidt 正交化方法	47
3.2.9	正交矩阵的有关结果	47
3.3	典型例题解析	48
3.3.1	向量能否由向量组线性表出的判定	48
3.3.2	向量组线性相关与线性无关的判定	49
3.3.3	求向量组的秩与极大无关组	52
3.3.4	有关正交矩阵的判定与证明	54
3.3.5	求向量空间的基与维数	55
3.3.6	求过渡矩阵与向量的坐标	57
3.4	练习题	59
4	线性方程组	61
4.1	基本概念	61
4.1.1	线性方程组的概念	61
4.1.2	线性方程组的几种形式	62
4.1.3	线性方程组的相容性与通解	62
4.1.4	解空间与基础解系	62
4.1.5	线性方程组的初等变换	62
4.2	重要结论与公式	63
4.2.1	克莱姆法则	63
4.2.2	线性方程组的初等变换把线性方程组变成与它同解的方程组	63
4.2.3	齐次与非齐次线性方程组的有关结果	63
4.3	典型例题解析	64
4.3.1	求齐次线性方程组的基础解系	64
4.3.2	求解线性方程组的消元法	66
4.3.3	含参数线性方程组的求解	68
4.3.4	抽象线性方程组的求解	71
4.3.5	求线性方程组的公共解	74
4.3.6	有关平面、直线的综合题	75
4.3.7	有关矩阵秩的证明	77
4.4	练习题	78
5	矩阵的特征值与特征向量	80
5.1	基本概念	80

5.1.1	特征值与特征向量	80
5.1.2	特征多项式与特征方程	80
5.1.3	相似矩阵	81
5.1.4	正交相似	81
5.1.5	可对角化	81
5.2	重要结论与公式	81
5.2.1	特征值与特征向量的性质	81
5.2.2	相似矩阵的性质	82
5.2.3	矩阵可对角化的条件	82
5.3	典型例题解析	82
5.3.1	求矩阵的特征值与特征向量	82
5.3.2	方阵 A 能否对角化的判定与计算	87
5.3.3	实对称矩阵正交相似于对角矩阵的计算	89
5.3.4	由特征值和特征向量反求矩阵或矩阵中的参数	91
5.3.5	有关特征值与特征向量的证明	93
5.4	练习题	94
6	二次型	96
6.1	基本概念	96
6.1.1	二次型	96
6.1.2	二次型的矩阵表示	96
6.1.3	二次型的标准形与规范形	97
6.1.4	正、负惯性指数	97
6.1.5	可逆变换与正交变换	97
6.1.6	合同矩阵	97
6.1.7	正定二次型与正定矩阵	97
6.1.8	负定二次型与负定矩阵	97
6.1.9	顺序主子式	97
6.2	重要结论与公式	98
6.2.1	合同矩阵的性质	98
6.2.2	二次型变换的矩阵	98
6.2.3	二次型的化简	98
6.2.4	主轴定理	98
6.2.5	惯性定理	98
6.2.6	矩阵的等价、相似与合同	99
6.2.7	判断正定二次型与正定矩阵的充要条件	99
6.2.8	判断负定二次型与负定矩阵的充要条件	100
6.2.9	正定矩阵的性质	101
6.2.10	二次曲面类型表	101

6.3 典型例题解析	101
6.3.1 二次型的矩阵	101
6.3.2 用正交变换化二次型为标准形	102
6.3.3 用配方法化二次型为标准形	104
6.3.4 用初等变换化二次型为标准形	106
6.3.5 正定矩阵的判定与证明	107
6.3.6 有关正定矩阵命题的证明	109
6.3.7 矩阵相似与合同的判定	109
6.4 练习题	111
附录1 历届全国考研数学试题中线性代数试题分数分布表	113
附录2 模拟试题	117
线性代数试题(1)	117
线性代数试题(2)	118
线性代数试题(3)	119
线性代数试题(4)	120

下 篇

7 线性空间	125
7.1 基本概念	125
7.1.1 数域	125
7.1.2 线性空间	125
7.1.3 线性表出、元素组的等价	126
7.1.4 线性相关与线性无关	126
7.1.5 秩与极大无关组	126
7.1.6 基、维数与坐标	126
7.1.7 基变换公式、过渡矩阵	126
7.1.8 子空间、生成子空间	127
7.1.9 子空间的交、和与直和	127
7.1.10 映射	127
7.1.11 映射的相等、乘积和逆映射	127
7.1.12 线性空间的同构、同构映射	128
7.2 重要结论与公式	128
7.2.1 线性空间的基本性质	128
7.2.2 线性相关性的有关结论	128
7.2.3 一些常见的线性空间	128
7.2.4 过渡矩阵、坐标变换公式	129

7.2.5	线性子空间的有关结果	129
7.2.6	一些常用的线性子空间	129
7.2.7	直和的充要条件	130
7.2.8	映射的有关结论	130
7.2.9	同构映射的基本性质	130
7.2.10	同构线性空间的有关结论	131
7.3	典型例题解析	131
7.3.1	线性空间的判定	131
7.3.2	线性子空间的判定	132
7.3.3	线性相关性的判别和秩与极大无关组的求法	134
7.3.4	线性(子)空间的基与维数的求法	137
7.3.5	求过渡矩阵及坐标	142
7.3.6	子空间直和的判定与证明	145
7.3.7	线性空间同构的判定与证明	146
7.4	练习题	147
8	λ -矩阵	149
8.1	基本概念	149
8.1.1	λ -矩阵的概念	149
8.1.2	λ -矩阵的秩	149
8.1.3	可逆矩阵与逆矩阵	150
8.1.4	λ -矩阵的初等变换	150
8.1.5	λ -矩阵的等价	150
8.1.6	初等 λ -方阵	150
8.1.7	λ -矩阵的 Smith 标准形、不变因子	150
8.1.8	λ -矩阵的行列式因子	151
8.1.9	λ -矩阵的初等因子	151
8.1.10	Jordan 矩阵	151
8.1.11	Frobenius 矩阵	151
8.1.12	矩阵的零化多项式与最小多项式	151
8.2	重要结论与公式	152
8.2.1	λ -矩阵可逆的充要条件	152
8.2.2	λ -矩阵的逆矩阵	152
8.2.3	初等 λ -方阵的性质	152
8.2.4	λ -矩阵在初等变换下的标准形	152
8.2.5	行列式因子与不变因子的关系	153
8.2.6	初等因子的有关结果	153
8.2.7	λ -矩阵等价的充要条件	153
8.2.8	矩阵相似的充要条件	154

8.2.9	方阵的不变因子与初等因子的有关结果	154
8.2.10	Jordan 矩阵的初等因子	154
8.2.11	Jordan 标准形	154
8.2.12	Frobenius 矩阵的不变因子	155
8.2.13	有理标准形	155
8.2.14	Hamilton - Cayley 定理	155
8.2.15	最小多项式的有关结论	155
8.2.16	矩阵可对角化的充要条件	156
8.3	典型例题解析	156
8.3.1	λ -矩阵的有关概念与计算	156
8.3.2	求 λ -矩阵的行列式因子	159
8.3.3	求 λ -矩阵的 Smith 标准形、不变因子和初等因子	160
8.3.4	λ -矩阵的等价与矩阵相似的判断与证明	163
8.3.5	求矩阵的 Jordan 标准形和有理标准形	164
8.3.6	求相似变换矩阵	169
8.3.7	Jordan 标准形应用举例	172
8.3.8	最小多项式的求法	173
8.3.9	Hamilton - Cayley 定理及最小多项式应用举例	175
8.4	练习题	176
9	线性变换	178
9.1	基本概念	178
9.1.1	线性变换的概念	178
9.1.2	单位变换与零变换	178
9.1.3	线性变换的运算	178
9.1.4	线性变换的值域与核	179
9.1.5	线性变换的矩阵	179
9.1.6	线性变换的特征值与特征向量、特征子空间	179
9.1.7	不变子空间	179
9.2	重要结论与公式	180
9.2.1	线性变换的基本性质	180
9.2.2	线性变换运算的性质	180
9.2.3	线性变换的值域与核的有关结果	181
9.2.4	线性变换的矩阵的有关结果	181
9.2.5	线性变换在不同基下矩阵之间的关系	181
9.2.6	线性变换的特征值与特征向量的性质	182
9.2.7	判定线性变换在某个基下的矩阵为对角矩阵的条件	182
9.2.8	Jordan 定理	182
9.2.9	Hamilton - Cayley 定理	182

9.2.10	不变子空间与线性变换矩阵化简之间的关系	182
9.3	典型例题解析	183
9.3.1	线性变换的判定与证明	183
9.3.2	求线性变换的矩阵	185
9.3.3	线性变换的运算及相应的矩阵	190
9.3.4	线性变换的值域与核的求法	191
9.3.5	求线性变换的特征值与特征向量	193
9.3.6	线性变换的矩阵化简	195
9.3.7	不变子空间	196
9.4	练习题	198
10	欧氏空间	200
10.1	基本概念	200
10.1.1	内积及欧氏空间	200
10.1.2	元素的长度、夹角与正交	200
10.1.3	度量矩阵	201
10.1.4	正交基与标准正交基	201
10.1.5	正交子空间与正交补	201
10.1.6	正交变换	201
10.1.7	对称变换	201
10.1.8	欧氏空间的同构	201
10.1.9	元素的距离、元素到子空间的距离	202
10.1.10	矩阵的列空间与零空间	202
10.1.11	最小二乘法	202
10.1.12	酉空间	202
10.1.13	酉空间中的有关概念	202
10.2	重要结论与公式	203
10.2.1	内积的性质	203
10.2.2	长度的基本性质	203
10.2.3	一些常见的欧氏空间	203
10.2.4	度量矩阵的有关结论	204
10.2.5	正交元素组的性质	204
10.2.6	Schmidt 正交化方法	204
10.2.7	标准正交基的有关结果	204
10.2.8	正交子空间的有关结果	204
10.2.9	正交变换的充要条件	205
10.2.10	对称变换的有关结果	205
10.2.11	同构欧氏空间的有关结论	205
10.2.12	距离的基本性质	205