21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

线性代数

典型例题与解法

甘志雄　等编著

- 归纳要点
- 精选例题
- 典型解法
- 模拟应试
- 考研训练

国防科技大学出版社

21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

线性代数典型例题与解法

甘志雄 王吉安 谢志坚
王晓梅 金青山 编著

国防科技大学出版社
湖南·长沙

内容简介

线性代数典型例题与解法内容包括:行列式、矩阵、向量、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换、测试卷。每章分教学要求、内容提要、典型例题与方法、综合应用与提高、同步训练(一)、(二)。本书力求:对大纲要求有适合性,例题解法有典型性,练习题有代表性,对本科生练习和应试有有效性。本科生、考研生可分别使用同步练习(一)、(二)及相应的测试卷。本书适合于理工科、经济和管理学科本科生学习与考研复习用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数典型例题与解法/甘志雄等编著.—长沙:国防科技大学出版社,2003.5
ISBN 7-81024-944-4

Ⅰ.线… Ⅱ.甘… Ⅲ.线性代数—高等学校—解题 Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 033316 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:罗青 责任校对:肖滨
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本:787×1092 1/16 印张:16 字数:370 千
2003 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-4000 册
*
定价:22.00 元

21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

编审委员会

序

数学有科学皇后之称。在现代社会，自然科学、技术科学与社会科学快速发展，数学在各科学领域的应用愈来愈广泛，而数学本身的分支增多，其理论也愈加深入。数学的发展和数学的应用紧密相关，相互促进。高等数学与现代数学已成为科学家、技术人员和管理人员用来分析和解决现代科技和社会问题的强有力的利器，不仅为解决问题提供了定量分析工具，而且提供了科学的思维方法。

大学教育为适应现代科学发展和人才培养的需要，都把数学教学摆在基础和核心的地位。培养大学生和研究生学习高等数学的浓厚兴趣和理解、应用高等数学的思想、方法的实际能力，是大学生、研究生未来从事现代化工作的必需，是大学数学教师的重任。本丛书编委和国防科技大学出版社为服务大学数学的教与学工作，试图为学生提供一套符合学习规律、适用有效的辅导教材。在编审委员会指导下，参编教师广泛参考国内流行教材和辅导教材，多次研讨写作的目的、要求和方案，定稿前又多次讨论、修改和优化。丛书凝结着作者的心血和创造性劳动。该丛书有如下特点：

1. 满足教学大纲要求，例题习题有典型性、代表性和系列性。作者参照有关学科的本科教学大纲要求，及硕士生入学考试要求而编写，限定内容范围和要求层次。广泛收集国内比较优秀的教材和习题集，反复比较，选择出有典型性、代表性的题目，继而进行分析和解答，使同学们能触类旁通。

2. 作者教学经验丰富，力图适合学生的学习规律。作者都是长期在教学第一线工作，积累了教授与导学的经验，在编写时融合了作者教学经验与教法。根据高等数学的高度抽象性、较强的逻辑性、应用广泛性的特点，掌握其思想和方法必须认真过“应用”关(解题)。而过好“应用”关，除了靠读者数学天赋、悟性，主要还是应“引导”有方。引导的方法主要是，遵循认识规律，例题习题的编排，由浅到深，由简单到复杂，由单一到综合，且提供解题的一般思路，使读者能举一反三。

3. 适合读者自学。大学生学习应有很强的独立性、主动性，况且辅导教师不可能“招之即来”，然而优秀的“学习辅导书”也就是一位好的老师。该书安排的例题提供了分析思路，典型的同步习题和综合习题提供简答过程，全部习题提供了参考答案，十分有利于同学们自学指导。

本丛书的出版值得庆祝，它必将成为大学生、研究生愉快地进行数学训练，完成学业的益友良师。本书适合于广大的在校大学生、研究生学习，也适合于广大自学青年和在职人员自学之用。

丛书的出版是作者和编辑辛勤劳动的结晶，在此感谢他们的劳动，并向同学们和自学青年郑重推荐此书。

侯振挺

2003 年 8 月

前言

线性代数是大学工科、经济学、管理学等门类各专业学生的必修课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助在校的大学生及考研的同学更好地理解和掌握线性代数的内容,提高应试能力,根据国家教委审定的高等院校“高等数学课程教学基本要求”(教学大纲),教育部“2003年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求,结合我们长期从事线性代数的教学经验及对历年考研中线性代数部分试题的分析研究,编写了此书。

全书分为6章,每章均设计以下板块:

内容提要:列出基本概念、重要定理和主要内容,突出必须掌握或考试频率高的核心知识和结论。

典型例题与方法:侧重同步指导学生学习线性代数的全过程。这里我们精选例题的原则是:紧扣教材的主要内容,深入分析历年研究生入学考试试题,围绕知识点一个一个地展开,解题力求体现一种方法、一种思路,有些地方采用系列题的方式出现,帮助学生加深对这些知识点的理解和灵活应用。

综合应用与提高:侧重在考试前,特别是在考研前的复习中给学生以帮助。这里选用例题的原则是:综合性强,题型较为新颖,基本知识的灵活应用,同时还注意到教材的改革,考研内容动态的发展趋势,对教材的内容进行了适当的加深和拓宽,注重类型题的解法。

同步训练:同步训练(一)的习题取自同济大学数学教研室编写的《线性代数》(第三版)及人民大学赵树源编写的《线性代数》相应章的主要习题,每题的解答直接放在每题后面,以方便学生在同步学习中对照和分析。而同步训练(二)的习题,接近于考研的类型题,多数是选择题和填空题。习题的解答放在整个训练题的后面。值得提醒的是解题能力需要亲自动手,通过自身的实践才能逐步锻炼出来,从而不断地提高水平。

在全书的最后部分附有第二章到第五章的测试卷(一)、(二)。测试卷(一)是数学一历届(1988-2003)线性代数部分考研试题,按章汇编而成。测试卷(二)是数学三历届(1988-2003)线性代数部分考研试题按章汇编而成。

我们建议同学在考研复习时认真地去做这些测试卷，一方面测出自己的真实水平以便明确下一步的复习方向；另一方面，通过对这些原汁原味的考研题型的反复体会，提高自己的综合能力。

此外，还附有两套总复习题，以提高学生对线性代数的综合掌握程度。

我们认为，解答试题的能力与科学的思维方式、熟练的技巧、涉及知识的使用意识等密切相关，所以熟练掌握基本概念、理论、常用方法是至关重要的，同时精读并学会一定数量的范例不失为应试的一个有效途径。

限于编写的水平，定有错漏不当之处，恳望同行和读者批评指正。

编者

2003.8

目　录

第三章 向 量

第四章 线性方程组

第五章 相似矩阵与二次型

第六章 线性空间与线性变换

附录:测试卷

第一章　行列式

一、教学要求

1. 理解 n 阶行列式的定义与性质。
2. 掌握用行列式的定义、性质去计算行列式的方法。

二、内容提要

(一)行列式的定义

1. 排列的逆序数

在 n 个数码的一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中(其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列),如果某一个较大的数码排在一个较小的数码前面,就说这两个数码构成一个逆序。

在一个排列里出现的逆序总数,叫做这个排列的逆序数,记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。

2. n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 求和。

也就是说一个 n 阶行列式 D,它等于 $n!$ 项的代数和,其中每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,并冠以符号 $(-1)^t$,其中 t 为列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 排列的逆序数,即 $t=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。

(二) 行列式的性质

1. 行列式与它的转置行列式相等。
2. 互换行列式的两行(列),行列式变号。
3. 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。
4. 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零。

$$5.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

(关于列也有同样的性质)

6. 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变。

7. 行列式等于它的任一行(列)的元素与其对应的代数余子式乘积之和(即行列式按行(列)的展开)。

8. 行列式某一行(列)的元素与另一行的对应元素的代数余子式乘积之和等于零。

(三)一些特殊的行列式

1. 对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积,如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

2. 上(下)三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积,如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

$$3.\begin{vmatrix} A_{k\times k} & 0 \\ C_{n\times k} & B_{n\times n} \end{vmatrix} = |A||B|。$$

4. 范德蒙(Vander monde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)。$$

三、典型例题与方法

(一)利用行列式的定义计算行列式的值

例 1.1 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & \\ & \begin{matrix} & \\ \end{matrix}\iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}。$$

解 根据定义,D_n 是一个 $n!$ 项的代数和,然而在这个行列式里,除了 $a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$这项外,其余的项都至少含有一个因子 0,因而等于 0。与 $a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$这项对应的列标排列为 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 计算它的逆序数。

得 $$\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}。$$

$\therefore\quad D_n=(-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 2\cdot 1]}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}。$

例 1.2 求

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}。$$

解 在 D_n 中除$a_1\cdots a_{n-1}a_n$ 项外,其余的项都为 0,而此项所对应的列的排列为

$(n-1),\cdots,2,1,n,\tau((n-1)(n-2)\cdots 21n)=\tau((n-1)\cdots 21)=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,

$\therefore\quad D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1\cdots a_{n-1}a_n。$

例 1.3 写出四阶行列式 D 含有因子$a_{11}a_{23}$且带有负号的项。

解 因为 D 为 4! 项:$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$的代数和,其中 $j_1j_2j_3j_4$ 为 1,2,3,4 的所有不同的排列,现在 $j_1=1,j_2=3$,所以 j_3,j_4 只能是 2,4 的一个排列,故行列式 D 含有相同因子$a_{11}a_{23}$的项只有 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$;$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

而 $\tau(1324)=1$,所以 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$项所带符号为$(-1)^{\tau(1342)}=(-1)^1=-1$;

而 $\tau(1342)=2$,所以 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$项所带符号为$(-1)^{\tau(1342)}=(-1)^2=1$;

故所求的项为$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$。

例 1.4 设$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$,求 $f(x)$中 x^3 项的系数。

解 根据行列式的定义,$f(x)$是一个关于 x 的多项式函数。

在行列式中,含有因子 x 的元素为$a_{11},a_{22},a_{33},a_{43}$,因为 a_{33},a_{43}位于同一列,不能同时取到,因此 $f(x)$中 x 的最高次幂为x^3,取自含 a_{11},a_{22},a_{33},或者 a_{11},a_{22},a_{43}的项:

$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=x\cdot x\cdot x\cdot 1=x^3$ 与

$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-x\cdot x\cdot 1\cdot(2x)=-2x^3$。

故 $f(x)$中 x^3 项的系数为 $1-2=-1$。

解二 利用行列式的性质,把第 3 行乘以(-2)加到第 4 行上,得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}。$$

由此可知 $f(x)$ 含 x^3 的项为主对角线上元素的乘积 $x\cdot x\cdot x\cdot(-1)=-x^3$,所以 $f(x)$中 x^3 项的系数为-1。

(二)化行列式为上(下)三角形行列式

例 1.5 求值

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}。$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\underline{\underline{\text{第1、3列互换}}}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\underline{\underline{\text{第1行}\times(-1)\text{加到第2行上}}}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\underline{\underline{\text{第2行}\times 2\text{加到第3行上,第二行}\times 1\text{加到第4行上}}}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}\underline{\underline{\text{第3行提取公因数5}}}-5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}\underline{\underline{\text{第3行}\times(-2)}}$$

$$\underline{\underline{\text{加到第4行上}}}-5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0。$$

小结 化行列式为上三角形的一般程序是:

(1) 通过行列式的行或列的交换使左上角位置元素不为 0,这时要注意交换一次行或列,行列式的值要变号。

(2) 将第一行的元素乘以适当的倍数加到其余各行去,使第一列其他的元素统统变为 0,注意,这时行列式的值不变。

(3) 按上面的方法继续下去化行列式为上三角行列式。

例 1.6 计算箭形行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & & & \\ d_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ d_n & & & & a_n \end{vmatrix} \left(\begin{aligned}&\text{这里 } a_i\neq 0, i=1,2,3\cdots,n \\ &\text{空白处的元素为 } 0\end{aligned}\right)。$$

解 $\because$ $a_i\neq 0$ $i=1,2,\cdots,n$,

$\therefore$ 将 D 的第 $i+1$ 行$(i=1,2,\cdots,n)$乘以$\dfrac{1}{a_i}$,得

$$D=a_1\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1a_1^{-1} & 1 & & & \\ d_2a_2^{-1} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ d_na_n^{-1} & & & & 1 \end{vmatrix}$$

,然后将新得的行列式的第 $i+1$ 行乘以 $-b_i$ 加到第一行$(i=1,\cdots,n)$,化为上三角形行列式得:

$$D=a_1\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\cdot d_i\cdot a_i^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1a_1^{-1} & 1 & & & \\ d_2a_2^{-1} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ d_na_n^{-1} & & & & 1 \end{vmatrix}=a_1\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot d_i\cdot a_i^{-1}\right)。$$

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix},(x_i\neq a_i,i=1,2,\cdots,n)。$$

解 观察 D_n 有特点:第 i 列除元素 x_i 外其他元素都相等,因此我们只要将第一行乘以(-1)分别加到其他各行上去,就可以把除第一列外其余各列中除 x_i 元素外的其余元素都化为0,这样做的结果使我们得到一个箭形行列式,由例 1.6 就可得出结果。

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}。$$

$(\because x_i\neq a_i \quad i=1,\cdots,n.)$