中等数学习题解答集

中国数学会数学通报编委会编

科学技术出版社

中等数学習題解答集

中国数学会数学通报編委会編

科学技术出版社
1959年·北京

本書提要

"数学通报"是以中学数学教师为主要对象的刊物。本書是数学通报叢書之一。全部習題和解答是从历年来数学通报（包括前中国数学杂誌）問題解答欄中挑选彙輯而成。这些習題的来源，一部份是选自苏联数学教学杂誌、苏联中学生数学竞賽会問題及罗馬尼亞、瑞士等国的数学杂誌中，其余大部份是我国各地数学爱好者推荐的題目。这些習題的綜合性、思考性較强，对理解中等数学基本概念、鍛鍊数学分析能力等都有帮助。全集共分平面几何、立体几何、代数、三角、解析几何和杂題六类。每一类問題按性質及难易程度作了比較适当的安排。这本習題解答集可供数学爱好者、广大中学生及在职学習的干部等閱讀参考。

总号：1061

中等数学習題解答集

編　者：中国数学会数学通报編委会

出版者：科学技术出版社

（北京市西直門外郝家灣）

北京市書刊出版業營業許可証出字第091号

發行者：新华書店

印刷者：北京市印刷一厂

（北京市西便門南大街7-1号）

开　本：850×1196 1/32　印張：9

1959年6月第1版　字数：250,000

1959年6月第1次印刷　印数：60,060

統一書号：13051 203

定　价：（7）9角2分

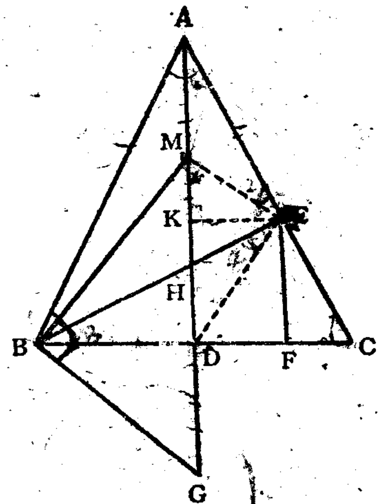
目　次

1. 平面几何

1. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，作高綫AD与BE相交于H，引$EF\perp BC$于F，延長AD至G使$DG=EF$；若M为AH的中点，則$\angle GBM=90°$。

［証］ 連ME及DE，

則在直角$\triangle AEH$与直角$\triangle BCE$中：



$\because\ MA=ME,\ DB=DE;$

$\therefore\ \angle EAM=\angle AEM,$

$\angle EBD=\angle BED.$

但 $\angle EAM=\angle BED,$

則 $\angle AEM=\angle BED;$

而 $\angle AEB$是直角，故知$\angle MED$也是直角。过E作$EK\perp AD$于K点。

則 $MD\cdot KD=DE^2,$

因 $KD=EF=DG,$

$DE=BD;$

$\therefore\qquad MD\cdot DG=BD^2.$

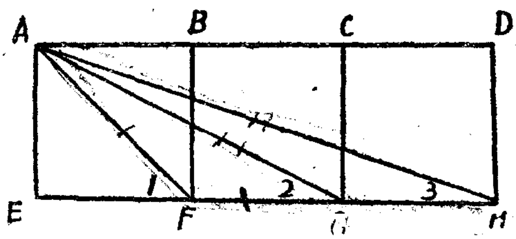
故知 $\qquad\angle MBG=90°.$

2. 求用几何証法証明下面三平方格中$\angle 1+\angle 2+\angle 3=$
$=90°$

［証］ $FG:AF=1:\sqrt{2}=AF:FH.$

故 $\qquad\triangle AFG\sim\triangle HFA$

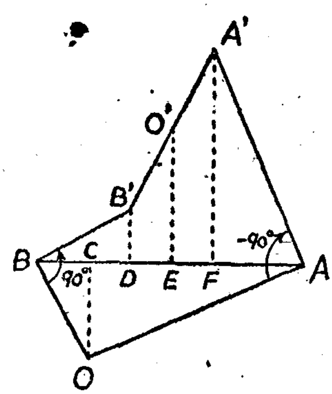
$\angle 3=\angle FAG,$



$\angle 2+\angle 3$
$=\angle 2+\angle FAG$
$=\angle 1=45°$
$\therefore \angle 1+\angle 2$
$+\angle 3=90°$.

3、在下圖中，A,B 为二定点，O 为一动点，过 A 点沿着从 OA 順时針的直角方向截取綫段 $AA'=OA$；过 B 点沿着从 OB 反时針的直角方向截取綫段 $BB'=OB$. A,B 二点固定不动，O点在平面上变动时，A',B' 二点随着变动。証明：無論 O 点的位置在平面上何处，綫段 $A'B'$ 的中点 O' 始終保持不变；幷求出 O' 点相对于 AB 所在的位置。

〔証〕 过 O,B',O',A' 点分别引直綫垂直于 AB，垂足依次为 C,D,E,F，則有



$$\triangle BDB'\equiv\triangle OCB,$$
$$\triangle AA'F\equiv\triangle OAC.$$

在梯形 $DFA'B'$ 中，因为 $B'O'=O'A'$，$O'E$ 平行于上底和下底所以 $DE=EF$. 因此

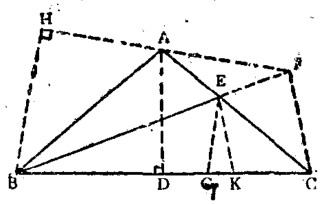
$BE=BD+DE=OC+EF=EF+FA=EA$，同时

$O'E=\frac{1}{2}(B'D+A'F)=\frac{1}{2}(BC+CA)=\frac{1}{2}AB$. 由此可見，無論 O 点在平面上何处，O' 点必在綫段 AB 垂直平分綫的上端距离綫段为$\frac{1}{2}AB$ 远处，$\triangle AO'B$ 成一等腰直角三角形。即 $A'B'$ 的中点 O' 始終保持不变。

4. 在等腰三角形 $\triangle ABC$ 中，頂角 $\angle A=100°$. 作$\angle B$ 的平分綫，設交 AC 边于 E，求証 $AE+BE=BC$（限用初等几何

証法)。

[証一] 延長 BE 至 F，令 $EF=AE$. 連 CF 作. $\angle BEC$ 的平分綫交 BC 于 G. 由題設 $AB=AC$，且 $\angle BAC=100°$，可见 $\angle ABE=\angle CBE=20°$. 因而 $\angle AEB=\angle GEB=60°$. 于是 $\triangle AEB\cong\triangle GEB$. 那么 $EG==EA=EF$. 这样一来，必然 $\triangle GEC\cong\triangle FEC$，因为显然 $\angle GEC=\angle FEC=60°$. 由此得知 $\angle EFC=\angle EGC=80°$. 从而 $\angle BCF=80°$ 所以 $BC=BF=AE+BE$

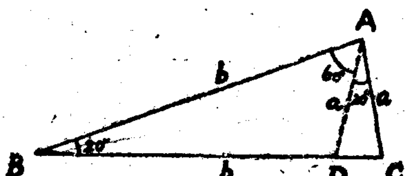


[証二]連 AF. 引 $BH\perp AF$ 于 H. $AD\perp BC$ 于 D，由 $\angle EFA=\angle EAF=30°$，得知 $BH=\frac{1}{2}BF$。又因 $\angle BAH=\angle BAD=50°$，知 $BH=BD$ 所以 $BD=\frac{1}{2}BF$，即 $BC=BF=AE+BE$.

[証三] 在 BC 边上截 $BK=BE$，則 $\angle BKE=\angle BEK==80°$. 由此 A、B、K、E 四点共圆，現 $AE=EK$. 又 $\angle KCE==\angle KEC=40°$，于是 $KC=KE=AE$，所以 $AE+BE=BC$.

5. 在等腰三角形 ABC 中，已知：

$AB=BC=b$，$AC=a$，$\angle ABC=20°$.



求証：$a^3+b^3=3ab^2$.

[証一] 自 A 引一半綫交 BC 边于 D，使 $\angle CAD=20°$，則

$$a^2=b\cdot DC;$$

因得 $$DC=\frac{a^2}{b};$$

从而 $$BD=b-\frac{a^2}{b}.$$

又 $$\angle A=\angle C=80°;$$

于是 $\angle BAD=60°$，

且 $\angle ADC=80°$， $AD=AC=a$，

現將余弦定律用于$\triangle ABD$，得

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos 60°;$$

即 $$\left(b-\frac{a^2}{b}\right)^2=b^2+a^2-ab.$$

由此 $$b^2-2a^2+\frac{a^4}{b^2}=b^2+a^2-ab;$$

$$\frac{a^4}{b^2}+ab=3a^2$$

故 $$a^3+b^3=3ab^2.$$

［証二］ 作$\angle B$的平分綫BE，則見

$$\sin 10°=\frac{a}{2b}.$$

根据三角公式，有

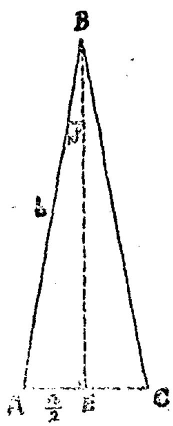
$$\sin 30°=3\sin 10°-4\sin^3 10°;$$

但 $$\sin 30°=\frac{1}{2},$$

于是 $$3\cdot\frac{a}{2b}-4\cdot\frac{a^3}{8b^3}=\frac{1}{2}.$$

將此式化簡，即得

$$a^3+b^3=3ab^2.$$



6. 在一圓內取一直徑AB，以AB为底作一正三角形ABC，C为另一頂点。求証：如果把綫段三等分得到分点是M，N，則CM，CN的延長綫把对面的半圓弧$\overset{\frown}{AB}$三等分。

［証］設O为所設圓之圓心，CA交圓O于E，CB交圓O于D。

截$BF=BD$，联OF，NF。

因$\overset{\frown}{AED}=2\angle ABD=120°$，

$\therefore\ \overset{\frown}{BD}=60°$

又 $CB=AB=2OF$

$OF:CB=ON:NB$

$=1:2$

$BF=BD$ (作圖)

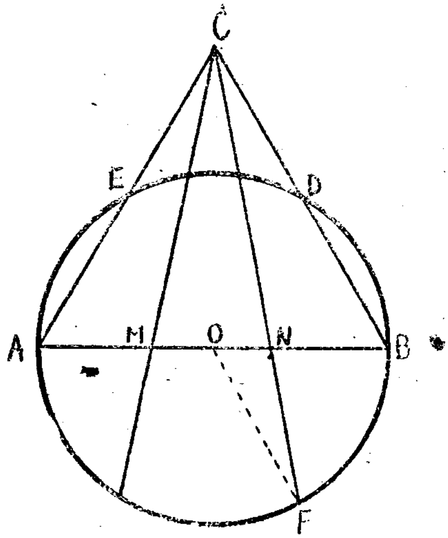
$\angle FOB=60°=\angle ABD$

$\therefore \triangle OFN\sim\triangle CNB$

(兩边成比例，夾角等)

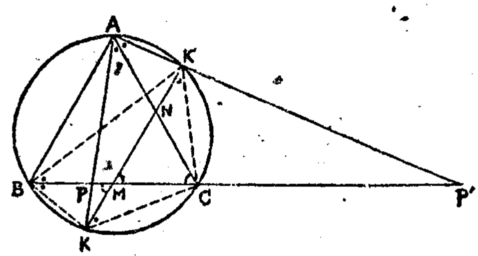
$\therefore \angle ONF=\angle CNB$

但 ANB 为一直綫，故 CNF 为一直綫。



7. $\triangle ABC$ 是正三角形，M、N 各是 BC、CA 的中点；設直綫 MN 交 $\triangle ABC$ 的外接圓于 K、K'，而 AK、AK' 交 BC 于 P、P'. 求証 P、P' 內外分 CB 为中外比，即 $BC:CP=CP:PB$, $BC:CP'=CP':P'B$.

[証] 連 BK、CK、BK'、CK'. 題設 M、N 各是 BC、CA 的中点，因而 $MN\,//\,BA$；由此 $\angle ACP=\angle CBA==\angle CMN=\angle BMK$.



又 $\angle CAP=\angle MBK$. 那么 $\triangle ACP\sim\triangle BMK$. 于是

$$BC:CP=CA:CP=MB:MK=CM:MK. \quad (1)$$

再因 KA 是 $\angle BKC$ 的平分綫，

$$\text{故 } CP:PB=CK:KB. \quad (2)$$

但 $\triangle CMK'\sim\triangle KMB$, 且 $CK'=CK$，有

$$CM:MK=CK':KB=CK:KB. \quad (3)$$

由 (1)、(2)、(3) 即得

$$BC:CP=CP:PB.$$

一如上理，从 $\triangle ACP'\sim\triangle BMK'$ 且 $\triangle CMK\sim\triangle K'MB$,

知

$$BC:CP'=CA:CP'=MB:MK'=CM:MK'$$
$$=CK:K'B=CK':K'B$$

但　　$K'A$ 显然是 $\angle BK'C$ 的鄰补角的平分綫，

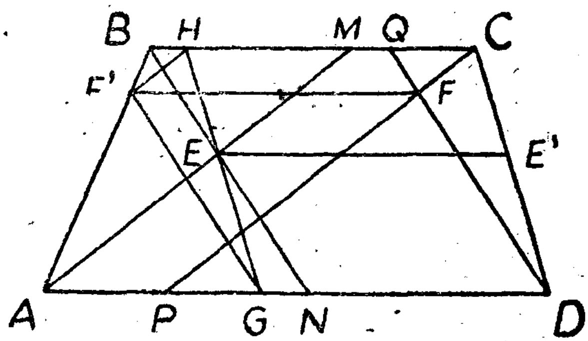
因而　　$$CP':P'B=CK':K'B$$

故由 (4)(5) 可得

$$BC:CP'=CP':P'B$$

8. 过梯形 $ABCD$ 的頂点，作两双平行綫 $AM\parallel CP$，$BN\parallel DQ$，設 AM，BN 交于 E；CP，DQ 交于 F. 又过 E，F 作平行于底边的綫段 EE'，FF' 分别交 CD 于 E'，交 AB 于 F'，証明：$EE'=FF'$。

〔証 1〕过 F' 作 $F'H\parallel AM\parallel PC$，得 $\square F'HCF$，連接 HE 并延長之与 AD 交于 G，再連 $F'G$。



$$\because\quad AF':F'B=MH:HB=AG:GN,$$
$$\therefore\quad F'G\parallel BN\parallel QD.$$

$GF'FD$ 为一平行四边形。

$$\because\quad HC\perp\!\!\!\!\!=F'F\perp\!\!\!\!\!=GD,$$
$$\therefore\quad GHCD\ \text{亦为一平行四边形。}$$

所以　　$$EE'=HC=FF'.$$

〔証 2〕在証明中我們用到下述事实：設 LL' 平行梯形

$ABCD$ 的底边 AD 和 BC，L，L' 分别是兩腰 BA，CD 上的交点，又設 $BL:LA=CL':L'D=m:n$，則有

$$LL'=\frac{mAD+nBC}{m+n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(此式的証明讀者不难补出).

因 $$\frac{QF}{FD}=\frac{QC}{PD},$$

由(1)得

$$FF'=\frac{QC\cdot AD+PD\cdot BQ}{QC+PD}=$$

$$=\frac{(BC-BQ)AD+(AD-AP)BQ}{QC+PD}=\frac{BC\cdot AD-AP\cdot BQ}{QC+PD}.$$

同样由于 $$\frac{ME}{EA}=\frac{BM}{AN}=\frac{BC-MC}{AD-ND}=\frac{BC-AP}{AD-BQ},$$

得

$$EE'=\frac{(BC-AP)AD+(AD-BQ)MC}{(BC-AP)+(AD-BQ)}=$$

$$=\frac{(BC-AP)AD+(AD-BQ)AP}{(BC-BQ)+(AD-AP)}=\frac{BC\cdot AD-AP\cdot BQ}{QC+PD}.$$

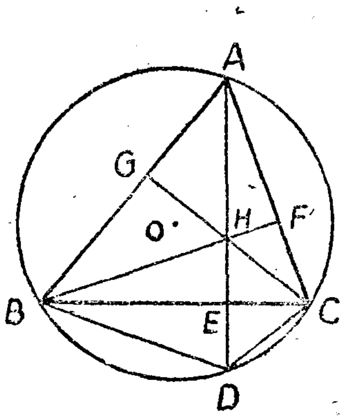
所以 $$EE'=FF'.$$

9. 設 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，且令

$$BC=a,\ CA=b,\ AB=c,$$
$$AH=a',\ BH=b',\ CH=c'.$$

証明 $$\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}=\frac{abc}{a'b'c'}.$$

〔証 1〕 設 $\triangle ABC$ 的外接圓圓 O 的半徑是 R，我們証明 $\triangle HBC$，$\triangle HCA$，$\triangle HAB$ 的外接圓的半徑都是 R。延長垂綫 AH 使与 $\triangle ABC$ 的外接圓交于另一点 D，联結 BD，CD．$\triangle DBC$ 的外接圓即圓 O。同时我們有



$\angle HBC = \angle DAC = \angle DBC$,

$\angle HCB = \angle DAB = \angle DCB$,

BC 为 $\triangle HBC$, $\triangle DBC$ 的公共边。

$\therefore \triangle HBC \cong \triangle DBC$.

$\triangle HBC$ 外接圓的半徑等于 $\triangle DBC$ 的外接圓的半徑，即圓 O 的半徑 R. 同理可得 $\triangle HCA$, $\triangle HAB$ 的外接圓的半徑也等于 R.

由三角形面积的公式，

$$\triangle ABC = \frac{abc}{4R}, \triangle HBC = \frac{ab'c'}{4R},$$

$$\triangle HCA = \frac{bc'a'}{4R}, \triangle HAB = \frac{ca'b'}{4R}.$$

現在 $\quad \triangle HBC + \triangle HCA + \triangle HAB = \triangle ABC.$

故得 $\quad ab'c' + bc'a' + ca'b' = abc.$

兩端同时除以 $a'b'c'$，即得所求.

[証 2] 依次記垂綫 AH, BH, CH 的垂足为 E, F, G. 则有

$$\triangle AHF \backsim \triangle BHE \backsim \triangle BCF.$$

$$\therefore \frac{AF}{AH} = \frac{BF}{BC}, \frac{a}{a'} = \frac{BC}{AH} = \frac{BF}{AF} = \tan A.$$

同理 $$\frac{b}{b'} = \tan B, \frac{c}{c'} = \tan C.$$

$$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

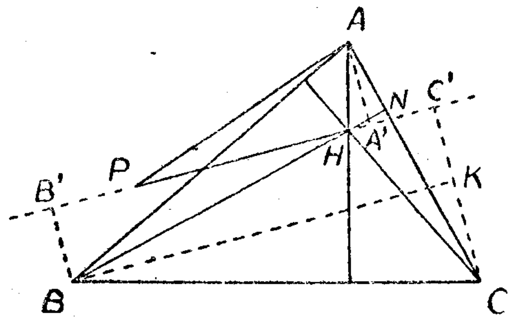
即得 $$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = \frac{abc}{a'b'c'}.$$

10. 設 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的

任意一点，求証：

$$(\overline{AP}^2-\overline{AH}^2)\tan A+(\overline{BP}^2-\overline{BH}^2)\tan B+(\overline{CP}^2-\overline{CH}^2)\tan C=$$
$$=\overline{PH}^2(\tan A+\tan B+\tan C).$$

［証］过 A,B,C 三点分别作直綫 AA'，BB'，CC' 垂直于 PH．設 N 为垂心 H 在 AC 边上的垂足。过 B 点作 $BK\parallel B'C'$。于是



$\triangle ANB\sim\triangle HNC$，

$$\triangle CNB\sim\triangle HNA,\ \triangle AHA'\sim\triangle BCK.$$
$$\tan A=\overline{BN}/\overline{AN}=\overline{CN}/\overline{HN}=\overline{BC}/\overline{AH}$$
$$=\overline{CK}/\overline{A'H}=(\overline{CC'}-\overline{BB'})/\overline{A'H}.$$

在上式中，將 A 換作 B，B 換作 C，C 換作 A，同样得到 $\tan B$ 的公式；再換一次得到 $\tan C$ 的公式。为簡便起見，下面以 $\sum\limits_{A,B,C}$ 代表 A,B,C 的算式加上以 B 換 A，以 C 換 B，以 A 換 C 的算式加上再換一次所得算式的和号。于是

$$\sum_{A,B,C}(\overline{AP}^2-\overline{AH}^2)\tan A=\sum_{A,B,C}(\overline{PH}^2+\overline{A'H}^2+$$
$$+2\overline{PH}\cdot\overline{A'H}-\overline{AH}^2)\tan A$$
$$=\overline{PH}^2\sum_{A,B,C}\tan A+2\overline{PH}\sum_{A,B,C}\overline{A'H}\tan A$$
$$=\overline{PH}^2\sum_{A,B,C}\tan A+2\overline{PH}\sum_{A,B,C}(\overline{CC'}-\overline{BB'})$$
$$=\overline{PH}^2\sum_{A,B,C}\tan A+2\overline{PH}(\overline{CC'}-\overline{BB'}+$$
$$+\overline{AA'}-\overline{CC'}+\overline{BB'}-\overline{AA'})$$
$$=\overline{PH}^2\sum_{A,B,C}\tan A.$$

11. 在 $\triangle ABC$ 的一边 BC 上任取一点 D, $BD:DC=$ $=m:n$. 証明

(i) $(m+n)\cot\angle ADC=n\cot B-m\cot C$.

(ii) $(m+n)^2 d^2=(m+n)(mb^2+nc^2)-mna^2$.

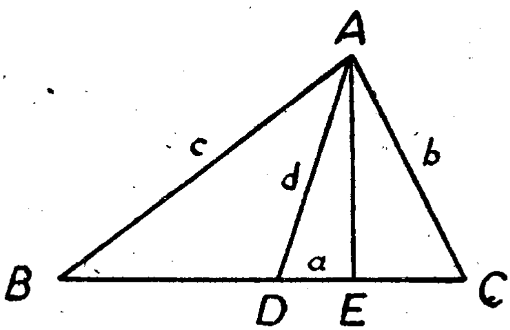
式中, $a=BC,\ b=CA,\ c=AB,\ d=AD$.

[証] 过 A 点引直綫 $AE\perp BC$, E 是垂足。依照題意, $BD:DC:BC=m:n:(m+n)$,

可知 $n\cdot BD-m\cdot DC=0$, $BD=\dfrac{m}{m+n}BC$, $DC=\dfrac{n}{m+n}BC$。

由此得到

(i)
$$\begin{aligned} n\cot B-m\cot C&=n\frac{BE}{AE}-m\frac{EC}{AE}\\ &=\frac{n(BD+DE)-m(DC-DE)}{AE}\\ &=\frac{n\cdot BD-m\cdot DC+(m+n)DE}{AE}\\ &=(m+n)\cot\angle ADC. \end{aligned}$$



(ii) $(m+n)(mb^2+nc^2)-mna^2$

$=(m+n)[m(d^2+\overline{DC}^2-2\overline{DC}\cdot\overline{DE})+n(d^2+\overline{BD}^2+2\overline{BD}\cdot\overline{DE})]-mna^2$

$=(m+n)^2d^2+2(m+n)(nBD-mDC)\cdot DE+\dfrac{(m+n)(mn^2+m^2n)}{(m+n)^2}\overline{BC}^2-mna^2$

$=(m+n^2)d^2+mna^2-mna^2=(m+n)^2d^2$.

12. 設在一直綫 l 上任意取不同的 n 点 A、B、C、…、G、H, 又在 l 上任取一点 P, 求証:

$$\frac{\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdots\overline{PG}\cdot\overline{PH}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdots\overline{AG}\cdot\overline{AH}}$$

$$+\frac{\overline{PC}\cdots\overline{PG}\cdot\overline{PH}\cdot\overline{PA}}{\overline{BC}\cdots\overline{BG}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{BA}}+\cdots$$

$$+\frac{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdots\overline{PG}}{\overline{HA}\cdot\overline{HB}\cdot\overline{HC}\cdots\overline{HG}}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

〔証〕 在直綫 l 上取一点 O 为原点，命

$$\overline{OA}=a,\quad \overline{OB}=b,\quad \overline{OC}=c,\cdots,$$

$$\overline{OG}=g,\quad \overline{OH}=h,\quad \overline{OP}=x;$$

按題設，其中 a、b、c、…、g、h 各不相等。由此

$$\overline{PA}=a-x,\quad \overline{PB}=b-x,\quad \overline{PC}=c-x,\cdots,$$

$$\overline{PG}=g-x,\quad \overline{PH}=h-x;$$

且 $\overline{AB}=-\overline{BA}=b-a,\cdots,\quad \overline{HG}=-\overline{GH}=g-h,$

將这些关系代入 (1) 式，便得到一个关于 x 的 $n-1$ 次方程

$$\frac{(b-x)(c-x)\cdots(g-x)(h-x)}{(b-a)(c-a)\cdots(g-a)(h-a)}$$

$$+\frac{(c-x)\cdots(g-x)(h-x)(a-x)}{(c-b)\cdots(g-b)(h-b)(a-b)}+\cdots$$

$$+\frac{(a-x)(b-x)(c-x)\cdots(g-x)}{(a-h)(b-h)(c-h)\cdots(g-h)}=1 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

显然，当 P 重合于 A 时，即是当 $x=a$ 时，(2) 式左端的第一項等于 1，其余各項等于零，所以 $x=a$ 滿足 (2) 式. 同理，$x=b, c, \cdots, g, h$ 都滿足 (2) 式。現在 $n-1$ 次的方程 (2) 被 n 个不同的数滿足，那么它必是恒等式，因此不論 x 之值如何，(2) 式永远成立。这就証明了 (1) 式眞确。

13. 圓內接六边形 $ABCDEFA$。設 $AB=a$, $BC=b'$, $CD=c$, $DE=a'$, $EF=b$, $FA=c'$, $AD=f$, $BE=g$, $CF=e$. 求証:

$$efg=aa'e+bb'f+cc'g+abc+a'b'c'.$$

〔証〕 設 $AC=x$, $CE=y$, $AE=z$. 由托勒密定理：圓的任意內接四边形的二对角綫的乘积等于兩对对边乘积之和，有
$c'y+bx=ez$, $cz+a'x=fy$, $b'z+ay=gx$

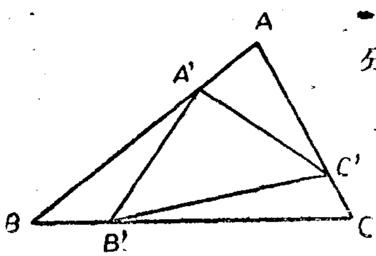
即
$$\begin{cases}-ez+c'y+bx=0\\cz-fy+a'x=0\\b'z+ay-gx=0\end{cases}$$

这个齐次綫性方程組有非零解 (x, y, z) 所以其系数行列式必須等于 0

$$\begin{vmatrix}-e & c' & b\\ c & -f & a'\\ b' & a & -g\end{vmatrix}=0$$

展开后加以整理即得

$$efg=aa'e+bb'f+cc'g+abc+a'b'c'.$$



14. 將任意 $\triangle ABC$ 的三边各分为 $n+m$ 等分，使

$$\frac{AA'}{A'B}=\frac{BB'}{B'C}=\frac{CC'}{C'A}=\frac{m}{n}.$$

証明：$\dfrac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\dfrac{m^3+n^3}{(m+n)^3}$.

〔証〕 $$\frac{\triangle AA'C'}{\triangle ABC}=\frac{AA'\cdot AC'}{AB\cdot AC}=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{mn}{(m+n)^2}\qquad(1)$$

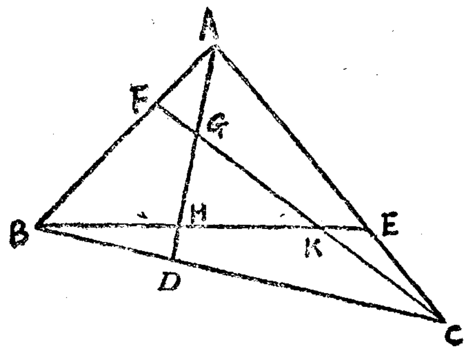
同理，
$$\frac{\triangle BB'A'}{\triangle ABC}=\frac{\triangle CC'B'}{\triangle ABC}=\frac{mn}{(m+n)^2}\qquad(2)$$

由 (1) 和 (2) 得

$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{\triangle ABC-(\triangle AA'C'+\triangle BB'A'+\triangle CC'B')}{\triangle ABC}$$

$$=\frac{(m+n)^2-3mn}{(m+n)^2}=\frac{m^3+n^3}{(m+n)^3}.$$

15．在右圖中 $AF=\frac{1}{3}AB$，$BD=\frac{1}{3}BC$，$CE=\frac{1}{3}CA$



求証：$\triangle GHK=\frac{1}{7}\triangle ABC$

［証］ 直綫 CGF 交 $\triangle ABD$ 各边 AB,BD,AD 于 F,C,G 三点。

应用梅尼劳斯（Menelaus）定理

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BC}{DC}\cdot\frac{DG}{AG}=1 \quad 即\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{DG}{AG}=1$$

$$\therefore \quad \frac{AG}{DG}=\frac{3}{4} \quad \frac{AG}{AD}=\frac{3}{7},$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ACG}{\triangle ACD}=\frac{3}{7}.$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ACD}{\triangle ABC}=\frac{CD}{BC}=\frac{2}{3}$$

因此 $$\frac{\triangle ACG}{\triangle ABC}=\frac{\triangle ACD}{\triangle ABC}\cdot\frac{\triangle ACG}{\triangle ACD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$$

即 $$\triangle ACG=\frac{2}{7}\triangle ABC$$

同理 $$\triangle ABH=\triangle BCK=\frac{2}{7}\triangle ABC$$

$$\therefore \quad \triangle GHK=\triangle ABC-\triangle ACG-\triangle ABH-\triangle BCK=$$
$$=\frac{1}{7}\triangle ABC.$$

16．設 $\triangle ABC$ 的三边 AB,BC,CA 上各有一点 D、E、F，且 $AD:DB=BE:EC=CF:FA=r$；BF 与 CD，CD 与 AE，AE 与 BF 的交点分别为 A',B',C'．試証 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为