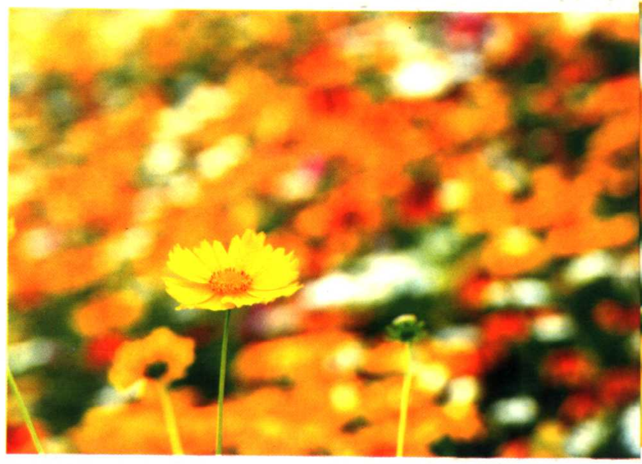
★★★★★
最新版

全国硕士研究生入学统一考试
历年试题
名家解析及预测

经济数学三

刘 斌编



海洋出版社

L 716

最 新 版

全国硕士研究生入学统一考试

历年试题名家解析及预测

（经济数学三）

刘 斌 编

徽子凌云

海洋出版社
2000年·北京

图书在版编目（CIP）数据

最新版全国硕士研究生入学统一考试历年试题名家解析及预测. 经济数学三/刘斌编. －北京：海洋出版社，2000 ISBN 7－5027－4957－8

Ⅰ. 最… Ⅱ. 刘… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－试题 ②高等数学－研究生－入学考试－试题 Ⅳ. G643－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 15331 号

海洋出版社 出版发行
（100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号）
北京建筑工业印刷厂印刷 新华书店发行所经销
2000 年 3 月第 1 版 2000 年 3 月北京第 1 次印刷
开本：787×1092 1/16 印张：81.375（总）
字数：2800 千字（总） 印数：1～3000 册
共 7 册 定价：112.00 元（每册 16.00 元）
海洋版图书印、装错误可随时退换

出 版 说 明

本套丛书具有**资料完整、分析详细、解剖透彻和技巧灵活的特点**。首先,汇集了1987~2000年数学,1991~2000年政治、英语的历届研究生入学考试试题,包括理科政治、文科政治、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四,共七册;其次,真正做到了逐题解析,透彻详细,论证严密,特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程,还对命题思路、解题的重点、难点进行了深入解析,并注重解题思路和规律的分析—总结与方法—技巧的提炼;最后对命题趋势作出预测,切题率高。

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来,至今已有14年,共命制试卷100余份,数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治方面知识、能力和水平的要求,展示出统考以来三门基础课考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想,是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过10届,所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上,近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如,2000年数学一的第二大题第(2)小题与1988年数学一的第二大题第(3)小题,2000年数学三、四的第九大题与1991年数学一的第七大题、1998年数学二的第十三大题,2000年数学一的第七大题与1995年数学一的第一大题第(4)小题,2000年数学二的第二大题第(2)小题与1997年数学二的第二大题第(3)小题,2000年数学一的第三大题与1991年数学二的第一大题第(5)小题,2000年数学二的第二大题第(5)小题与1997年数学二的第三大题第(5)小题,2000年数学三、四的第五大题与1991年数学三的第七大题、数学四第八大题,2000年数学二的第九大题与1998年数学三的第二大题第(1)小题,2000年数学二的第一大题第(3)小题与1998年数学四的第一大题第(3)小题,2000年数学四的第十大题与1999年数学四的第十大题,1999年数学一的第三大题与1995年数学一的第三大题第(1)小题,1999年数学一填空题第(2)小题与1998年选择题的第(1)小题,1999年数学一选择题第(3)小题与1989年选择题第(4)小题,1999年数学二第十二大题与1991年数学一第七大题,1999年数学三填空题第(1)小题与19994年数学四第五大题,1999年数学三、四选择题第(2)小题与1997年数学三、四填空题第(2)小题,1999年数学三第九大题与1997年数学一第七大题第(2)小题,

1999 年数学四第九大题与 1994 年数学三第十大题等等都是相同或非常相似的，且解题思路几乎完全一样，可见仅在**最近两年**的数学考题中就有**多达** 20 **余道题**是与往届考题雷同的，考生若把这些历年试题全部消化巩固，将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此，广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历年考试资料作为参考，共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作，现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本丛书的考点预测部分是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶，具有极高的切题率。比如，从去年版本来看，2000 年数学一试题中的有关重心计算、相似与对角化问题等等；2000 年英语试题中，词汇部分预测到第 4 题、第 7 题、第 23 题、第 24 题、第 28 题、第 32 题、第 33 题、第 34 题、第 38 等题，语法内容方面预测到第 1 题、第 3 题、第 11 题、第 12 题、第 13 题（非谓语动词）；第 14 题（语态）；第 5 题（定语从句）；第 16、18 题（名词性从句）。阅读理解方面预测到 Passage 1（美国的经济）；短文写作方面，预测准确是图表作文题。

本丛书的文科政治和理科政治的 4 位作者中，有 3 位曾是教育部原政治命题组负责人或命题组成员，1 位是长期阅卷，并担任过政治阅卷组组长。现在都是北京市和全国各大城市举办的大型考研辅导班和串讲班的主讲教授。所以，他们对历年试题的解析及预测的权威性强，可信度高。

今年版本在保留去年版本优点的基础上，经过各位参编专家的潜心研究，参照 2000 年新的命题动态，对 2001 年的命题趋势作了新的预测，相信对即将参加研究生入学考试的广大同学具有重要的参考价值。

由于出版时间比较仓促，难免还有不当之处，恳请广大读者朋友批评指正，以使本系列丛书能不断完善。

考研试题研究组

本丛书特点

1. 全国考研辅导名家主笔。
2. 解析透彻，权威性强。
3. 预测科学，把握命题规律，切题率高。

责任编辑　田家作
总 策 划　谭隆全
封面设计　卢　骁

目　　录

注:1987～1996 年数学三为原数学四

第一编　全国硕士研究生入学统一考试 历年经济数学三试题及解析

一、2000 年经济数学三试题及解析

2000 年经济数学三试题

考生注意:(1) 本试卷共十二大题,满分 100 分.

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数分别用 $\tan x$, $\cot x$, $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

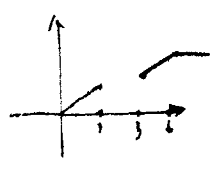
(1) 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$,其中 f、g 均可微,则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ $y f_1' + \frac{1}{y} f_2' + (-g' \frac{y}{x^2})$

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}} =$ $\frac{\pi}{4e}$.　　$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e} \arctan e^{x-1}$

(3) 若四阶矩阵 A 与 B 相似,矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$,则行列式 $|B^{-1} - E| =$ ________.

(4) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in [0,1] \\ \frac{2}{9} & x \in [3,6] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



若 k 使得 $P\{X \geq k\} = \frac{2}{3}$,则 k 的取值范围是 $[1, 3]$.

(5) 设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布;随机变量

$$Y = \begin{cases} 1 & X > 0 \\ 0 & X = 0 \\ -1 & X < 0 \end{cases}$$

则方差 $DY=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且等于零　　　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　　　(D) 不一定存在

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　　　(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　　　(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$　　　　[　　]

(3) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量,且秩$(A)=3$,$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$,$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$,$c$ 表示任意常数,则线性方程组 $AX=b$ 的通解为

(A) $\begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\end{Bmatrix}+c\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}$　　　　(B) $\begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\end{Bmatrix}+c\begin{Bmatrix}0\\1\\2\\3\end{Bmatrix}$

(C) $\begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\end{Bmatrix}+c\begin{Bmatrix}2\\3\\4\\5\end{Bmatrix}$　　　　(D) $\begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\end{Bmatrix}+c\begin{Bmatrix}3\\4\\5\\6\end{Bmatrix}$　　　　[　　]

(4) 设 A 为 n 阶实矩阵,A^T 是 A 的转置矩阵,则对于线性方程组(Ⅰ):$AX=O$ 和(Ⅱ):$A^TAX=O$,必有

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解,(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解,但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解　　　　[　　]

(5) 在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的.在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电.以 E 表示事件"电炉断电",而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列温度值,则事件 E 等于

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　　　(B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$

(C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　　　(D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$　　　　[　　]

三、(本大题满分 6 分)

求微分方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的解.

四、(本题满分 6 分)

计算二重积分$\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由曲线$y=-a+\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$和直线 $y=-x$ 围成的区域.

五、(本题满分 6 分)

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品,两个市场的需求函数分别是

$$p_1=18-2Q_1,\qquad p_2=12-Q_2$$

其中 p_1 和 p_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位:万元/吨),Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量,单位:吨),并且该企业生产这种产品的总成本函数是

$$C=2Q+5$$

其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量,即 $Q=Q_1+Q_2$.

(1) 如果该企业实行价格差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量和价格,使该企业获得最大利润;

(2) 如果该企业实行价格无差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格,使该企业的总利润最大化;并比较两种价格策略下的总利润大小.

六、(本题满分 7 分)

求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值,并求该函数图形的渐近线.

七、(本题满分 6 分)

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x$, $n=0,1,2,\cdots$,求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.

试证明:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

九、(本题满分 8 分)

设向量组 $\alpha_1=(a,2,10)^T$, $\alpha_2=(-2,1,5)^T$, $\alpha_3=(-1,1,4)^T$, $\beta=(1,b,c)^T$.试问:当 a、b、c 满足什么条件时,

(1) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,且表示惟一?

(2) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出?

(3) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,但表示不惟一?并求出一般表示式.

十、(本题满分 9 分)

设有 n 元实二次型

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+$

$a_nx_1)^2$,其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数.试问:当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时,二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

十一、(本题满分 8 分)

假设0.50、1.25、0.80、2.00是来自总体 X 的简单随机样本值.已知 $Y=\ln X$ 服从正态分 $N(\mu,1)$.

(1) 求 X 的数学期望 EX(记 EX 为 b);

(2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间;

(3) 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

十二、(本题满分 8 分)

设 A、B 是二随机事件;随机变量

$$X=\begin{cases}1 & A\text{ 出现}\\ -1 & A\text{ 不出现}\end{cases},\qquad Y=\begin{cases}1 & B\text{ 出现}\\ -1 & B\text{ 不出现}\end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 相互独立.

2000年经济数学三试题解析

一、填空题

(1) $\underline{yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 - \frac{y}{x^2}g'}$

[解析] 直接按复合函数求导公式,有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot y + f'_2 \cdot \frac{1}{y} + g'(\frac{y}{x}) \cdot (-\frac{y}{x^2}) = yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 - \frac{y}{x^2}g'$$

(2) $\underline{\frac{\pi}{4e}}$

[解析] $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{2-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{e^x \mathrm{d}x}{e^2 + (e^x)^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}e^x}{e^2 + (e^x)^2}$

$$= \frac{1}{e}\arctan e^{x-1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4e}$$

(3) $\underline{24}$

[解析] $\because A \sim B$,所以 B 的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,于是 B^{-1} 的特征值为2,3,4,5,从而 $B^{-1} - E$ 的特征值为1,2,3,4.故 $|B^{-1} - E| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

(4) $\underline{[1,3]}$

[解析] 若 $k < 1$,则 $P\{x \geqslant k\} > \int_3^6 \frac{2}{9}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$

若 $k > 3$,则 $P\{x \geqslant k\} < \int_3^6 \frac{2}{9}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$

均与 $P\{x \geqslant k\} = \frac{2}{3}$ 矛盾

故必有 $k \in [1,3]$

事实上,当 $k \in [1,3]$ 时,$P\{x \geqslant k\} = \int_k^3 0\mathrm{d}x + \int_3^6 \frac{2}{9}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

(5) $\underline{\frac{8}{9}}$

[解析] 由题设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$,于是

$$P\{Y = 1\} = P\{X > 0\} = \frac{2}{3}$$

$$P\{Y = -1\} = P\{X < 0\} = \frac{1}{3}$$

$P\{Y=0\}=0$

故 $EY=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times 0+1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$$EY^2=(-1)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times 0+1^2\times\frac{2}{3}=1$$

从而 $DY=EY^2-(EY)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

二、填空题

(1) 应选(D)

[解析] 举例说明:如 $\varphi(x)=x,f(x)=x+e^{-|x|},g(x)=x+2e^{-|x|}$,则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在;又如 $\varphi(x)=0,f(x)=e^{-|x|},g(x)=2e^{-|x|}$,则也有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,但此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-|x|}=0$. 故应选$(D)$.

(2) 应选(B).

[解析] 可用反例说明:如 $f(x)=x^2,x=a=0$,则(A)成立,但 $|f(x)|=x^2$ 且 $x=0$ 处可导;又如 $f(x)=x,x=a=1$,则(C)成立,但 $|f(x)|=|x|$ 在 $x=1$ 处可导;再如 $f(x)=-x,x=1$,则(D)成立,但 $|f(x)|=|-x|=|x|$ 在 $x=1$ 处可导. 因此正确答案为(B). 事实上,若 $f(a)=0$,且 $f'(a)\neq 0$,不妨设 $f'(a)>0$. 由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)>0$ 知在 $x=a$ 左侧 $f(x)<0$,在 $x=a$ 右侧 $f(x)>0$. 于是 $g(x)=|f(x)|$ 在 $x=a$ 处左、右导数为

$$g'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{x-a}=-f'(a)$$

$$g'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)\neq g'_-(a)$$

故 $g(x)=|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导.

(3) 应选(C)

[解析] 由题设 $\alpha_1-\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ 是 $AX=0$ 的基础解系,

故 $AX = b$ 的通解为 $X = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\\2\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ （其中 $c = \frac{k}{2}$ 为任意常数）

(4) 应选(A).

[解析] 显然(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解.反过来,设 X 为(Ⅱ)的解,即 $A^TAX = 0$,则 $X^TA^TAX = (AX)^TAX = 0$,从而有 $AX = 0$,即 X 也为(Ⅰ)的解,也就是(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解.因此应选(A).

(5) 应选(C).

[解析] $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$ 表示四个温控器显示的温度均不低于 t_0;$\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$ 表示三个或四个温控器显示的温度不低于 t_0;而 $\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$ 表示至少一个温控器显示不低于 t_0.只有(C)为正确答案.事实上,$\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$ 表示至少两个温控器显示的温度不低于 t_0,即事件 E.

三、**[解析]**

此题为标准二阶常系数非齐次线性微分方程,可按相应方法求解.

齐次方程 $y'' - 2y' = 0$ 的特征方程为

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

由此求得特征根 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$.

对应齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 + C_2e^{2x}$.

设非齐次方程的特解为 $y^* = Axe^{2x}$,则

$$(y^*)' = (A + 2Ax)e^{2x}$$

$$(y^*)'' = 4A(1 + x)e^{2x}$$

代入原方程,求得 $A = \frac{1}{2}$.从而

$$y^* = \frac{1}{2}xe^{2x}$$

于是,原方程的通解为

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + (C_2 + \frac{1}{2}x)e^{2x}$$

将 $y(0) = 1$ 和 $y'(0) = 1$ 代入通解,求得

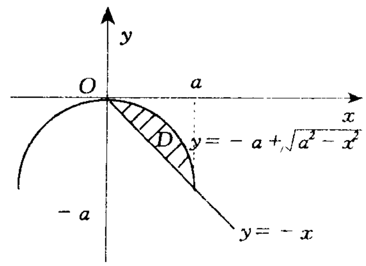
$$C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{1}{4}$$

从而,所求解为 $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(3 + 2x)e^{2x}$.

四、[解析]

积分区域为圆域的一部分,化为极坐标求解.

区域 D 如右图;在极坐标系下



$$D = \left\{(r,\theta)\left| -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 0, 0 \leqslant r \leqslant -2\sin\theta\right.\right\}$$

$$I = \iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}$$

令 $r = 2a\sin t$,有

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-\theta}2a^2(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).$$

五、[解析]

(1) 根据题意,总利润函数为

$$L = R - C = p_1Q_1 + p_2Q_2 - (2Q+5)$$

$$= -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5$$

令 $$\begin{cases} L'_{Q_1} = -4Q_1 + 16 = 0 \\ L'_{Q_2} = -2Q_2 + 10 = 0 \end{cases}$$

解得 $Q_1 = 4, Q_2 = 5$,则 $p_1 = 10$(万元/吨),$p_2 = 7$(万元/吨).

因驻点(4,5)惟一,且实际问题一定存在最大值,故最大值必在驻点处达到.最大利润为

$$L = -2\times 4^2 - 5^2 + 16\times 4 + 10\times 5 - 5 = 52(\text{万元}).$$

(2) 若实行价格无差别策略,则 $p_1 = p_2$,于是有约束条件

$$2Q_1 - Q_2 = 6$$

构造拉格朗日函数

$$F(Q_1,Q_2,\lambda) = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5 + \lambda(2Q_1 - Q_2 - 6)$$

令 $$\begin{cases} F'_{Q_1} = -4Q_1 + 16 + 2\lambda = 0 \\ F'_{Q_2} = -2Q_2 + 10 - \lambda = 0 \\ F'_{\lambda} = 2Q_1 - Q_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

解得 $Q_1 = 5, Q_2 = 4, \lambda = 2$,则 $p_1 = p_2 = 8$.