



工商管理硕士研究生入学考试解题技巧与命题预测试卷系列

诠释解题技巧 命题预测分析 模拟实战演练 联考高分突破

MBA入学考试

解题技巧与命题预测试卷

2004年

● 陈 剑 主编
范培华 主审

数 学



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

C445
工商管理硕士研究生入学考试解题技巧与命题预测试卷系列
诠释解题技巧 命题预测分析 模拟实战演练 联考高分突破

2004年MBA入学考试 解题技巧与命题预测试卷

数 学

● 陈 剑 主编
范培华 主审



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷》的“数学”分册,是紧扣 2004 年 MBA 入学最新考试大纲进行编写的。

本书在第一章给出了 2004 年 MBA 联考数学考试解题技巧分析,就 MBA 的命题原则和考试的最新动态,以及如何应对 MBA 数学考试,如何在有限的时间内,高效地、有针对性地复习,提出颇值得考生参考的解决方案。为了便于考生对每部分的知识进行系统而又扎实的复习,本书从第二章到第五章分别对初等数学、微积分、线性代数和概率论进行了详细的例题精解。

本书还提供了 10 套命题预测试卷与解析,可用于广大考生进行临考前实战模拟训练。考生在进行实战训练的同时,能通过 10 套试题的训练,检查自己的学习,进行有针对性的查漏补缺,加强自己的优势,弥补自己的不足。

在本书的附录中还收录了 2003 年 MBA 入学考试数学试卷与解析。

本书内容凝练,题量充足,解析方法精辟,可作为 MBA 入学考试的数学课程辅导和自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷. 数学/陈剑主编. —北京:中国水利水电出版社, 2003

ISBN 7-5084-1658-9

I. 2… II. 陈… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 081185 号

书 名	2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷·数学
作 者	陈剑 主编 范培华 主审
出版发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www. waterpub. com. cn E-mail: sales@waterpub. com. cn 电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (营销中心)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京密云红光印刷厂
规 格	787mm×1092mm 16 开本 11 印张 253 千字
版 次	2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 1 次印刷
印 数	0001—5100 册
定 价	24.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷》

编 委 会

主 任：张 磊

副主任：李自杰 欧阳少波

委 员：刘约翰 杨小丰 梁 宵 李 庆 刘 铮 刘仕文

刘晓萍 刘 爽 杨 昊 李 进 国 志 李力阳

李红波 宏 伟 丁 伟 彭之宝 陈 剑

《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷·数学》

主 编：陈 剑

副主编：彭之宝

主 审：范培华

前言

随着中国加入 WTO,中国的经济以前所未有的步伐在前进。经济全球化、国际化的浪潮也给中国带来了无限的机遇和很大的挑战。经济发展的同时也对管理水平提出了更高的要求。

1900 年,国务院学位委员会正式批准在我国设立 MBA 学位和试办 MBA 教育,并于 1991 年开始招生。MBA 是一种专业学位,明显不同于普通理论研究型研究生教育的特点。MBA 教育过程中注重学生的实践环节,极其强调学生的能力与素质的培养,通过大量的案例教学,培养学生的战略眼光、创造性思维、团队合作精神、处理复杂问题的应变能力和决策能力,以及开拓进取的强烈的事业心与社会责任感。

2004 年 MBA 的入学考试形式在 2003 年的基础上稍微调整了一下。综合能力的考试形式不变,但是数学的题量减少为 30 道题,分值变为 90 分,数学的考试内容也有所减少:初等数学部分减掉了整式和分式、常见几何图形、多元函数的概念、行列式的性质与计算,增加了变上限定积分。写作部分由两部分变为三部分,写作试题分成了三种题型:论证有效性分析、论说文、文字材料综述。综合能力考试主要测试考生学习 MBA 课程所需的基本知识运用,以及运用数学知识分析问题、解决问题的能力。英语、逻辑和管理的考试内容及形式与 2003 年相同。

在 MBA 入学考试竞争日趋激烈的形势下,为了满足广大 MBA 考生的迫切需求,我们特组织了有丰富 MBA 辅导、培训经验的专家及教授,花费大量的时间精心编写了《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷》丛书,以便考生能在有限的时间内,通过本丛书的学习和实战演练,在 MBA 的考试中夺得高分,迈进名校 MBA 的殿堂。

丛书《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷》的特点如下:

一、作者阵容强大

作者皆为北京大学、对外经贸大学和北京理工大学等学校的教授和 MBA 辅导专家,长期在全国各地的 MBA 辅导学校的一线亲自辅导广大考生的考前复习,从事了多年 MBA 培训和教育工作,有相当丰富的辅导和教学工作实践经验,深谙 MBA 的命题规律和出题的动态。

二、体系明晰、紧扣大纲、内容凝练

《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷》丛书包括《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷·英语》、《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷·管理》、《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷·数学》、《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷·写作》和《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷·逻辑》。该丛书紧扣最新考试大纲,内容凝练,题量充足,解析方法精辟。在编写过程中,根据作者多年来的辅导经验,诠释 MBA 考试的技巧,让广大考生能够在有限的时间之内,正确把握考试要求,紧紧抓住考试的重点环节,进行全真的试题模拟,做到事半功倍。

本书是《2004 年 MBA 入学考试解题技巧与命题预测试卷》的“数学”分册。MBA 考试历来有“得数学者得天下”的说法，尽管 2003 年 GRK 联考的形式发生了较大的变化，但是数学考试的重要性仍然没有改变，数学考试仍然是 MBA 入学考试之中的“重头戏”，考生千万不可小视。

本书的架构体系和特色如下：

1. 本书在第一章给出了 2004 年 MBA 联考数学考试解题技巧分析，就 MBA 的命题原则和考试的最新动态，以及如何应对 MBA 数学考试，如何在有限的时间内，高效地、有针对性地复习，提出颇值得考生参考的解决方案。

2. 为了便于考生对每部分的知识进行系统而又扎实的复习，本书从第二章到第五章分别对初等数学、微积分、线性代数和概率论进行了详细的例题精解。每部分知识都有例题精解，这部分内容是作者根据多年的 MBA 辅导经验来编写的，其内容基本涵盖了 2004 年 MBA 数学考试大纲规定的考点知识，每道例题都是很经典、颇有代表性的题目。相信定会使考生收益不菲，在有限的时间之内抓住重点，有的放矢，提高效率。

3. 本书给出了 10 套命题预测试卷，让广大考生能够找到“身临其境”的感觉。考生每做一套模拟试题后，都应该进行仔细而又深入的总结，针对自己的复习，进行查漏补缺，以真正达到模拟检验的目的。与其做两到三套模拟试题，不如认真地总结一套模拟试题，对疑难和重点进行认真的分析和总结，做到下次碰到类似的问题，能轻车熟路，迎刃而解。最后，本书附上 2003 年全国 MBA 联考数学试题与解析，让考生了解近年来的命题趋势和考试的题型变化。

由于作者水平有限，加之时间仓促，难免存在错误和疏漏之处，望广大专家和考生批评指正。

作 者

2003 年 9 月于北京

目 录

前 言

第一章 MBA 入学考试数学解题技巧分析	1
第二章 初等数学例题精解	9
第三章 微积分例题精解	15
第四章 线性代数例题精解	29
第五章 概率论例题精解	46
第六章 2004 年 MBA 入学考试数学预测试卷与解析	60
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷一	60
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷二	64
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷三	69
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷四	73
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷五	78
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷六	82
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷七	86
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷八	90
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷九	94
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷十	99
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷一答案与解析	103
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷二答案与解析	109
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷三答案与解析	115
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷四答案与解析	121
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷五答案与解析	126
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷六答案与解析	131
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷七答案与解析	137
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷八答案与解析	143
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷九答案与解析	148
2004 年 MBA 入学考试数学命题预测试卷十答案与解析	152
附录: 2003 年 MBA 入学考试数学试卷与解析	156

第一章 MBA 入学考试数学

解题技巧分析

2004 年 MBA 入学考试中的数学部分在 2003 年的基础上进行了小的调整,调整的范围和幅度不大,数学部分总共减少 4 题,合计 10 分,从而使分值变为 90 分。但是数学考试仍然是重头戏,具有举足轻重的地位,考生千万不可小视。

对于数学部分的复习,考生首先要掌握基本的概念,熟悉考点知识,紧扣大纲,抓住重点。考生应该以“三基”和“大纲”为主线,“三基”即:基本概念、基本原理 基本方法;“大纲”即 2004 年最新 MBA 数学考试大纲。广大考生应该仔细研究 2004 年 MBA 入学考试数学“大纲”,对照大纲,明确考试的范围和要求,了解分值分布,进行有的放矢。请看下面这道题:

设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则:

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数。
- (B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数。
- (C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数。
- (D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数。
- (E) A、B、C、D 均不正确。

要解决上面这道 4 分的问题求解的题,需要许多相关的数学基础知识,考生必须掌握:原函数的概念、不定积分与原函数之间的关系、不同的原函数之间的关系、定积分的换元积分公式、变上限定积分的解法(2004 年大纲新增内容)、原函数的存在原理等。一个考试题往往涉及到许多相关的知识,所以考试的综合性很强,并非考查单一知识点,而是考查考生对知识的综合运用能力。

数学考试与写作和逻辑考试合并为综合考试,在 3 个小时内完成,时间是很紧张的。考生如果在牢固掌握基础知识的基础上,能掌握一定的解题技巧,必将大大提高考生的解题速度。下面就一些比较典型的题型,介绍几种解题方法和技巧。当然,这些解题方法并非具有通用性,考生应该具体情况具体分析。

一、结合图形解题,一目了然

【例 1】 (1998 年) 要使方程 $3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2 = 0$ 的两个实根分别满足 $0 < x_1 < 1$ 和 $1 < x_2 < 2$, 实数 m 的取值范围是 ()。

- (A) $-2 < m < -1$
- (B) $-4 < m < -1$
- (C) $-4 < m < -2$
- (D) $-3 < m < 1$

【技巧分析】 这里主要考查二次函数(方程)的性质。如果用一元二次方程根与系数的关系解题,比较烦琐,我们不妨结合图形解题。

解:如图 1-1 所示,设

$$f(x) = 3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2$$

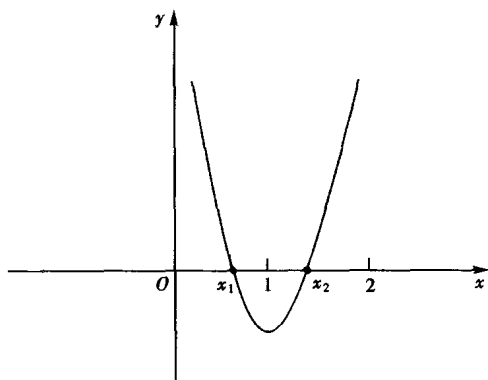


图 1-1

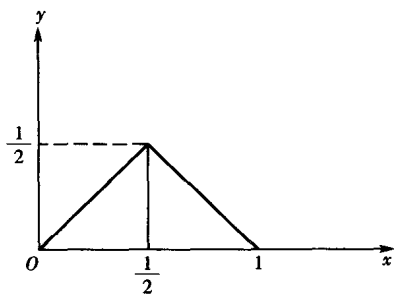


图 1-2

则 $f(x)$ 开口向上, 与 x 轴交于 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 两点, 有不等式组

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \text{ 从而有 } m^2 - m - 2 > 0; m^2 - 4 < 0; m^2 + m > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

答案: (A)

【例 2】 设 $\varphi(x)$ 是 x 到离 x 最近的整数的距离, 求 $\int_0^{100} \varphi(x) dx$ 。

【技巧分析】 此题至少有两种解法。直接用积分的方法也能算出答案, 但是比较烦琐, 如果借助于图形, 答案就一目了然了。其实所求积分就是如下图所示的 100 个三角形面积之和。

解法 1: 如图 1-2 所示。

$$\int_0^{100} \varphi(x) dx = 100 \times 0.25 = 25$$

解法 2:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \begin{cases} x - i, & i \leq x < i + 0.5 \\ i + 1 - x, & i + 0.5 \leq x < i + 1 \end{cases} \\ \int_0^{100} \varphi(x) dx &= \sum_{i=0}^{99} \int_i^{i+1} \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{99} \left[\int_i^{i+0.5} (x - i) dx + \int_{i+0.5}^{i+1} (i + 1 - x) dx \right] = 25 \end{aligned}$$

二、典型的比例问题, 借助比例系数求解

【例 3】 (2002 年) 设 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4 : 5 : 6$, 则使 $x + y + z = 74$ 成立的 Y 值是 ()。

- (A) 24 (B) 36 (C) $\frac{74}{3}$ (D) $\frac{37}{2}$

【技巧分析】 这是很典型的比例问题, 一般的题是两个数值之间的比例问题, 这里是三个

数值之间的比例问题。按照 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ 各自的比例直接计算此题, 不如借助于比例系数来得快。

$$\begin{aligned} \text{解: 令} \quad & \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = k \\ \text{有} \quad & \begin{cases} x = \frac{1}{4k} \\ y = \frac{1}{5k} \\ z = \frac{1}{6k} \end{cases} \end{aligned}$$

根据题意有 $\frac{1}{4k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{6k} = 74$, 解得 $k = \frac{1}{120}$ 。

$$\text{所以} \quad y = \frac{1}{5k} = \frac{1}{120} = 24$$

答案: (A)

三、直观判断常数项

在判断 n 值给定的情况下, 二项展开式是否存在常数项的问题时, 用直接判断法比代入条件验证结论要简便得多, 下面结合例题进行分析。

【例 4】 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 有常数项。

(1) $n = 6$

(2) $n = 7$

【技巧分析】 二项展开式中, 位于分母的指数为 $\frac{1}{3}$, 位于分子的指数为 $\frac{1}{4}$, 它们的比值为 $\frac{3}{4}$, $3+4=7$, 只有当 $n=7$ 的整数倍时, 展开式才存在常数项。所以条件 (2) 充分。如果将条件 (1) 和条件 (2) 代入算式则比较麻烦。答案为 (B)。

四、等价变形, 运用转换法

【例 5】 设实数 x, y 符合等式 $x^2 - 4xy + 4y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - 6 = 0$, 则 $x + y$ 的最大值为 ()。

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $3\sqrt{2}$ (E) $3\sqrt{3}$

【技巧分析】 把 $x + y$ 视作一个整体来解题, 有些麻烦, 问题比较复杂。但是如果能将原等式进行等价变换, 则会“柳暗花明”。

解: 对原式作等价变形, 有

$$\sqrt{3}(x + y) = 6 - (x - 2y)^2$$

$$(x+y) = \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2y)^2$$

$$(x-2y)^2 \geq 0, \text{ 又}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2y)^2 \geq 0$$

$$\therefore x+y \leq \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

答案: (C)

五、运用待定系数法求解

【例 6】 已知 $x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 4$ 是一个二次三项式的完全平方式, 则 a, b 的值分别为 ()。

(A) $a=13, b=-12$ 或者 $a=5, b=12$

(B) $a=6, b=1$

(C) $a=-6, b=4$

(D) $a=13, b=-12$

(E) (A)、(B)、(C)、(D) 均不正确

【技巧分析】 此类题采用待定系数法就比较简单, 直接根据未知的系数来推算答案是比较麻烦的。

解: 设原式 $= (x^2 + Ax + B)^2$, 有

$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 4 = x^4 + 2Ax^3 + (A^2 + 2B)x^2 + 2ABx + B^2$$

$$\text{得} \begin{cases} 2A = -6 \\ A^2 + 2B = a \\ 2AB = b \\ B^2 = 4 \end{cases} \quad \text{解得 } A = -3, B = \pm 2$$

当 $B = -2$ 时, 有 $a=5, b=12$; 当 $B = 2$ 时, 有 $a=13, b=-12$

答案: (A)

六、求不等式解集: “根排序法”

【例 7】 不等式 $\frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5} \leq 0$ 的解集是 ()。

(A) $(-\infty, -5) \cup [1, 3]$

(B) $(-\infty, -5] \cup (1, 3)$

(C) $(-5, 3)$

(D) $(-\infty, 8)$

(E) (A)、(B)、(C)、(D) 均不正确

【技巧分析】 直接对不等式求解显然很麻烦,我们用“根排序法”会很轻松。

解: 对原不等式作同解变形

$$\text{得} \begin{cases} (x-1)(x-3)(x+5) \leq 0 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

令 $(x-1)(x-3)(x+5)=0$, 有 $x_1=5, x_2=1, x_3=3$, 将 x_1, x_2, x_3 从左到右依大小进行排序, 得

$$\begin{array}{ccccccc} & -5 & & +1 & & +3 & \\ & - & & + & & - & + \end{array}$$

由上面的排序可得到答案: 不等式的解集是

$$(-\infty, -5) \cup (1, 3)$$

答案: (A)

七、中值 M , 等差数列解题的法宝

【例 8】 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_5 + a_{11} + a_{13} + a_{19} = 120$, 则前 23 项的和 $S_{23} = ()$ 。

(A) 690 (B) 720 (C) 180 (D) 200 (E) 400

【技巧分析】 如果运用等差数列的性质和公式进行计算, 当然能得出结论, 但我们不妨借助于中值 $M = \frac{a_1 + a_n}{2}$, 题目就变得简单了。

$$\text{解: } a_5 + a_{19} = a_{11} + a_{13} = 60, \text{ 令 } \frac{a_{11} + a_{13}}{2} = \frac{a_1 + a_{23}}{2} = M$$

$$\text{因为 } s_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n = Mn$$

$$\text{所以 } s_{23} = M23 = 30 \times 23 = 690$$

答案: (A)

【例 9】 条件充分性判断:

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项和 $S_{13} = 26$

$$(1) a_4 + a_{10} = 8$$

$$(2) a_2 + a_8 + a_4 = 4$$

【技巧分析】 运用中值 $M = \frac{a_1 + a_n}{2}$, 可以化繁杂为简便。

$$\text{解: 由条件 (1) } a_4 + a_8 = a_1 + a_{13} = 8 \text{ 得 } M = \frac{a_1 + a_{13}}{2} = 4$$

$S_{13} = 13, M = 52 \neq 26$ 所以条件 (1) 不充分。

$$\text{由条件 (2) } a_2 + a_8 + a_4 = a_1 + a_{13} = 4 \text{ 得 } M = 2$$

$S_{13} = 13, M = 26$ 所以条件 (2) 充分。

答案: (B)

八、“特值代入法”，准确而又高效的技巧

【例 10】 $C_n^1 + 3C_n^2 + 3^2C_n^3 + \cdots + 3^{n-1}C_n^n$ 的值为 ()。

- (A) $\frac{1}{3}(4^n - 1)$ (B) 4^n (C) 3×4^n (D) $\frac{4^n}{3} - 1$

【技巧分析】 本题可用较为老新的方法计算出答案，但是，在考场上用“特值代入法”，准确而又高效，可以节省大量的时间。请看下面两种解法，很明显，解法 2 是考生所愿意采纳的方法。

$$\begin{aligned}\text{解法 1: 原式} &= \frac{1}{3} (3C_n^1 + 3^2C_n^2 + 3^3C_n^3 + \cdots + 3^nC_n^n) \\ &= \frac{1}{3} [(C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \cdots + 3^nC_n^n) - C_n^0] \\ &= \frac{1}{3} [(1+3)^n - 1] = \frac{1}{3} (4^n - 1)\end{aligned}$$

答案: (A)

解法 2: 用 $n=1$ 代入，正好 (A)，选项为正确答案，如果不放心，用 $n=2$ 代入，也立即可知，只有 (A) 选项符合。

【例 11】 若 $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ac$, $z = c^2 - ab$, a, b, c 是不完全相等的任意实数，则 x, y, z ()。

- (A) 至少有一个大于 0 (B) 都大于 0 (C) 至少有一个小于 0 (D) 都不小于 0

【技巧分析】 像这种考题，按照规矩的方法，花一些时间可以求出答案，大家可以比较下面两种解题方法，当然解法 1 也比较简单，但考生在紧张的状态下不一定想得到，所以用解法 2 是高速而又保险的做法。

$$\text{解法 1: } x + y + z = a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab = \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$$

因为 a, b, c 不全相等，所以有

$$x + y + z = \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] > 0$$

x, y, z 中至少有一个大于 0。

答案: (A)

解法 2: 不防令 $a=0, b=1, c=2$ ，很快排除 (B), (D)。再令 $a=1, b=0, c=-1$ 又排除 (C)。只有 (A) 选项正确。

【例 12】 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，则 $A^n =$ ()。

- (A) $2^n A$ (B) $2^{n-1} A$ (C) $2^{n-2} A$ (D) 0

【技巧分析】 老实地算，仔细一点能算正确，否则容易出错，下面的解法 2 是省时又得分，真简便。在考场上，考生应该善于灵活运用这种“特值代入法”，定然会大有裨益。

解法 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A$

$A^3 = 2A^2 = 2^2A$, $\dots$, $A^n = 2^{n-1}A$ 所以归纳推理出一般规律, (B) 选项正确

解法 2: 不妨设 $n=1$, 很快排除 (A), (C), (D) 选项, 直接选择 (B) 选项, 5 秒钟内得出答案。

【例 13】 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A^n = (\quad)$ 。

(A) $\begin{bmatrix} 3^n & 2n3^n & 3n3^n \\ 0 & 3^n & 2n3^n \\ 0 & 0 & 3n \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 3n3^{n-1} \\ 0 & 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 3^n n + 4n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

【技巧分析】 像这类题, 在考场上就不要按部就班的计算了, 要知道, 找到 A^n 的规律, 至少要花上 5 分钟, 还不能保证正确率, 用“特值代入法”, 简洁、准确、高效。

解: 令 $n=1$, 代入 (A), (B), (C) 选项, 立即可以排除 (A), (B) 选项错误, (D) 选项不用代入, 直接排除, 10 秒钟也可得出答案, 所以“特值代入法”在特定的情况下是相当有用的。

九、直接加法: 判断向量的线性相关性

【例 14】 设 a_1, a_2, a_3 线性无关, 则 () 也线性无关。

(A) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 - a_1$

(B) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + 2a_2 + a_3$

(C) $a_1 + 2a_2, 2a_2 + 3a_3, 3a_3 + a_1$

(D) $a_1 + a_2 + a_3, 2a_1 + a_2 + 3a_3, 3a_1 + 2a_2 + 4a_3$

【技巧分析】 可以通过计算矩阵行列式的值来判定向量组的线性相关性, 但有的情况下, 对其向量直接采用加减法很快可判定其向量组的相关性。

解法 1: (A): $a_1 + a_2 - (a_2 + a_3) + (a_3 - a_1) = 0$

相当于 $k_1(a_1 + a_2) + k_2(a_2 + a_3) + k_3(a_3 - a_1) = 0$

其中 $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1$

所以 (A) 选项立即排除。

(B): $a_1 + a_2 + a_2 + a_3 - (a_1 + 2a_2 + a_3) = 0$, 排除 (B) 选项。

(D): $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_1 + a_2 + 3a_3 - (3a_1 + 2a_2 + 4a_3) = 0$, 排除 (D) 选项

所以 (C) 选项正确。

解法 2: (A) 组 3 个向量对 a_1, a_2, a_3 的表示矩阵的行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

所以 (A) 组向量线性相关。

$$\text{(B) 组: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{(C) 组: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

$$\text{(D) 组: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

只有 (C) 组向量线性无关, 正确选项应为 (C)。

第二章 初等数学例题精解

【例 1】 已知 $|a|=5$, $|b|=7$, $ab<0$, 则 $|a-b|=\underline{\hspace{1cm}}$ 。

- (A) 2 (B) -2 (C) 12 (D) -12 (E) 0

解: 因为 $ab<0$, 故只有两种可能

$$a=5, b=-7, \text{ 这时 } |a-b|=|5+7|=12$$

$$a=-5, b=7, \text{ 这时 } |a-b|=|-5-7|=12$$

答案: (C)

【例 2】 一公司向银行借款 34 万元, 欲按 $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$ 的比例分配给下属甲、乙丙三车间进行技术改造, 则甲车间应得 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

- (A) 4 万元 (B) 8 万元 (C) 12 万元 (D) 18 万元 (E) 10 万元

$$\text{解: 由 } \frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}=9:6:2, \text{ 甲车间应得 } = \frac{9}{9+6+2} \times 34 = 18。$$

答案: (D)

【例 3】 已知二项式 $(\ln x + 1)^7$ 的展开式中第 6 项是 21, 则 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

$$\text{解: } T_6 = C_7^5 (\ln x)^2 = 21, \quad 21 (\ln x)^2 = 21 \quad \ln x = \pm 1, \text{ 故 } x_1 = e, \quad x_2 = \frac{1}{e}$$

【例 4】 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中系数最大的项是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

- (A) 第 4, 6 项 (B) 第 5, 6 项
(C) 第 5, 7 项 (D) 第 6 项
(E) 第 7 项

解: 第 $r+1$ 项的系数为 $(-1)^r C_{10}^r$, 当 $r=4$ 或 6 时系数最大。

答案: (C)

【例 5】 二项式 $\left(x - \frac{1}{x^3}\right)^8$ 的展开式中的常数项是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

- (A) 56 (B) -56 (C) -28 (D) 28 (E) 30

解: 设第 $r+1$ 项为 T_{r+1} 依二项式定理

$$T_{r+1} = C_8^r X^{8-r} (-x^{-3})^r = (-1)^r C_8^r X^{8-r}$$

依题意: $8-4r=0$ 得 $r=2$ 故常数项为 $(-1)^2 C_8^2 = 28$ 。

答案: (D)

【例 6】 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

$$\text{解: 原式} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

【例 7】 甲乙两机床 4 小时共生产某种零件 360 个。现在两台机床同时生产这种零件, 在

相同时间内, 甲机床生产了 1225 个, 乙机床生产了 1025 个。甲机床每小时生产零件_____。

(A) 49 个 (B) 50 个 (C) 51 个 (D) 52 个 (E) 60 个

解 1: 设甲机床每小时生产 x 个零件, 乙机床每小时生产 y 个零件, 依题意

$$\begin{cases} 4x + 4y = 360 \\ \frac{1225}{x} = \frac{1025}{y} \end{cases}$$

解方程组得 $x = 49$, $y = 41$ 。

解 2: 甲乙两台机床同时生产这批零件所用时间为

$$(1225 + 1025) \div (360 \div 4) = 25 \text{ (小时)}$$

甲机床每小时生产零件为

$$1225 \div 25 = 49 \text{ (个/小时)}$$

解 3: 设甲机床每小时生产 x 个零件, 则

$$\frac{1225}{x} = \frac{1025}{(360 \div 4) - x}$$

即等式两边分别为甲、乙两台机床生产这批零件的时间, 解得 $x = 49$ 。

答案: (A)

【例 8】某单位有男职工 420 人, 男职工人数是女职工人数的 $1\frac{1}{3}$ 倍, 工龄 20 年以上者占全体职工人数的 20%, 工龄 10~20 年者是工龄 10 年以下者人数的一半, 工龄在 10 年以下者人数是

(A) 250 人 (B) 275 人 (C) 392 人 (D) 401 人 (E) 400 人

解 1: 设工龄在 10 年以下者为 x 人, 依题意

$$\frac{\frac{3}{2}x}{1 - 0.2} = \left[1 + \frac{1}{4} \right] \times 420 \text{ 即等式两边均为总人数, 则}$$

$$x = 392 \text{ (人)}$$

解 2: 总人数为: $420 + 420 \div 1\frac{1}{3} = 735$, 工龄在 10 年以下者为

$$735 \times 80\% \div \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 392 \text{ (人)}$$

答案: (C)

【例 9】两地相距 351 公里, 汽车已行驶了全程的 $\frac{1}{9}$, 试问再行驶多少公里, 剩下的路程是已行驶的路程的 5 倍? 答案是_____。

(A) 19.5 公里

(B) 21 公里

(C) 21.5 公里

(D) 22 公里

(E) 20 公里

解: 设还要行驶 x 公里, 由