



中学数学教材研究与教案选

第 一 册

北京师范大学出版社

前 言

多年来，广大数学教师在教学实践中积累了非常丰富的教学经验，将这些经验进行交流与推广，无疑将对开展中学数学教学的研究，提高数学教学质量，会有积极的意义。为此，我们在翻阅了解放以来，尤其是近三、四年来有关中学数学教学的大量文章与资料的基础上，约请了全国二十多个省、市、自治区的二百多位教师撰写文章与教案，并经过精选和修改，编辑了《中学数学教材研究与教案选》这套书。本书的作者，绝大部分都具有二、三十年甚至更长时间的教学实践，其中数十名是特级教师。选入书中的文章或教案可以说是他们几十年辛勤劳动的结晶，也在一定程度上反映了全国某些地区中学数学教学的情况。

本书是按照一九八二年公布的《全日制六年制重点中学数学教学大纲（草案）》（征求意见稿）的教学体系，结合现行统编教材编写的。各章配备的教材分析或经验文章一般概括了课本各章节的主要内容及其在初等数学中的地位和作用，提出了教学目的和要求，对重点和难点还配备了适当数量的教案，有的还对教材的结构作了分析，对教学

方法提出了一些宝贵的建议。教案多数比较详尽，从中不仅能看到作者课堂教学的全过程，而且还能看出作者的一些意图和想法，少数教案较略，但言简意明、脉络清楚、重点突出。总之，本书就如何通过课堂教学加强学生的基础知识，进行基本技能的训练以及培养学生的能力等方面各具特色，可供广大中学数学教师研究和参考。还需指出的是书中的文章与教案一般都对学生提出了较高的要求，读者在选作参考时，应结合自己的教学实践，而不能简单搬用。

本书共分六册出版。前三册为初中部分，后三册为高中部分。具体内容安排：第一册是初一代数；第二册包括初二、初三代数；第三册包括初二、初三几何，第四册包括高一、高二代数与三角；第五册包括高一、高二立体几何与解析几何；第六册为高三代数与微积分。

参加本书编辑工作的有罗小伟、彭文远、晨光、周耿等同志，最后由北京师范大学数学系钟善基、曹才翰先生审定。

由于水平有限，又兼仓促完稿，本书在内容的选材，文章与教案的安排以及文字的修饰等方面，还会存在许多问题，恳请同志们批评指正。

编 者

目 录

前 言

有理数

有理数的教学 曹才翰 (1)

初一代数概念教学的体会 沈淑镛 (23)

教案

相反意义的量、正数和负数 姚印发 (31)

数轴 吕胜贤 (34)

相反数和绝对值 吕胜贤 (37)

有理数大小的比较 吉 耳 (40)

有理数的加法 管莽祥 (46)

有理数的减法 管莽祥 (54)

有理数的乘方 漆士芳 冯灵音 (62)

整式的加减法

整式的教学 曹才翰 (67)

教案

用字母表示数 南京师院附中数学组 (81)

代数式 (一) 南京师院附中数学组 (86)

代数式 (二) 南京师院附中数学组 (91)

代数式的值 南京师院附中数学组 (95)

去括号 刘文志 (102)

合并同类项 刘文志 (108)

一元一次方程

关于一元一次方程的教学问题·····吴世煦 (117)

布列方程解应用题·····孙为曾 (134)

教案

等式·····苏炎 (152)

方程、方程的解·····苏炎 (155)

同解方程·····吴世煦 (157)

方程的第一个基本性质·····吴世煦 (160)

方程的第二个基本性质·····吴世煦 (163)

简单的一元一次方程解法·····卞学诗 尚振宇 (167)

一元一次方程应用题——起始课·····张鸿菊 (173)

一元一次方程应用题——行程问题·····张鸿菊 (178)

一元一次方程应用题——浓度问题·····张鸿菊 (183)

一元一次不等式

谈谈一元一次不等式的教学·····于良 (188)

教案

不等式及其性质·····吉耳 (195)

一元一次不等式的有关概念·····吉耳 (199)

一元一次不等式的解法·····吉耳 (205)

二元一次方程组

二元一次方程组教学的几点看法和建议·····潘仲贤 (209)

教案

二元一次方程·····江苏扬州鲁迅中学数学组 (233)

二元一次方程组·····江苏扬州鲁迅中学数学组 (237)

用代入法解二元一次方程组·····卞学诗 段炳燮 (244)

用加减法解二元一次方程组·····刘振山 (250)

二元一次方程组的应用题 (一) 陆 乘 (254)

二元一次方程组的应用题 (二) 陆 乘 (259)

整式的乘除法 (教案)

同底数幂的乘法 徐尔为 (265)

幂的乘方 徐尔为 (268)

积的乘方 徐尔为 (271)

单项式乘以单项式 陆文君 (274)

单项式乘以多项式 陆文君 (278)

分离系数法 喻绍梧 (283)

乘法公式、完全平方公式 晓 树 (288)

平方差公式 (一) 赵大文 (300)

平方差公式 (二) 赵大文 (304)

因式分解

因式分解的教学 晓 书 (308)

教案

因式分解的概念 郑学遐 (336)

提取公因式法 马正中 (341)

应用公式法 (一) 马正中 (345)

应用公式法 (二) 马正中 (349)

分组分解法 (一) 张寿椿 (353)

分组分解法 (二) 张寿椿 (356)

二次三项式的因式分解 (一) 张寿椿 (360)

二次三项式的因式分解 (二) 张寿椿 (365)

分式

分式的教学 曹才翰 (369)

教案

有 理 数

有理数的教学

一、教学特点与教学目的

1. 数系扩充的要求

从数学的角度看，数系扩充大致要有以下几个要求：

(1) 增添新的元素。

(2) 新旧元素在一起构成了新的数集。在新的数集里，定义一些基本关系(相等、不等)，和定义一些运算(主要是加法和乘法运算，把减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算)。

这些新的定义要满足下面三个要求：

① 在新的数集里，旧的运算关系仍旧保持。

② 使旧的数集里原有的一些主要性质(如加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、乘法对加法的分配律等)在新数集里保持。

③ 在解决实际问题中，原有数集用什么运算，在新数集中也用同样的运算。

(3) 新的数集解决了旧的数集所提出的问题。

总起来说，满足上面三条的，我们就说数集从原有的扩充到了新的数集。初中代数有理数集基本上是按照这个精神

从算术数集扩充来的。

但是中学课程里的有理数集有下面的一些特点：

① 本来作为规定的定义，直接给出就可以了，但在中学课本里有的没有明显地提出来（如减法为加法的逆运算）；有的为了帮助理解却用实例加以解释和说明（如有理数大小的比较的定义；加法定义等）。

② 本来作为需要证明的定理，或根本没有提出来，而暗中用了（如顺序律）；或只是提出来并不加说明或证明（如五条算律）；或只用具体例子说明或验证而不加证明（如去括号法则、除法法则）；或用实例来说明定理的内容（如减法法则）。

总之，中学课程里的有理数集，从数学的角度看，不用说明的地方作了说明，该证明的定理却不证明了。为什么有这样明显的区别呢？这是因为作为科学的数学，它的目的在于理论上的研究，侧重在数学的逻辑结构上的研究。而作为教学科目的数学，它的目的在于计算上的要求。事实也正是如此，课本中尽快地得出有理数的大小比较及运算的法则，要求学生运用这些法则熟练地去进行计算，而对于理论上的要求，不必要也不可能作如此高的要求，为了便于学生接受，就采用了上述教学法上的处理。尽管如此，应注意在科学性上我们可以放松要求，但不能与科学性相违背。例如，我们用大量的例子来说明算律的正确性，这仅仅是说明而不是证明，在教学中不要让学生产生这样的错觉，似乎要论证一个结论正确，只要举出几个例子说明它正确就可以了，对于这种非科学的态度，必须予以防止，否则对以后的学习将会造成很大的困难。

2. 关于扩充概念的教学

扩充概念的教学，在中学要遇到多次。如算术数集扩充到有理数集；有理数集扩充到实数集；正整数次幂逐步扩充到实数次幂；锐角三角函数扩充到任意角三角函数等等。

这些题材虽然各异，但在教学时总是要遵循下面几条：

(1) 为什么要在旧有的基础上加以扩充（即扩充的必要性）；

(2) 在把旧的概念扩充到新的概念时，必须指出新与旧的质的差异，明确区分新与旧的不同的意义（即新旧的区别性）；

(3) 待扩充完结以后，又必须指出过去旧的仅仅是新的一种情况，它们并不是互相排斥的（即新旧的联系性）。

以有理数这部分内容来说，关于第(1)条不会出现什么问题，只要从相反意义的量来引入负数即可。仅要求学生承认相反意义的量是大量存在的，且明确相反意义的含义。

关于后两条，需要深入地来分析一下：

在扩充概念的教学，一般来说，要分两次来克服学生的思维倾向，即从旧的引入新的时候，必须克服对旧有概念的思维倾向，这样才有可能掌握新与旧的质的差异。例如，过去在小学算术课中，学生对整数理解为正整数、零，但是在引入负数之后，这个整数概念也随之扩充为除了正整数、零以外，还包括负整数。又如在算术课中，乘法的意义是相同加数的简便算法，但在有理数范围内，乘法就有新的含义。如果我们对过去的习惯思考不加以“破坏”，那么对于新的概念就难以接受，甚至还要抵制新的概念，或者当时接受了（如果“破坏得”不彻底的话），以后在实际应用时又

会不自觉地流露出来以致产生错误。

另一方面，在建立新概念的过程中，常常是较多地强调新概念的特点（即新与旧的区别），这样，虽然旧的习惯思考被“破坏了”，而作为新概念特点的思考又作为学生当时的习惯思考了，因而在某种程度上它是排斥或抵制以前的（旧概念特点的）思考。

例如 $3-2$ ，在算术中，也就是按旧的习惯思考时，却是非常容易的，心算就可以得出它的结果。可是在讲有理数减法时，因经常强调的是减法法则，而把算术中的减法给“破坏了”。这样，当遇到 $3-2$ 就要“想一想”，或通过有理数减法法则去做，即在头脑中经过这样一番思考：“减一个正数就是加上这个正数的相反数”，即 $3-2=3+(-2)$ ，又转化为“异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并从较大的绝对值减去较小的绝对值”，这样才得到结果 1。经过这样一番周折当然是费事的，其原因就在于把旧的习惯思考给破坏了。为了使得学生在新概念中不排斥旧有的特点，在某种程度上还必须破坏这种习惯思考（即强调新与旧的统一）。

这就是有理数教学中的一个特点。

3. 教学目的

有理数是中学代数课的开始的课题，它是数学最基础的知识之一，如果学生不把有理数的知识学好并熟练地掌握有理数的运算，那么必然会严重地影响到代数式、解方程等方面的运算；同时也必然会影响到以后的与它有关的概念的掌握。为此，有理数这一章的教学目的应是：

(1) 使学生明确有理数、数轴、相反数和数的绝对值等概念，并能正确地比较两个有理数的大小。

(2) 使学生能正确熟练地掌握有理数四则运算的法则，同时还能运用有理数的运算性质简化运算过程。

我们前面已经讲过，中学讲有理数的重点是放在计算能力的培养上。为此，关于这方面我们再深入地分析一下：

计算题大致可以分为三大类：口算、笔算、工具算。教材对这三方面都比较重视（缺点是习题少了一些）。特别口算题对低年级学生来说，更应引起重视。因为简单的口算是较复杂的笔算的基础，正如小学中 20 以内加减法是作一切加减法的依据一样，非要脱口而出不可，否则会影响计算的正确性与速度。

计算能力的培养，其要求是下面两条：

(1) 准确

要计算准确，先要根据法则，按步就班，待熟练后，可灵活应用。初学时不仅要求学生算出答案，还要求学生说出根据是什么，复述运算中用到的相应的法则，这对提高学生的运算能力是有好处的。

学生经常套用法则，因而出现错误。如学了乘法以后，对于乘法的符号法则印象特别深刻，于是有的学生就把乘法符号法则错误地套用到加减法中去了。脱括号法则也是经常容易出错的。学生知道括号前是负号，脱括号时括号内各项要变号，但常常对第一项忘了变号。学生区分不清 $(a+b) \div c = a \div c + b \div c$ 和 $c \div (a+b) \neq c \div a + c \div b$ ，有的以为后者也是一个等式。在计算没有括号的算式时，若只有同级运算，应按从左到右的顺序依次计算，这是由于省略了括号的原故。如计算 $2-8+3$ ，这实际上是计算 $(2-8)+3$ ，而有的

学生先算加法，这样实际上是算 $2 - (8 + 3)$ ，这就错了，其原因是学生错误地认为只含加减的同级运算中，应先算加法，这恐怕与他机械地记着“先乘除后加减”有关。

关于计算能力方面，课本是作了一定注意的，如在习题中有意识地出了一些学生容易混淆的题，又如在各种运算之后，尽可能出些当时能计算的混合运算，逐步来提高他们的计算能力。在教学时，教师除充分运用这些材料之外，对学生可能产生的错误应作充分的估计，向全班分析学生的典型错误，对提高计算能力具有重要的意义。

(2) 迅速

计算准确是要求原则性，而计算迅速则要求灵活性。

怎样达到迅速？除在不增加学生负担的前提下，适当地多练一些以外，更重要的是会分析题的特点，并结合运算律等来简化运算。

课本在这方面反映得比较好。如

① 利用加法交换律与结合律，使计算简便。如加减分别合在一起算；有互为相反的数，或特殊数（分母相同）的可结合在一起算。

② 以一数为标准进行简便计算。这种算法便于心算也有实用价值。如某个商品单价为 0.97 元，计算买三个的价钱，心算时常用 $1.00 \times 3 - 0.09 = 2.91$ 元。

③ 利用分配律有时使算法简便。如 $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) \times 12$ ，但是应当指出象这类题只有在乘数与括号内各加数的分母能约的情况下才是方便的，否则并不方便。教学时还可补充类似 $8 \times 13 - 8 \times 17$ 这样的题，它可明显看出分配律在简

化计算时的作用。

二、教学要点

1. 正数与负数

负数的引入，虽然已是数的概念的第三次扩充，但较前二次扩充困难得多，其原因是：

(1) 负数的应用与学生日常生活的联系，不象零和正分数那样密切。例如“零上5度”与“零下5度”，“高出海平面5.2米”与“低于海平面3.6米”等等，这种在数的前面加上语言的叙述来表示相反意义的量，学生是习惯的，而把它说成 $+5^{\circ}\text{C}$ 与 -5°C ； $+5.2$ 米与 -3.6 米，反而认为太麻烦。再如，利用正负数把“收入”和“支出”统一地说成“收入”；把“上升”与“下降”统一地说成“上升”等等，更是与学生的常识不一致。

(2) 那些应用负数来解决的问题，学生认为用算术里的数同样可以解决。

因此思想上就容易产生为什么要引进这种新数的问题。为了解决这两个问题，可以采取如下的措施。

首先，从复习算术里的知识出发，把算术里学过的数作一次系统的整理。在这个基础上，教师可总结如下的一些问题：①数是由于解决实际问题的需要而产生并且由于实际的需要逐步发展的(结合自然数、零、正分数的产生来说明)。②在自然数、零、分数之间可以比较大小，可以进行加法、减法、乘法、除法等运算。利用这种关系和运算，我们可以用来解决许多实际问题。③但是，仅仅利用这些数是不够的，由于解决实际问题的需要，我们还要学习一种新的数。这样就可以转到负数的引入。

其次，关于负数的引入，首先可结合课本举出一些具有相反意义的量的实际问题，指出在实际生活中，存在着大量的具有相反意义的量，进而研究怎样用数来表示它。这里可采用下述过程：①首先指出：如果仍旧用算术里所学过的数来表示，那么必须用语言来指出它的方向（例如零上 5°C ，零下 5°C ）。②指出这种表达方法是很不方便的。但是如果不要数字前面的语言表达，只留下那个5，那么就区分不出它是零上还是零下，它们的意义就不清楚了，所以我们要引进一个新的数。③由此，引进表示相反方向的符号“-”。④归纳出负数的意义，即用以前学过的数（除零外）前面放上“-”号来表示，这种新数叫做负数，用它来表示负的量，与之对立，以前学过的数（除零外）前面放上“+”号，叫做正数，用它来表示正的量。正数前面的“+”号可省略不写，故以前学过的数（除零外）都是正数。⑤着重指出零既不是正数又不是负数。⑥举例巩固负数的概念，说明它在表达具有相反意义的量中的应用。

应当指出，课本中“象 $+5$ 、 $+8\frac{1}{2}$ 、 $+5.2$ 等带有正号的数叫做正数（正号也可省略不写）。象 -5 、 $-4\frac{1}{2}$ 、 -3.6 等带有负号的数叫做负数”这一段话是有前提的，即“+”、“-”号后面的数都是以前学过的除零以外的数，因此教学时就要有个分寸，不能笼统地说，带有正号的数是正数，带有负号的数是负数。因为这样会给进一步讨论字母表示数时带来困难。殊不知 $+a$ 未必是正数，而 $-a$ 也未必是负数，而这恰恰是学生最易出错的地方。

2. 有理数

有理数可以按二种不同的根据分类。可按整数与分数来分类；也可按正有理数、负有理数、零来分类。这两种分类方法都应让学生掌握，这样可以加深对有理数概念的理解。

关于有理数定义方面，学生经常发生如下的一些错误：

- (1) 有理数就是正数与负数；
- (2) 有理数就是负数（或负数就是有理数）；
- (3) 由正整数是有理数（对的）与有理数是正整数（错误），这两个判断区别不清而带来的错误。

这些错误产生的原因是：

① 对整数、正整数、负整数、自然数、零这些概念本身的关系搞不清，即对“整数包括正整数、负整数、零”（这里注意当引入负整数后，关于在算术中的整数概念的含义更广了）“正整数就是自然数（它不包括零）”等不清而引起的。

② 有理数定义是在负数引入后立即给出的，因此学生很自然地把负数与有理数联系在一起，因而出现了“有理数就是负数”这种错误。

③ 学生对于部分与整体的关系不清，即整体包括部分，部分并不等于整体的道理不清楚以致产生“正整数就是有理数，有理数也就是正整数”的错误。

针对以上情况，教学时应注意，在引入负数时，首先应结合回忆数的发展概况（这一点我们在前面已经指出过了），使学生彻底搞清自然数、整数、分数等概念和相互间的关系。同时在建立有理数概念时，选例要全面。叙述要严格（必须说负整数、负分数而不笼统地说负数）。

3. 数轴

讲授数轴的意义是很大的。通过它可以进一步巩固相反方向的意义（长度与方向）；便于讲相反数（即关于原点对称的点所表示的数）；有理数的大小比较可通过数轴直观表示等等。对以后教学来说，它是数形结合的基础（即由数找点、由点到数），隐含着进一步引入新数的必要（不是所有的数都可用有理点表示）。因此讲授有理数这一章时，一定要重视数轴的作用。

讲授时应注意以下几点：

（1）必须使学生明确构成数轴的三个要素——原点、方向、单位。它们是缺一不可的，缺少一个就不成其为数轴。

但是，在具体画图时，我们可以根据具体情况灵活选取。例如，若给出的数的绝对值较大时，那么我们可以选取较小的单位。又如，若给出的都是一些正数，那么原点并不一定选在表示数轴的线段的中点处，而可以选在一条射线的端点上等等。

这种原则性（三个要素缺一不可）与灵活性（具体问题具体分析）相结合的训练，在数轴教学时是不可缺少的。

此外，在选择例题和习题时，要注意选用的例题和习题，既要考虑全面（正整数、正分数、零、负整数、负分数），又要考虑容易画出和读作。例如要求学生画出 $-\frac{8}{23}$ 所表示的有理点，虽然从理论上来说这个点是存在的，但学生尚未学过比例线段，具体就不易画出。

（2）应该使学生在给出数轴的情况下，学会由数找点、由点到数的基本方法。

(3) 必须给学生以充分使用数轴的机会。特别是在有理数大小比较时，应该使学生具有每一抽象法则对应于数轴上是什么意义的生动形象，这样，一旦这些法则遗忘了，就可以借助于数轴在思维中恢复或澄清这些法则。

4. 相反数

相反数有下面几个定义：

(1) 绝对值相同、符号相反的两个数。

(2) 在数轴上，分别在原点的两旁，离开原点的长度相等的两个点所表示的数。

(3) $(+a) + (-a) = (-a) + (+a) = 0$ ， $+a$ 和 $-a$ 是互为相反的数。

定义(1)很简洁，但课本的绝对值定义中要用到相反数，这样，相反数就不能用绝对值来定义了，不然就要发生循环定义的毛病。

至于定义(3)，它反映的是有理数的本质特征之一，即在有理数集中，每个数都有一个加法逆元。利用它我们可以探索有理数加法定义的合理性问题。具体地说就是，对于两个正有理数相加，即 $(+a) + (+b)$ (a, b 表示算术里学过的数，下同)，这就是小学算术里学过的加法，我们仍规定 $(+a) + (+b) = +(a+b)$ 。

对于两个负有理数相加，即 $(-a) + (-b)$ 。如果我们要求有理数的运算也满足加法结合律、加法交换律、乘法结合律、乘法交换律、乘法对加法的分配律，以及满足相反数的特性，那么就应该有：

$$\begin{aligned} & [(-a) + (-b)] + [(+a) + (+b)] \\ &= [(-a) + (+a)] + [(-b) + (+b)] \end{aligned}$$