普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

实用工程数学

宣立新　朱卓宇　主编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材
（高职高专教育）

实用工程数学

宣立新　朱卓宇　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是我国普通高等教育“十五”国家级规划教材，是教育部新世纪高职高专教育的教改项目《高职高专教育数学课程教学内容体系改革、建设的研究与实践》的主要成果之一。

本书是根据编者多年的教学，按照新世纪高职高专培养技术应用性人才的要求编写的。本书共分三篇，第一篇：线性代数；第二篇：概率论与数理统计；第三篇：数学软件在工程数学中的应用。

本书内容少而精，通俗易读，便于教，便于学，便于用。可作为高职高专、成人教育理、工、农各类各专业教材，也可作为技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

实用工程数学/宣立新，朱卓宇主编. —北京：高等教育出版社，2003.12

ISBN 7-04-013161-7

Ⅰ.实... Ⅱ.①宣...②朱... Ⅲ.工程数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 099612 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2003 年 12 月第 1 版
印　　张	14.25	印　　次	2003 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	340 000	定　　价	15.40 元

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》（教高司[2000]19号），提出了“力争经过5年的努力，编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用2至3年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用2至3年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从2000年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》（草案）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（草案）编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材（高职高专教育）适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002年11月30日

前　言

本书是我国普通高等教育“十五”国家级规划教材，是教育部新世纪高职高专教育的教改项目《高职高专教育数学课程教学内容体系改革、建设的研究与实践》（以下简称《研究与实践》）的主要成果之一。

教育部教改项目《研究与实践》通过调查研究，制定了《高职高专线性代数教学基本要求》、《高职高专概率论与数理统计教学基本要求》，这两个基本要求都体现了在高等教育大众化的新形势下，为培养技术应用性人才在线性代数、概率统计方面必备的基础知识。本书是根据这两个基本要求编写的，力求做到内容少而精，通俗易读，便于教，便于学，便于用。本书具有以下特点：

1. 线性代数部分注意几何背景，其主要内容以矩阵的初等行变换为主线，避免复杂的理论和方法。如方阵的伴随矩阵在基本要求已不作要求，关于逆矩阵的性质和计算方法都用初等行变换处理。

2. 概率论与数理统计部分注意弱化概率，强化统计，让学生了解重要分布的背景，突出统计思想，强化应用。学生学习概率统计以后，能够掌握常用的统计方法。

3. 数学软件在工程数学中的应用部分介绍了利用数学软件在线性代数和概率论与数理统计中的使用方法，便于有条件的学校使用，以引导学生重视概念等基础知识的学习和注意提高解决实际问题的能力，而不追求运算技巧。

本书考虑到某些专业教学的需要，把有些不在教学基本要求内的部分也编在书中并打上 * 号，这部分也可作为学生自学使用。讲解书中不打 * 号的内容，线性代数部分 18 学时左右，概率论与数理统计部分 28 学时左右，讲解打 * 号的内容，则要另加课时。

各章配有思考题和习题，书末附有思考题和习题答案。

本书第一篇由南京师范大学宣立新教授、南京林业大学施建兵副教授、北京联合大学戈西元副教授编写；第二篇由南京师范大学朱卓宇副教授、冯玉英老师、北京联合大学范淑香老师编写；第三篇由戈西元、施建兵编写。其中线性代数部分由宣立新主编，概率论与数理统计部分由朱卓宇主编。

本书的讨论稿经《研究与实践》的项目组审稿，项目组的同志提出了许多改进意见，特别是北京联合大学任开隆教授、承德石油高等专科学校侯风波教授，在此，我们向他们表示衷心的感谢。北华大学的杜忠复教授审阅了全部书稿，提出了不少宝贵意见，我们向杜教授深表谢意。

由于我们的水平有限，对书中不妥之处敬请各位专家、同行和读者批评指正。

编　者

2003.8

参考书目

1 同济大学数学教研室.线性代数.第三版.北京:高等教育出版社,1999
2 彭玉芳,尹福源,沈亦一.线性代数.第二版.北京:高等教育出版社,1999
3 钱椿林.线性代数.北京:高等教育出版社,2000
4 许承德,王勇.概率论与数理统计.北京:科学出版社,2001
5 常柏林,李效羽,卢静芳等.概率与数理统计.第二版.北京:高等教育出版社,2001
6 金炳陶.概率论与数理统计.北京:高等教育出版社,2000
7 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.第二版.北京:高等教育出版社,1989
8 全国化工系统高校数学协作组编.概率统计.郑州:河南科学技术出版社,1992
9 张学元编.概率论与数理统计能力试题题解.武汉:华中科技大学出版社,2001

购书请拨打电话：(010)64014089　64054601　64054588

策划编辑　蒋　青

责任编辑　薛春玲

封面设计　杨立新

责任绘图　郝　林

版式设计　陆瑞红

责任校对　康晓燕

责任印制　杨　明

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论与数理统计

第三篇 数学软件在工程数学中的应用

附 录

参考书目

第一篇

线性代数

第一章

行　列　式

行列式是一种常用的基本的数学工具.本章结合平面上两条直线位置关系的讨论,即二元一次方程组解的问题,引入二阶行列式并进而介绍三阶行列式的概念及其性质,在此基础上介绍 n 阶行列式的基本知识及在解线性方程组中的一种重要应用.

§1　行列式的概念、性质及其计算

在中学数学里已经知道,x、y 的任意一个二元一次方程的图形都是一条直线,并可用代数的方法讨论两条直线的位置关系.为了与以后讨论 n 个未知数的线性方程组的形式相一致,设

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

分别是直线 l_1,l_2 的方程,如果 l_1 与 l_2 相交,则它们交点的坐标即方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

的解.

利用消元法,在 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

为了将解(2)用易于记忆的方式书写,下面引入二阶行列式的概念.

一、二阶和三阶行列式

定义 1　$a_{ij}(i,j=1,2)$是已知的常数,规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

并称左式为二阶行列式,每个横排称为行列式的行,每个竖排称为行列式的列,$a_{ij}(i,j=1,2)$称为该二阶行列式的元素,它位于行列式的第 i 行、第 j 列处.

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$， $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$， $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

若 $D\neq 0$，则方程组(1)的解(2)可用行列式表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \tag{4}$$

设 l_1，l_2 是两条不同的直线，由中学数学知：

若 $D=0$，即$\dfrac{a_{11}}{a_{21}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$(分母为零时，相应的分子也为零)，则 $l_1 /\!/ l_2$，从而方程组(1)无解.

若 $D\neq 0$，则 l_1 与 l_2 相交，方程组(1)有惟一解，即它们交点的坐标如(2)式或(4)式所示.

由以上的讨论可得以下重要结论：

定理 1 二元一次方程组(1)有惟一解的充分必要条件是行列式 $D\neq 0$.

例 1 结合几何意义，讨论下列方程组解的情况；有解时，求出它的解.

(1) $\begin{cases} 2x_1-x_2=3, \\ x_1+2x_2=-1. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1-x_2=3, \\ -10x_1+5x_2=8. \end{cases}$

解 (1) 由于 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-(-1)\times 1=5\neq 0$,

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3\times 2-(-1)\times(-1)=5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2\times(-1)-3\times 1=-5,$$

因此，该方程组对应的两条直线相反，方程组有解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$， $x_2=\dfrac{D_2}{D}=-1$.

(2) 由于 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 5 \end{vmatrix}=0$，可知直线 l_1 与 l_2 的斜率相等，又两个方程的常数项与未知数的系数不成比例，因此该方程组对应的两条直线互相平行，无公共点，从而方程组无解.

与讨论方程组(1)的解相类似，可用消元法讨论如下的三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

的解.

方程组(5)的解是否存在，涉及到和式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

是否为零.

为便于讨论，引进三阶行列式的概念.

定义 2 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$是已知的 3^2 个常数，规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{6}$$

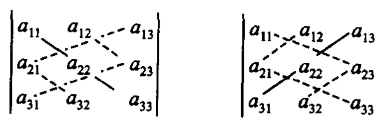
并称(6)的左式为三阶行列式;a_{ij} $(i,j=1,2,3)$称为该三阶行列式的元素,位于行列式的第 i 行,第 j 列处. 在(6)式的行列式中连接 a_{11} 与 a_{33} 的线称为三阶行列式的主对角线,连接 a_{13} 与 a_{31} 的线称为次对角线. 对每个元素 a_{ij},划去三阶行列式的第 i 行和第 j 列后得到的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij};称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq 0$ 时,用消元法解方程组(5)可得惟一解:
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases}$$

用(6)计算三阶行列式(设为 D)不便于记忆,下面介绍常用的两种方法:

方法一(对角线法),(6)式中有三项的符号是正的,其中的一项是位于主对角线上三个元素的乘积;其他两项中的每一项都是位于主对角线的一条平行线上的两个元素与次对角线上的一个元素的乘积(如图 1-1-1(a)). 利用次对角线,如图 1-1-1(b)可以类似地得到(6)式中有负号的三项.



(a) (b)

图 1-1-1

方法二(降阶法),由二、三阶行列式的定义可知,三阶行列式 D 可按它的任一行用如下的方法展开,按第 i 行$(i=1,2,3)$展开时,D 等于它的第 i 行的每个元素 a_{ij} 与其代数余子式的乘积 $a_{ij}A_{ij}$ $(j=1,2,3)$的和,即
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}\left(=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\right). \tag{7}$$

三阶行列式 D 也可按它的任一列,如第 j 列$(j=1,2,3)$展开为
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}\left(=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\right). \tag{8}$$

由(7)、(8)两式可见,用降阶法计算三阶行列式时,选择零元素最多的行(或列)来计算比较简便.

对降阶法,下面按第一行展开来给出证明,即证明
$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$
事实上
$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.
\end{aligned}
$$

例 2 计算行列式

$$
D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.
$$

解一 用对角线法，有

$$
\begin{aligned}
D &= 2\times 0\times 3 + 1\times 1\times 1 + 0\times(-1)\times(-1) - 0\times 0\times 1 \\
&\quad - 2\times 1\times(-1) - 1\times(-1)\times 3 = 1 + 2 + 3 = 6.
\end{aligned}
$$

解二 用降阶法，按第一行展开

$$
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 - (-4) = 6.
$$

二、n 阶行列式

我们已经知道了二阶、三阶行列式，下面用递归法定义 n 阶行列式.

定义 3 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 $n^2(n\geqslant 2)$ 个数排列成 n 行 n 列（横排称行、竖排称列），并在左、右各加一条竖线所成的算式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

称为 n 阶行列式，通常记为 D. 位于第 i 行第 j 列的数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为该行列式的元素. n 阶行列式是一个按以下的运算关系，对 n^2 个数运算得到的数.

当 $n=2$ 时，按前面定义的二阶行列式计算.

当 $n>2$ 时，设 M_{ij} 为由 n 阶行列式 D 划去第 i 行和第 j 列后余下的元素，按原来的位置构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.

定义

$$
D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}\left(= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}\right). \tag{9}
$$

例 3 计算四阶行列式

$$
D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.
$$

解 由 n 阶行列式的定义

$$D_4=0\cdot A_{11}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0&3\\-1&1&2\\1&3&0\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1&3\\-1&0&2\\1&-1&0\end{vmatrix}$$

$$+2\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=0+24+9-12=21.$$

在 n 阶行列式中连接 a_{11} 与 a_{nn} 的线称为 n 阶行列式的主对角线，如果在主对角线上（下）方的元素全为零，则称此行列式为下（上）三角行列式.

必须指出，对于四阶及四阶以上的行列式的计算不再有对角线法，只能按(9)用降阶法.

例 4 计算下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式的定义，按(9)式可用归纳法得到

$$D_n=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}D_{n-1}$$

$$=a_{11}a_{22}D_{n-2}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

三、行列式的性质

定义 4

若 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，则称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

以下设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，可以通过计算验证，三阶行列式有以下性质：

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 说明了行列式的行与列的地位具有对称性，从而行列式对行成立的性质，对列也成立. 因此以下只写出行列式关于行的性质.

性质 2 互换行列式中的任意两行，行列式仅改变符号.

由性质 2 可得

推论 如果行列式有两行的对应元素相同，则这个行列式等于零.

性质 3 把行列式的某一行的每个元素同乘以数 k，等于以数 k 乘行列式.

如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 4 将行列式某一行的各元素都乘以同一常数后加到另一行的对应元素上去(简单地说,常数乘某一行加到另一行),则行列式的值不变.

性质 5 (拉普拉斯(Laplace)定理) 三阶行列式等于它的任一行的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,3). \tag{10}$$

性质 5 的(10)式以后常称为行列式按第 i 行的展开式.

必须强调指出,三阶行列式的以上性质及推论对一般的 n 阶行列式都成立,且这些性质关于列也都成立,这里不再一一列出.

四、行列式的计算

前面介绍了四阶及四阶以上的行列式可用降阶法计算,由拉普拉斯定理可见,利用行列式的性质,使行列式的某行(列)除某个元素外,其余元素都化为零,将大大简化行列式的计算.

为了便于书写,我们约定 r_i 表示第 i 行,c_j 表示第 j 列.

$r_i \longleftrightarrow r_j$ 表示交换第 i、j 两行,$c_s \longleftrightarrow c_t$ 表示交换第 s、t 两列;

kr_i 表示 k 乘第 i 行各元素、kc_j 表示 k 乘第 j 列各元素;

$r_j + kr_i$ 表示 k 乘第 i 行各元素加到第 j 行的相应元素上,$c_t + kc_s$ 表示 k 乘第 s 列各元素加到第 t 列的相应元素上.

例 5 计算上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 由 D 的转置是下三角行列式和例 4 可知:

$$D = D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times (-1) = -6.$$

例 6 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$