高等学校试用教材

实变函数与泛函分析概要

第一册

郑维行 王声望 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

实变函数与泛函分析概要

第一册

郑维行 王声望 编

人民教育出版社

内 容 提 要

全书共有八章，分两册出版．第一章集与点集，介绍了集的运算与势、序集的概念，讨论了欧几里得空间中开集、闭集的性质．第二、三章讲测度论，讨论了可测集与可测函数的性质，并介绍环上测度的建立思想．在此三章的基础上讲L积分(第四章)，建立了L控制收敛定理、傅比尼定理、微分与积分的联系．第五章讨论L^p空间的特性如完备性、可分性等，还包括傅立叶变式概要．以上五章构成本书的第一篇．第二篇共有三章，内容是距离空间、赋范线性空间及线性算子、希尔伯特空间及自伴算子．各章均附有一定数量的习题．

本书可作为综合大学数学、计算数学专业的教材，高等师范院校也可参用．

高等学校试用教材
实变函数与泛函分析概要
第 一 册
郑维行 王声望 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
上海市印刷三厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 6 字数 144,000
1980 年 1 月第 1 版 1980 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—13,500

书号 13012·0433 定价 0.46 元

序　言

本教材是我们在南京大学数学系多年教学的基础上产生的，这次编写时又增加了若干新内容．全书共分两篇．第一篇介绍实变函数论，内容包括点集、测度与可测函数，L积分以及积分序列的极限的三大定理与傅比尼定理等．以勒贝格积分理论为重点，采用内、外测度的方法构造点集的测度，用简单函数的积分引进L积分，以期符合由浅入深、由特殊到一般的认识规律．L^p空间专列一章，其中还包括在应用上极为重要的傅立叶变式，为过渡到第二篇提供典型的例子．第二篇讲述泛函分析的一些基本内容．如距离空间、赋范线性空间、希尔伯特空间等概念，线性分析的几条基本定理，全连续算子的黎斯-邵德尔理论，完备内积空间中有界自伴算子的谱论初步．书中给出不少例子以说明基本概念．为了使学生了解本学科中抽象的必要性与应用的广泛性，我们曾作了一定的努力．鉴于本课程是一门重要基础课，在数学教学中具有承上启下的作用，所以我们安排了某些内容，如微分与积分、L积分与R积分的比较、压缩映象原理等，以便与数学分析、代数、方程等相联系；同时，还适当介绍了有关序集、抽象测度、LS积分概念、拓扑空间大意等内容，为感兴趣的读者进一步学习近代数学与近代物理打下基础．各章末均附有习题，以供教学时选用．

本教材是为综合大学数学系同名课程而试编的，估计一学年126学时左右可以讲完（主要内容），如果只安排一学期72学时的，则可选用第一章到第六章的基本内容．进修班、高等师范院校也可参考使用．

教材初稿曾得到程其襄教授、严绍宗、王斯雷副教授、张奠宙、徐荣权、俞致寿等同志的细心审查与认真讨论，曾远荣、江泽坚、夏道行教授专门阅览了手稿，他们都提出了许多宝贵意见，编者基本上都采纳了；函数论教研室的马吉溥、苏维宜、任福贤、何泽霖、宋国柱、王巧玲、王崇祜、华茂芬等同志协助阅读手稿，并参加了部分修改工作．编者在此谨对他们致以衷心的感谢．由于我们水平所限，加之时间仓促，书中错误在所难免，希望专家与同志们多多给予指正．

编　者

1978年10月于南京

目　录

第一篇

第一章　集与点集

第二章　勒贝格测度

第三章　可测函数

第四章 勒贝格积分

第五章 函数空间 L^p

附：第二册目录

第二篇

第六章 距离空间

第七章 赋范线性空间及线性算子

第八章 希尔伯特空间及自伴算子

第 一 篇

第一章 集与点集

数学分析中最重要的概念之一是黎曼(B. Riemann)积分. 从黎曼积分的记号$\int_a^b f(x)dx$可以看出，它含有两个要素及一个运算，即积分区间$[a, b]$、被积函数$f(x)$与积分运算. 本篇的中心内容是勒贝格(H. Lebesgue)积分，它的记号是$\int_E f(x)dm$，这里E是欧几里得(Euclid)空间的点集，不必是区间，$f(x)$是可测函数，而积分运算依赖于所考虑的测度m. 它是近代积分论中最重要的一种积分，讨论这种积分不仅是为了推广黎曼积分，而且是由于它本身在运算上的灵活性，并为进一步学习近代数学打下基础. 此外，数学分析中的一些重要结果也从而得到比较精确的说明. 当然，这种积分理论的产生自有它的实际背景. 我们将按照集合、可测集与可测函数、积分的次序来讨论，把有关积分的各个环节逐个弄清楚，进而掌握积分的完整概念.

§1. 集合及其运算

集合或集是数学中的一个基本概念. 本书所研究的集合，均指具有确定内容或适合一定条件的事物的全体. 构成集合的这些事物称为集合的元素或元. 元与集的关系是个别与整体的关系，是矛盾的两个对立面. 例如，一个圆周上的点的全体成一集合，它

的元是点. 以实数为系数的多项式全体成一集合, 它的元是多项式.

又如, 直线上的一切开区间 (a, b) 成一集合(或称类), 这集合的元是开区间. 实轴上满足 $|\cos x|\geqslant 1/2$ 的点 x 构成一集合; $[0,1]$上一切连续函数构成一集合, 等等.

本书常用拉丁文大写字母 A, B 等表示集, 用小写字母 a, b 等表示集的元.

现在我们引进有关集的一些简单概念或术语. 设 A 是一个集, a 是它的元, 就写为 $a\in A$, 读作 a 属于 A, 它的意义与 A 含有 a 相同. 若 a 不属于 A, 就写为 $a\overline{\in} A$ 或 $a\notin A$.

若集 A 的元只有有限个, 则称 A 为有限集. 不含任何元的集称为空集, 常用 $\emptyset$ 表示. 一个非空集, 如果不是有限集, 就称为无限集.

某些集之间可以有种种关系或性质. 最基本的关系要算"包含"与"相等". 设 A, B 是两个集, 若 A 的每个元都属于 B, 则称 A 是 B 的子集, 记成 $A\subset B$ 或 $B\supset A$, 读作 A 含于 B 或 B 包含 A. 若 $A\subset B$ 且至少有一个元素 $x\in B$ 而 $x\overline{\in} A$, 则称 A 是 B 的真子集. 为方便起见, 规定空集 $\emptyset$ 是任何集的子集. 设 A, B 是两个集, 若同时有 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 成立, 则称 A 与 B 相等, 记成 $A=B$.

设给定一集 A 与一性质 π. 我们常用记号

$$\{a:\ a\in A,\ \pi(a)\}$$

表示 A 中一切具有性质 π 的元 a 所成的集, 有时简记成 $A\{\pi(a)\}$. 例如, 上面提到的一个例子可以写成 $A\{|\cos x|\geqslant 1/2\}$, 这里 $A=(-\infty,\ \infty)$. 关系式 $\{a:a\in A,\ \pi_1(a)\}\subset\{a:a\in A,\ \pi_2(a)\}$ 的意义是: 由性质 $\pi_1(a)$ 可以推出性质 $\pi_2(a)$ $(a\in A)$.

下面引进集的运算.

定义 1.1 设 A, B 是两个集. 由 A 中的元以及 B 中的元全

体所成的集称为 A, B 的并，记成 $A\cup B$(图 1)；由同时属于 A 与 B 两者的那些元所成的集称为 A 与 B 的交，记成 $A\cap B$ (图 2)．由属于 A 而不属于 B 的那些元所成的集称为 A 与 B 的差，记成 $A-B$(图 3)． 当 $B\subset A$ 时，差集 $A-B$ 又称为 B 关于 A 的补集，记成 $\mathscr{C}_A B$．并集与交集的概念可以推广到任意个集的情形．设 $\{A_\alpha,\ \alpha\in I\}$ 是一组集，这里 I 是指标集，α 在 I 中取值，那么它们的并与交分别定义为：

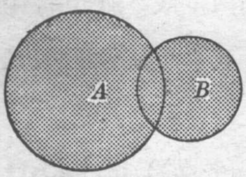

图1　$A\cup B$

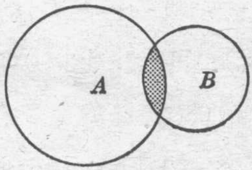

图2　$A\cap B$

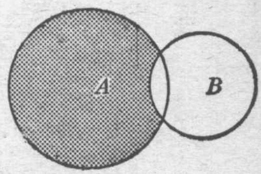

图3　$A-B$

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=\{a:\ \text{有某个 } \alpha\in I,\ \text{使 } a\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{a:\ \text{对一切 } \alpha\in I,\ \text{有 } a\in A_\alpha\}.$$

我们建立下列定理．

定理 1.1　对于集 E 与任意一组集 $A_\alpha,\ \alpha\in I$，恒有分配律

$$E\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha).$$

证　任取 $x\in E\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$，则 $x\in E$ 且 $x\in\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$．于是知 $x\in E$ 且 x 属于某个 A_α，对于这个 α，有 $x\in E\cap A_\alpha$，从而更有 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$，这就证明了 $E\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$．

反之，设 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$，则 x 属于某个 $E\cap A_\alpha$．从而 $x\in E$ 且 $x\in A_\alpha$ (对于这个 α)，故更有 $x\in E$ 且 $x\in\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$．这证明了 $\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)\subset E\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$．

由所得两步结果便证明了定理中的等式．

当我们在研究一个问题时，如果所考虑的一切集都是 X 的子集，这时便称 X 为基本集．例如限制在数直线上研究各种不同的点集，那么数直线是基本集．对于任一基本集 X，差集 $X-A$ 称为 A 关于 X 的补集或简称为 A 的补集，记成 $\mathscr{C}A$.

定理 1.2 对于基本集 X 中的并集与交集的补集运算，有

(i) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$,

(ii) $\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$.

证 设 $x\in\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)$，则 x 不属于任何 A_α，故 x 属于每个 $\mathscr{C}A_\alpha$. 因此 $x\in\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$. 可见 $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$. 同理可证 $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)\supset\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$. 故得(i).

由(i)取补集，得 $\mathscr{C}(\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha))=\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha))$，即 $\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha=\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha))$，再把 A_α 换成 $\mathscr{C}A_\alpha$，即得(ii).

所证定理常称为笛摩根(De Morgan)法则．它提供一种对偶方法，能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去(参看后面的定理 3.3 与 3.5).

§2. 映射·集的对等·可列集

本节首先把函数的概念加以推广．我们知道数学分析中所讲的函数可以看成是数集与数集之间的一种对应关系，或数集到数集的映射．一般化后，得到下面的概念．

定义 2.1 设 A, B 是两个非空集．若依一定的法则 f，对每个 $x\in A$，在 B 中有一个确定的元 y 与之对应，则称 f 是定义在 A 上而在 B 中取值的映射①，记成 $f: A\to B$，并将 x 与 y 的关系写成

① 若两个法则 f 与 g 有同一效果，即 $f(x)=g(x)$，$x\in A$，则它们表示同一的映射．

$y=f(x)$. 我们称 A 为 f 的定义域, $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ 为 f 的值域.

设给定映射 $f:A\to B$ 而 $B=f(A)$. 就是说, f 的象充满整个 B. 如果对每个 $y\in B$, 仅有唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$, 则说 f 有逆映射 f^{-1}, 它是定义在 $f(A)$ 上而取值于 A 上的映射. 当映射 $f:A\to f(A)$ 有逆映射时, 则称 f 是一一映射.

设给定两映射 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 则映射 $gf:A\to C$ 由关系式 $(gf)(x)=g(f(x))\,(x\in A)$ 定义. 设 $B_0\subset B$, 用记号 $f^{-1}(B_0)$ 表示 B_0 在映射 f 下的原象, 即 $f^{-1}(B_0)=\{x:x\in A,\ f(x)\in B_0\}$. 容易验明, 若 $B_0\subset B$, $A_0\subset A$, 则一般有

$$f(f^{-1}(B_0))\subset B_0,\quad f^{-1}(f(A_0))\supset A_0.$$

定义 2.2 设 A, B 为两个集, 如果有一一映射 f 存在, 使 $f(A)=B$, 则称 A 与 B 成一一对应. 当 A 与 B 一一对应时, 称它们互相对等, 记成 $A\sim B$.

对等概念对于研究无限集是十分重要的. 关于对等, 易见有下列性质:

(i) 自反性. $A\sim A$,

(ii) 对称性. 若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$,

(iii) 传递性. 若 $A\sim B$, $B\sim C$, 则 $A\sim C$.

由对等的意义可知, 当两个有限集互相对等时, 它们的元素个数必相同. 至于无限集, 采用元素个数一词就不适宜, 但对等的概念仍然可用. 粗略地说, 可以用对等的概念对两个无限集的元的“个数”进行比较.

在所有无限集中, 自然数集是最简单的一个. 任何一个集, 如果它与自然数集对等, 就称为可列集. 换句话说, 可列集的一切元可以用自然数编号, 使之成为无穷序列的形式: $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$.

要举出一些可列集的例子是不困难的. 例如全体正偶数依 $2n \leftrightarrow n$ 对应的方式与自然数集成一一对应，因而是可列集. 一切整数所成的集也是可列集，它可以用下列办法作成与自然数集一一对应：

$$0 \leftrightarrow 1, \quad (-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2}\right] \leftrightarrow n, \quad n=2, 3, 4, \cdots,$$

其中记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

再举一个稍为复杂的例子：一切有理数组成的集是可列的. 其实，把非零的有理数 a 写成既约分数的形式 $a=p/q$, $q>0$, $p\neq 0$. 把和 $n=|p|+q$ 称为 a 的“模”. 现规定 0 的模为 1，很明显，模为 n 的有理数的个数是有限的. 于是把一切有理数按模递增编组，其模相同的编在同一组里，最后再依次把这些有理数逐个编号，但重复者除去不计. 这样，每一个有理数得到了一个确定的号码. 因而建立了有理数集与自然数集之间的一一对应，这就证明了有理数集的可列性.

不难看出，可列集的子集至多是可列的. 由此推知，直线上一类互不相交的开区间集或是可列集或是有限集. 其实，在每个区间中取一有理数与这个区间对应，则不同区间就对应于不同的有理数，故所述开区间类与有理数集的一子集对等.

可以断言，可列集是无限集中“元素个数最少”的一类集. 这句话的含义是：任何无限集必含有可列子集. 其实，设 A 是一无限集，可以从 A 中取出一个元 a_1. 由于 A 为无限集，$A-\{a_1\}$ 非空，从而可从其中取出一个元 a_2. 同理，又可从 $A-\{a_1, a_2\}$ 中取出 a_3，等等. 按归纳法，可得出 A 的一个可列子集 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$.

关于可列集，我们仅提出下列定理.

定理 2.1 可列个可列集的并集是可列的.

证 设 $A_k(k=1, 2, \cdots)$ 是可列集，把它们的元分别写出来：

$$
\begin{array}{l}
A_1=\{a_1^{(1)}\rightarrow a_2^{(1)}\quad a_3^{(1)}\rightarrow a_4^{(1)}\cdots\} \\
\\
A_2=\{a_1^{(2)}\quad a_2^{(2)}\quad a_3^{(2)}\quad a_4^{(2)}\quad\cdots\} \\
\\
A_3=\{a_1^{(3)}\quad a_2^{(3)}\quad a_3^{(3)}\quad a_4^{(3)}\cdots\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_k=\{a_1^{(k)}\quad a_2^{(k)}\quad a_3^{(k)}\quad a_4^{(k)}\cdots\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad\cdots
\end{array}
$$

令 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. 我们把 S 中的元如上表那样依箭头指向的顺序排列，即先写 $a_1^{(1)}$，再写 $a_2^{(1)}$ 与 $a_1^{(2)}$，此时 a 的上下附标之和等于3，再写 $a_1^{(3)}$，$a_2^{(2)}$，$a_3^{(1)}$，此时 a 的上下附标之和等于4，如此一直进行下去，得到

$$S=\{a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ a_1^{(2)},\ a_1^{(3)},\ a_2^{(2)},\ a_3^{(1)},\ \cdots\}.$$

如有必要，依次除去重复的元(保留一个)，即可看出 S 的元能用自然数编号，因而与自然数集对等.

下面定理说明不可列集是存在的.

定理 2.2 区间 $[0,\ 1]$ 中的点是不可列的.

证 用反证法. 假定 $[0,\ 1]$ 中的点可列，把 $[0,\ 1]$ 中一切点编号为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots.$$

把闭区间 $[0,\ 1]$ 三等分，则显见 $[0,\ 1/3]$ 与 $[2/3,\ 1]$ 中总有一个区间不含有 x_1，用 I_1 表示这个闭区间. 把 I_1 三等分，在它们的左与右两个闭区间中总有一个不含有 x_2，用 I_2 表示这个闭区间. 同样，把 I_2 三等分，可得不含有 x_3 的一个闭区间 I_3，等等. 据归纳法，便得到一列闭区间 $\{I_n\}$. 由作法知，

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots,$$

且
$$x_n\notin I_n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

由于 I_n 的长度为 $\frac{1}{3^n}$ 趋于 0，故据分析中区间套定理，存在点 $\xi\in I_n(n=1, 2, 3, \cdots)$. 由于 $x_n\overline{\in} I_n$，故 ξ 不会是任一 x_n，但 ξ 又是 $[0, 1]$ 中的点，出现了矛盾．这表明 $[0, 1]$ 中的点是不可列的．

§3. 一维开集、闭集及其性质

以下专论欧几里得空间中的点集（简称点集），这在数学分析中已有所了解．前面两节中关于集合的一般结果，自然对点集也适用，这里将进一步讨论点集所特有的一些性质．由于一维欧几里得空间比较简单，且具有自身的特性，故特先提出讨论．下面的讨论虽然在本质上对多维也适用，但读者初学时，不妨先从一维情形来理解，以后再理解多维的情形，就不发生困难了．

用 R 表示一维欧几里得空间，先引进点集的一些基本概念．

定义 3.1 设 E 为 R 中的一点集，$a\in R$. 则含有 a 的任一开区间称为 a 的邻域．对于 E 中一点 a，如果存在 a 的某个邻域 (α, β)，整个含于 E 内，这时 $a\in(\alpha, \beta)\subset E$，则称 a 为 E 的内点，因而 E 的内点必属于 E. 若 E 的每一点都是 E 的内点时，则称 E 为开集．

开区间 (α, β)，空集以及 R 本身都是一维开集的例．

定理 3.1 开集有下列性质：

(i) 任意个开集的并是开集，

(ii) 有限个开集的交是开集．

证 (i) 设 G_α, $\alpha\in I$ 是一组开集．令 $G=\bigcup G_\alpha$. 任取 $x\in G$（若 $G=\emptyset$，不须证明），则有某个 $\alpha_0\in I$，使 $x\in G_{\alpha_0}$. 故 x 是 G_{α_0} 的内点，从而更是 G 的内点．故 G 是开集．

(ii) 设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 为开集，令 $G=\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$. 任取 $x\in G$（若

$G=\emptyset$，不须证明，这一注解对以后恒适用)，则对每个 $k=1, 2, \cdots, n$ 有 $x\in G_k$. 于是有 x 的邻域(α_k, β_k)使

$$x\in(\alpha_k, \beta_k)\subset G_k, \quad k=1, 2, \cdots, n.$$

令 $(\alpha, \beta)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k, \beta_k)$，那么它是 x 的非空邻域，且整个含于 G 内，故 x 为 G 的内点，这就证明了 G 为开集.

注意，无限个开集的交不一定是开集. 例如，令 $G_k=(-1/k, 1/k)$，$k=1, 2, 3, \cdots$，则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k=\{0\}$，不是开集.

注 通常说对 R 赋予一种拓扑，就是指给定了 R 的一个开集类，使 $\emptyset$, R 为开集以及定理 3.1 中所指的条件(i)与(ii)满足. 而 R 在所给拓扑(开集类)下成为拓扑空间.

定义 3.2 设 E 为 R 中的一点集，$a\in R$. 若 a 的任一邻域均含有 E 中除 a 以外的一点，则称 a 是 E 的聚点.

注意，E 的聚点不一定属于 E.

显然，若 a 是 E 的聚点，则含 a 的任何区间(即 a 的邻域)均含有 E 的无穷多个点. 因为，假如不然，a 的某个邻域 (α, β) 只含 E 的有限多个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的话，不妨设它们均与 a 不同，令 $\delta=\min\{|a-\alpha|, |a-\beta|, |a-x_1|, \cdots, |a-x_n|\}$，则 a 的邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ $(\delta>0)$将不含 E 中异于 a 的任何点，这与 a 是 E 的聚点相矛盾.

例 1 设 $E=\{1, 1/2, 1/3, \cdots\}$，则原点是 E 的唯一聚点，且不属于 E. 又闭区间$[a, b]$的任一点均是区间 $E=(a, b)$的聚点.

在讨论聚点时，引用下述性质有时是方便的：a 为 E 的聚点的充要条件是，E 中有点列$\{a_n\}$ $(a_n\neq a)$收敛于 a. 其实，充分性由聚点定义是一望而知的. 现证必要性. 设 a 是 E 的聚点. 先在邻域$(a-1, a+1)$中选取一点 $a_1\in E$, $a_1\neq a$，再在邻域$(a-\delta/2, a+\delta/2)$中选取一点 $a_2\in E$, $a_2\neq a$，这里 $\delta_1=|a-a_1|$，一般地，在邻域