中国科学院科学出版基金资助出版

纯粹数学与应用数学专著　第39号

# 多复变数的凸映照与星形映照

(第二版)

龚　昇　著

科学出版社

北　京

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了作者及其合作者在多复变数的凸映照与星形映照的研究工作,包括判别准则、增长定理、偏差定理、子族及扩充以及一些几何特性等,这是一系列具有鲜明中国特色的成果.

本书可供高等院校数学系高年级学生、研究生、教师以及科研人员阅读参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

多复变数的凸映照与星形映照/龚昇著.—2版.北京:科学出版社,2003

(纯粹数学与应用数学专著)

ISBN 7-03-010576-1

Ⅰ.多… Ⅱ.龚… Ⅲ.多复变函数论 Ⅳ.O174.56

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第051948号

责任编辑:刘嘉善 李鹏奇/责任校对:陈玉凤

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1995年10月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003年8月第 二 版 印张:17

2003年8月第二次印刷 字数:307 000

印数:1 001—3 500

**定价: 38.00元**

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

主　编　马志明

副主编　（以姓氏笔画排序）

丁伟岳　李大潜　刘应明

张继平　侯自新　袁亚湘

# 第二版前言

单复变数的几何函数论是复分析中的一个重要组成部分.也许 H. Cartan 是考虑将单复变数的几何函数论推广到多复变数的第一位数学家.1933 年,他在一篇文章(见参考文献 H. Cartan[1])中指出:单复变数几何函数论的很多结果到了多复变数的情形就不再成立.自从 H. Cartan 的工作之后,有不少数学家在这个方向工作,获得了不少优秀的成果.1988 年以来,我与国内外一批同事,以多复变数、微分几何、群表示论等为工具,对此课题进行了系统、深入的研究,使这个较为沉寂的方向活跃起来.在工作过程中,研究的道路愈来愈清楚,成果也愈来愈多,于是考虑写几本专著,一方面可以总结成果,继续向前;一方面也可为后来者铺路,写的第一本书就是本书,并于 1995 年作为"纯粹数学与应用数学专著"第 34 号由科学出版社出版.写的第二本书是我与余其煌、郑学安合著的"布洛赫常数与施瓦茨导数",该书于 1998 年作为"现代数学丛书"之一由上海科学技术出版社出版.我们还计划继续写这个方向的专著.

本书中文版第一版于 1995 年出版后,Kluwer Academic Publishers 很快愿出此书的英文版,并于 1998 年作为"Mathematics and Its Applications"系列第 435 号出版.英文版是在中文版的基础上翻译、修订而成,但与中文版相比较已有较大的不同.其原因是在 1995 年以后,这个方向又有了很多很重要的进展,一些新的重要的结果被证明了,一些原有的结果证明简化了或是提高到更高的层次上去了.英文版与中文版相比较,就显得更加丰满与系统.英文版出版后,在国外就有不少文章引用了此书,几乎成为这个方向的文章所必引的文献.

事物总是在不断地发展,由于这个方向的研究道路已经被开辟打通,文献也愈来愈多.本书中文版出版至今已有六年,这六年来这个方向的研究有很大进展.1998 年英文版出版以来,也有不少新的成果出现,出版本书中文版第二版已有必要.中文版第二版是在英文版的基础上加以充实提高写成的.由于文献众多,已不可能也不必要将所有有关的内容全写到中文版第二版中.只能选择一些自己认为较为重要的工作写进书中,这就难免带有主观性,可能挂一漏万.中文版第二版与第一版相比,大约有一半的内容是不相同的.与英文版相比,书的结构更趋完整,内容更为丰富.希望本书中文版第二版的出版对推动多复变数几何函数论的研究能起到很好的作用,并成为对这个方向进行研究

的一本标准的入门书之一.

本书中讨论的域有$\mathbb{C}^n$中的单位超球、多圆柱、典型域、齐性域、一些Reinhardt域、有界凸圆型域、有界星形圆型域以及复Banach空间中的开单位球等.书中往往从一些简单的域,如单位超球、多圆柱等出发来讨论问题,然后逐步推广到更广泛的域上去讨论.这些更广泛的域上的结果往往包括一些简单的域上的结果.为了读者更好地了解研究这些问题的原始想法,在书中往往依然保留了这些简单的域上的讨论,这样虽然增加了一些篇幅,但读起来可以容易些.

书中不妥甚至错误之处在所难免,望读者不吝指正.

龚　昇

2001年8月于北京

# 目　　录

# 绪　论

## §0.1 引　言

单复变数的几何函数论,源远流长,有着极为丰富的内容及广泛的影响.如何将这些成果推广到多复变数空间去?在不少相应的问题上,往往可以举出反例说明其不成立.

追溯历史,考虑将单复变数几何函数论推广到多复变数空间上去的第一位数学家也许是 H. Cartan. 1933 年,P. Montel 写了一本单叶函数论的书,在书后有一个附录,这是 H. Cartan [1]写的一篇文章,题为"Sur la possibilite d'entendre aux fonctions de plusieurs variables complexes la theorie des fonctions univalents."他指出:即使像"在单位圆上全纯单叶函数的展开式的系数的模是有界的",这样的基本结果,在多复变数空间也是不成立的.他还指出,相应的增长定理(growth theorem)及掩盖定理(covering theorem)等,当映照是双全纯时,在多复变数空间上也是不成立的.但他指望,多复变数的双全纯映照的 Jacobi 行列式的模还可能有只依赖于$|z|=r$ 的上、下界,这里 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n$.也就是说,偏差定理(distortion theorem)可望成立.当然很早以前就已经知道,这也是不可能的.这里可以举出一个很简单的例子.

若 $k$ 为任意正整数,令 $f(z)=(f_1(z),f_2(z))$, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$,而

$$\begin{cases} f_1(z) = z_1, \\ f_2(z) = z_2(1-z_1)^{-k} = z_2 + kz_1z_2 + \cdots, \end{cases}$$

则 $f$ 为一个正规化(normalized)双全纯映照,将单位球 $B^2=\{z: z\bar{z}'<1\}$ 映到 $\mathbb{C}^2$中去,这里正规化是指 $f(0)=0$, $f$ 的 Jacobi 阵 $J_f$ 在 $z=0$ 处的值是单位方阵 $I$,即 $J_f(0)=I$.(以后,本书中用"正规化"这个词,就是这个意思,而不再一一申明.)显然

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-kz_2}{(1-z_1)^{k+1}} & \dfrac{1}{(1-z_1)^k} \end{pmatrix},$$

于是$|\det J_f(z)|=|1-z_1|^{-k}$,这就导出

$$\max_{|z|\leqslant r} |\det J_f(z)| = (1-r)^{-k} \to \infty, \text{当 } k \to \infty$$

以及

$$\min_{|z|\leqslant r} |\det J_f(z)| = (1+r)^{-k} \to 0, \text{当 } k \to \infty.$$

因之,如果只是假定 $f(z)$是双全纯,就不能指望$\{\det J_f(z)\}$有上、下界.

自从 H. Cartan 的文章之后,几十年来,有很多数学家致力于这方面的研究,得到了很多、很好、很重要的成果,其中有正面的结果,但也有很多反面的结果.在下一节中,将叙述一个重要的反面的结果,这就是 FitzGerald 的反例.

如前所述,早在 1933 年,H. Cartan 已经指出:像"在单位圆上全纯单叶函数的展开式的系数的模是有界的"这样的基本结果,在多复变数空间是不成立的.但是在多复变数全纯映照的展开式中,同一阶的系数,不再是一个,而是有很多个.有没有这种可能:对一个系数来讲,其模不再有界,而对一些系数加以适当地组合之后,其模却可望有界.FitzGerald 的反例否决了这点,也就是说,不论将这些系数进行何种组合,其模均可无界.这个反例,十分令人信服地告诉我们,如果将单复变数几何函数论中的一些结果,推广到多复变数空间中去,而又指望得到一些正面的结果的话,光有双全纯映照的条件是不够的,必须加上其他的一些限制.

还可以举出很多在单复变数几何函数论中的成果到了多复变数空间不再成立的反例.

应该加上哪些限制来企图获得一些正面的结果?十分自然地想到的是对映照加以几何上的限制,如:凸映照及星形映照.

事实上,当加上了这些几何性质之后,就获得了一系列十分有趣的结果.

自从 1988 年以来,作者与国内外的一批同事们,对多复变数几何函数论进行了系统的研究,得到了一批成果、这些成果陆续写成专著出版,本书是这方面的第一本,系统地阐述多复变数的凸映照与星形映照的成果,中文版第一版于 1995 年出版,英文版于 1998 年出版.本书是中文版第二版,与第一版及英文版相比较,有较大的不同,添加了很多新的内容.

与中文版第一版相比较,本书中的第一章的§1.3、§1.4 以及§1.6,第二章的§2.3、第三章的§3.3、§3.4、§3.5、第四章中§4.1 的反例,第五章的全部、第八章中的§8.4、§8.5 及§8.6,第九章的全部以及第十章的全部都是新增加的内容,一些原有的内容,有些地方已加以改写,当然也有不少原有的内容被删去.

本书的前六章较为系统地讨论了$\mathbb{C}^n$ 中一些域及复 Banach 空间中的单位超球上的双全纯凸映照,$\mathbb{C}^n$ 中的域包括单位超球、典型域、一些 Reinhardt 域以及有界凸圆型域等,尤其对$\mathbb{C}^n$ 中的单位超球及有界凸圆型域进行更多的讨

论.在本书的前六章中,第四章与第五章是讨论比凸映照族更为一般的线性不变族.在第七章、第八章中讨论了上面说到的那些域,还加上有界星形圆型域上的双全纯星形映照.在第九章,第十章中讨论了一些介于凸映照族与星形映照族之间的映照族.

在第一章中,系统地介绍了局部双全纯映照成为双全纯凸映照的判别准则.实际上,还回答了应该在什么样的区域上讨论凸映照的问题.因为如果域是可约的,则凸映照本质上是一些凸映照的直乘积,还因为是对不可约的对称空间若秩$\geqslant 2$,则除了自同构与线性映照外,没有别的凸映照,这些都是很深刻的结果,告诉我们应该在哪些域上讨论凸映照才有意义.

在第二章与第三章中介绍了超球与有界凸圆型域及复 Banach 空间中单位球上凸映照的增长定理及偏差定理,这三章较圆满地解决了判别准则,增长定理与偏差定理.在第四章中用李群为工具给出了有界对称域上线性不变族的偏差定理.即给出了$|\det J_f(z)|$的估计,这里 $f\in S$,$S$ 为线性不变族,$J_f$ 为 $f$ 的 Jacobi 矩阵.在第五章中深入讨论了单位超球上线性不变族的偏差定理,这里偏差定理应该理解为对 Jacobi 矩阵的特征根的估计.在这里给出了 $J_f$ 的范数 $\| J_f(z) \|$ 的估计,$\mathrm{tr}(\overline{J_f(z)}' J_f(z))$,即 $J_f$ 的特征根的绝对值的平方和的估计以及$|\det J_f(z)|$的估计.对它们的估计用的是 $S$ 不同的阶.在这两章中的估计从某种意义上讲都是精确的.但是对于用来估计这些特征根的 $S$ 的阶还没有得到它们精确的估计,例如:在单位超球 $B^n$ 上的正规化双全纯凸映照族$K$,它的迹阶 $C(K)$是多少,是至今未解决的问题.在第六章中,应用凸映照的几何性质,给出了单位超球在正规化双全纯凸映照下所得的像的曲率的估计,体积的估计,Bloch 常数的估计以及二点偏差定理,即二点的像之间的距离的估计.第七章与第八章是讨论星形映照的.比较系统地给出了局部双全纯映照成为双全纯星形映照的判别准则及星形映照的增长定理,尤其是在单位超球与有界星形圆型域上.第九章讨论了有界凸圆型域上的准凸映照族.这里一共给出了四类准凸映照族,都来自于单复变数单位圆 $\Delta$ 上正规化局部双全纯函数,它们成为双全纯凸函数的一些相互等价的判别准则.其中三类准凸映照族都包含有凸映照族为真子族,有的还包含在星形映照族之内.给出了相关的增长定理,这个增长定理与凸映照的增长定理是相一致的,这说明尽管这些准凸映照族以凸映照族为真子族,但距离凸映照族并不远.当然这四类准映照族在单位圆 $\Delta$ 上,都成为凸映照族.在本书的最后一章,第十章引入了 $\varepsilon$ 星形映照的概念,目的是想用此来统一处理凸映照族与星形映照族,且用此来了解这两类映照族之间是如何过渡的.但这方面的工作还只是开始,有待于进一步的发展.

综上所述,中文版第二版较第一版,其内容更为丰满,有关凸映照与星形

映照的很多问题已得到圆满及完整地解决.当然还有不少问题有待于解决及深入地探讨.

这里我要感谢 University of California, San Diego 的数学系以及长期合作者 Carl FitzGerald 教授,他们多次为我提供了良好的工作条件,本书中不少研究工作是在那里完成的.

这里我要感谢在这个课题上的长期合作者,尤其是余其煌教授、郑学安教授、王世坤教授、刘太顺教授以及 Carl FitzGerald 教授等.他们不仅在学术上与我长期合作,互相切磋,并给我以各方面的支持,这实在是难能可贵.

我还要感谢国家自然科学基金委员会、中国科学院科学出版基金专家委员会以及中国科学院基础局对出版本书第二版的支持.

包括对凸映照与星形映照的研究在内,我们对多复变数几何函数论的研究获得了 2000 年中国科学院自然科学一等奖,2002 年华罗庚奖,2002 年在我国举行的国际数学家大会安排了以多复变数几何函数论为主题的卫星会议,这些都激励我们将多复变数几何函数论的研究工作做得更好更深入.希望本书的出版有助于这个方向的发展.

## §0.2 反　　例

在这一节中,主要介绍 FitzGerald 关于$\mathbb{C}^n$ 中正规化双全纯映照的系数估计的反例,即不可能存在系数的组合,使其模是有界的(参阅 FitzGerald C. H. [1]).

在单复变数几何函数论中,讨论在单位圆$|z|<1, z\in\mathbb{C}$上单叶全纯具有形式

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots \tag{0.2.1}$$

的函数.这种函数的全体组成正规族 $S$. 1907 年 Koebe 证明在 $S$ 中任一函数的$|a_2|$都是有界的. 1916 年,Bieberbach 证得精确上界$|a_2|\leqslant 2$.由此导出$|f(z)|$及$|f'(z)|$的上、下界等等.

在单复变数中,在 $\mathbb{C}$ 上全纯且单叶,而有形式(0.2.1)的函数只有 $f(z)=z$ 一个.因之,在单复变数几何函数论中,要对单叶全纯函数进行讨论,必须对区域加以限制.但是对于多复变数的情形就不同了,存在着很多个将$\mathbb{C}^n$ 映到$\mathbb{C}^n$ 中去的双全纯映照,例如可以参阅 Rosay 与 Rudin[1]的工作.

若 $F=(f_1,f_2,\cdots,f_n):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 为$\mathbb{C}^n$ 上的全纯映照,且正规化,即 $f(0)=0, J_f(0)=I$(单位方阵),于是 $F$ 的每个分量是多复变数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$的全纯函数,且可展开成

$$f_k(z_1,\cdots,z_n) = z_k + \sum d^{(k)}_{(j_1,\cdots,j_n)} z_1^{j_1}\cdots z_n^{j_n}, \tag{0.2.2}$$

$k=1,\cdots,n$,而每个 $j_m(m=1,\cdots,n)$为非负整数,且和 $j_1+j_2+\cdots+j_n\geqslant 2$.

以下举出两个下面要常用到的双全纯映照的例子.

**例 1** 若 $b=(b_1,\cdots,b_2)\in\mathbb{C}^n$, $c=(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{C}^n$,定义 $b\cdot c=\sum_{i=1}^{n} b_i c_i$.设 $v\in\mathbb{C}^n$, $v\neq 0$,而 $A,B,C\cdots$都是$\mathbb{C}^n$ 中的点,且有性质 $A\cdot v=0, B\cdot v=0, C\cdot v=0,\cdots$.若 $a$ 为任一非零复数,定义正规化多项式映照

$$w = z + av(A\cdot z)(B\cdot z)(C\cdot z)\cdots. \tag{0.2.3}$$

这里的乘积为有限个但至少有两个因子$(A\cdot z)$及$(B\cdot z)$.

可证这个映照是一对一的.

要证明这一点,只要求得映照的逆即可,将 $A$ 点乘(0.2.3)两边,由于 $A\cdot v=0$,故 $A\cdot w=A\cdot z$.同理,$B\cdot w=B\cdot z$, $C\cdot w=C\cdot z$,$\cdots$等.故有 $z=w-av(A\cdot w)(B\cdot w)(C\cdot w)\cdots$. 故映照可逆.

**例 2** 若 $a$ 为非零复常数,定义一个$\mathbb{C}^n$ 到$\mathbb{C}^n$ 的一对一的映照如下:$w_1=z_1\exp(az_2)$, $w_k=z_k$, $k=2,3,\cdots,n$.

要证这是一对一,也只要求其逆,显然,$z_k=w_k$, $k=2,3,\cdots,n$,由于 $\exp(az_2)$已知为非零,故 $z_1=w_1\exp(-aw_2)$.

在以上两个例子中,将自变量 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 重新进行排列,还可生成一些其他的双全纯映照的例子.例如,令 $w_1=z_1$, $w_2=z_2\exp(az_1)$, $w_k=z_k$, $k=3,\cdots,n$,则成为另一个定义在$\mathbb{C}^n$ 到$\mathbb{C}^n$ 的双全纯映照.

两个在$\mathbb{C}^n$ 上双全纯映照的复合,仍为在$\mathbb{C}^n$ 上的双全纯映照,在以下的讨论中,关键是看其低阶项.

若 $m\geqslant 1$ 为整数,$w=z+P_m(z)+O(|z|^{m+1})$及 $w=z+Q_m(z)+O(|z|^{m+1})$为$\mathbb{C}^n$ 上的两个全纯映照,这里 $P_m$ 与 $Q_m$ 为$\mathbb{C}^n$ 中的两个向量,每个分量均为 $m$ 次齐次多项式.而 $w$ 的其他高阶项均用$O(|z|^{m+1})$来表示.这两个映照的复合映照成为

$$w = z + P_m(z) + Q_m(z) + O(|z|^{m+1}). \tag{0.2.4}$$

特别一个映照为另一个映照的逆映照时,则 $P_m=-Q_m$.

例 1 及例 2 给出了一些$\mathbb{C}^n$ 到$\mathbb{C}^n$ 的双全纯映照,对一般的形为(0.2.2)的$\mathbb{C}^n$ 上的全纯映照,即使是二阶项,其系数也有很多个.就整个映照 $F$ 而言,其二阶项的系数共有$\frac{n^2(n+1)}{2}$个.如果每个系数或是这些系数的某种组合的模

都有界,则这成为 Bieberbach 的关于 $|a_2|$ 的估计的推广.但如下的 FitzGerald 定理说明这永远不可能!这条定理说:任给一组 $n$ 个变数 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 的 $n$ 个二阶齐次多项式,则存在一个双全纯映照,其二阶项就是已给的这一组二阶齐次多项式.

**定理 0.2.1** 对于 $n\geqslant 2$,若 $\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$ 为一组 $n$ 个变数 $z_1,\cdots,z_n$ 的二阶齐次多项式,则对于 $k=1,2,\cdots,n$,存在全纯函数

$$f_k(z_1,z_2,\cdots,z_n) = z_k + P_k(z_1,z_2,\cdots,z_n) + O(|z|^3),$$

$k=1,2,\cdots,n$,使得 $F=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 中的双全纯映照.

**证** 为了生成具有各种可能的二阶项的从 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的双全纯映照,这只要考虑如下的四个映照,为了简便起见,对 $w_1,\cdots,w_n$ 只写出到二阶项,其高阶项都略去不写.这四个映照(略去 $w_1,\cdots,w_n$ 的高阶项不写)为

(1) $w_1=z_1+az_1^2$, $w_2=z_2$, ……, $w_n=z_n$.

(2) $w_1=z_1+az_1z_2$, $w_2=z_2$, ……, $w_n=z_n$.

(3) $w_1=z_1+az_2^2$, $w_2=z_2$, ……, $w_n=z_n$,

(4) $w_1=z_1+az_2z_3$, $w_2=z_2$, ……, $w_n=z_n$.

若将自变数的标号 $\{2,\cdots,n\}$ 进行重新排列,并进行复合,就可得到 $w_1$ 的各种可能的二阶项.若将标号 $\{1,2,\cdots,n\}$ 进行重新排列,并进行复合,就可得到 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 的各种可能的二阶项.所以如果能够证明:有这样的四个双全纯映照,其 $w_1$ 的二阶项为已给的(1),(2),(3)及(4),则定理也就证明了.

显然,(3),(4)本身没有高阶项就是双全纯映照,而例 2 就是一个具二阶项如(2)的双全纯映照,所以只要找到一个双全纯映照,其二阶项如(1)所示即可.

在例 1 中,取 $v=(1,1,0,\cdots,0)$,$A=B=(1,-1,0,\cdots,0)$,则有双全纯映照

$$w_1 = z_1 + a(z_1 - z_2)^2 = z_1 + az_1^2 - 2az_1z_2 + az_2^2,$$

$$w_2 = z_2 + a(z_1 - z_2)^2 = z_2 + az_1^2 - 2az_1z_2 + az_2^2,$$

$$w_3 = z_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$w_n = z_n. \tag{0.2.5}$$

考虑形如(3)的双全纯映照

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 - az_2^2, \\ w_2 &= z_2, \\ &\cdots\cdots \\ w_n &= z_n. \end{aligned} \tag{0.2.6}$$

将(0.2.5)与(0.2.6)进行复合,由(0.2.4),得到一个双全纯映照,

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 + az_1^2 - 2az_1z_2, \\ w_2 &= z_2 + az_1^2 - 2az_1z_2 + az_2^2, \\ w_3 &= z_3, \\ &\cdots\cdots \\ w_n &= z_n. \end{aligned} \tag{0.2.7}$$

再考虑一个形如(3)的双全纯映照

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1, \\ w_2 &= z_2 - az_1^2, \\ w_3 &= z_3, \\ &\cdots\cdots \\ w_n &= z_n. \end{aligned} \tag{0.2.8}$$

将(0.2.7)与(0.2.8)进行复合,得到双全纯映照

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 + az_1^2 - 2az_1z_2, \\ w_2 &= z_2 - 2az_1z_2 + az_2^2, \\ w_3 &= z_3, \\ &\cdots\cdots \\ w_n &= z_n. \end{aligned} \tag{0.2.9}$$

再考虑一个形如(2)的双全纯映照

$$
\begin{aligned}
w_1 &= z_1 + 2az_1z_2 + O(|z|^3),\\
w_2 &= z_2,\\
&\cdots\cdots\\
w_n &= z_n.
\end{aligned}
\tag{0.2.10}
$$

将(0.2.9)与(0.2.10)进行复合,得到双全纯映照

$$
\begin{aligned}
w_1 &= z_1 + az_1^2 + O(|z|^3),\\
w_2 &= z_2 + az_2^2 - 2az_1z_2,\\
w_3 &= z_3,\\
&\cdots\cdots\\
w_n &= z_n.
\end{aligned}
\tag{0.2.11}
$$

再考虑一个形如(2)的双全纯映照

$$
\begin{aligned}
w_1 &= z_1,\\
w_2 &= z_2 + 2az_1z_2 + O(|z|^3),\\
w_3 &= z_3,\\
&\cdots\cdots\\
w_n &= z_n.
\end{aligned}
\tag{0.2.12}
$$

将(0.2.11)与(0.2.12)进行复合,得到双全纯映照

$$
\begin{aligned}
w_1 &= z_1 + az_1^2 + O(|z|^3),\\
w_2 &= z_2 + az_2^2 + O(|z|^3),\\
w_3 &= z_3,\\
&\cdots\cdots\\
w_n &= z_n.
\end{aligned}
\tag{0.2.13}
$$

同样方法,从考虑例 1 出发,但取 $v=(1,-1,0,\cdots,0)$及 $A=B=(1,1,0,\cdots,0)$就可得到另一个双全纯映照

$$
w_1 = z_1 + a(z_1+z_2)^2,
$$

$$
\begin{aligned}
w_2 &= z_2 - a(z_1 - z_2)^2, \\
w_3 &= z_3, \\
&\cdots\cdots \\
w_n &= z_n.
\end{aligned}
\tag{0.2.14}
$$

对(0.2.14)用与从(0.2.5)出发得到(0.2.13)相仿的步骤,可以得到一个双全纯映照

$$
\begin{aligned}
w_1 &= z_1 + az_1^2 + O(|z|^3), \\
w_2 &= z_2 - az_2^2 + O(|z|^3), \\
w_3 &= z_3, \\
&\cdots\cdots \\
w_n &= z_n.
\end{aligned}
\tag{0.2.15}
$$

将(0.2.13)与(0.2.15)进行复合,得到双全纯映照

$$
\begin{aligned}
w_1 &= z_1 + 2az_1^2 + O(|z|^3), \\
w_2 &= z_2 + O(|z|^3), \\
w_3 &= z_3, \\
&\cdots\cdots \\
w_n &= z_n.
\end{aligned}
\tag{0.2.16}
$$

以$\frac{1}{2}a$ 替代$a$,(0.2.16)即为(1).

从这四个双全纯映照出发,对自变数及因变数进行重新排列及复合,可以得到所有可能的各种二阶项的双全纯映照,故定理得证.

在古典几何函数论中,有所谓"系数体"(coefficient body), 这是指:若$f \in S$,且有展开式(0.2.1),则$(a_2, a_3, \cdots, a_m)$为$\mathbb{C}^{m-1}$中的一点,对所有的$f \in S$,$(a_2, a_3, \cdots, a_m)$组成$\mathbb{C}^{m-1}$中的一个区域,这个区域称为"系数体".例如在Schaeffer与Spencer[1]的书中,就有这方面的讨论,尤其是$(a_2, a_3)$.定理0.2.1及以下的定理0.2.2说明,在高维空间的情形,这样的"系数体"就是整个空间,如果我们考虑二阶项系数及三阶项系数组成的"系数体"的话.

定理 0.2.1 是关于二阶项的系数的讨论,它告诉我们,如果$f(z)$: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$为$\mathbb{C}^n$上的正规化双全纯映照,那么它的二阶项的系数可以是完全任

意的、那么三阶项的系数是如何呢？结论是一样的.

如同上一节的讨论那样，不妨只讨论正规化的 $w_1, w_2, \cdots, w_n$. 由上一节的讨论中可以看出，不妨假设所有的二阶项系数均为零. 于是可以证明，能找到如下的七个双全纯映照，进行变数重新排列及复合，可得各种可能的三阶项的双全纯映照.

要找的这七个双全纯映照是具有如下的形式（四阶及四阶以上的项均略去不写）.

(1) $w_1 = z_1 + az_1^3,\quad w_2 = z_2,\quad \cdots\cdots\quad w_n = z_n.$

(2) $w_1 = z_1 + az_1^2 z_2,\quad w_2 = z_2,\quad \cdots\cdots\quad w_n = z_n.$

(3) $w_1 = z_1 + az_1 z_2^2,\quad w_2 = z_2,\quad \cdots\cdots\quad w_n = z_n.$

(4) $w_1 = z_1 + az_1 z_2 z_3,\quad w_2 = z_2,\quad \cdots\cdots\quad w_n = z_n.$

(5) $w_1 = z_1 + az_2^3,\quad w_2 = z_2,\quad \cdots\cdots\quad w_n = z_n.$

(6) $w_1 = z_1 + az_2^2 z_3,\quad w_2 = z_2,\quad \cdots\cdots\quad w_n = z_n.$

(7) $w_1 = z_1 + az_2 z_3 z_4,\quad w_2 = z_2,\quad \cdots\cdots\quad w_n = z_n.$

如果能找到七个形如(1)到(7)的双全纯映照，那么如同上一节中所进行的那样，将自变数标号$\{2,3,\cdots,n\}$重新进行排列复合，可得到 $w_1$ 的所有的各种可能的三阶项. 将标号$\{1,2,\cdots,n\}$重新进行排列及复合，就可以得到 $w_1$, $w_2,\cdots,w_n$ 的各种可能的三阶项.

所以这只要证明，存在这样七个双全纯映照，其 $w_1$ 的三阶项如已给的(1)到(7).

显然，(5)，(6)及(7)各式中，没有高阶项（等于或高于四阶项），它们本身就是如例 1 的映照，所以是双全纯映照，这是因为：在例 1 中选 $v=(1,0,\cdots,0)$, $A=B=C=(0,1,0,\cdots,0)$，即得(5). 在例 1 中选 $v=(1,0,\cdots,0)$, $A=B=(0,1,0,\cdots,0)$, $C=(0,0,1,0,\cdots)$就得(6). 在例 1 中选 $v=(1,0,\cdots,0)$, $A=(0,1,0,\cdots,0)$, $B=(0,0,1,0,\cdots,0)$, $C=(0,0,0,1,0,\cdots,0)$就得(7). 而