

自学参考用書

# 初中代數講話

裘頌蘭編著

浙江人民出版社

# 初中代數講話

裘頌蘭編著

浙江人民出版社

# 初中代數講話

裘頌蘭編著

※

浙江人民出版社出版

杭州武林路万石里1号

浙江省書刊出版營業許可証出字第001号

地方國營杭州印刷厂印刷 新華書店浙江分店發行

※

開本787×1092 紙 $1/32$  印張 $6\frac{1}{8}$  字數133,000

1956年4月第一版

1956年9月第五次印刷

印數：104,123—164,132

## 出版者的話

我們出版這套書，是爲了滿足具有初中文化程度的青年羣衆、幹部（包括初中畢業生）學習文化科學知識的需要，使他們通過自學，一方面打下進一步掌握科學知識的牢固基礎，另一方面能夠把學到的知識應用到實際生活和生產中去，更好地爲祖國的社會主義建設事業服務。

這套書是根據自學這個特點進行編寫的，在合乎科學性和系統性的原則下，適當地與實際相聯系，並結合貫徹政治思想教育。每一種學科各有重點，不是初中課本的複述，而是課本內容的概括和提高。因此，這套書不但可作爲初中畢業生的自學參考讀物，也可作爲初中教師教學上的輔助材料。

# 目 錄

## 第一講 學好代數要準備些什麼

- § 1. 思想上作好準備…………… ( 1 )
- § 2. 注意學習方法…………… ( 2 )
- § 3. 要有鞏固的算術知識基礎…………… ( 3 )

## 第二講 學會怎樣使用字母

- § 4. 使用字母代表數…………… ( 8 )
- § 5. 與代數式有關的基本概念…………… ( 12 )
- § 6. 代數學中的運算方法與運算符號…………… ( 14 )
- § 7. 運算的順序與符號…………… ( 15 )
- § 8. 算術中的運算定律和性質可以應用在代數中 ( 17 )
- § 9. 代數式的值…………… ( 18 )

## 第三講 數概念的擴充 有理數

- § 10. 有理數概念的引出…………… ( 20 )
- § 11. 有理數的大小…………… ( 25 )
- § 12. 有理數的加法和性質…………… ( 27 )
- § 13. 有理數的減法…………… ( 29 )
- § 14. 有理數的乘法…………… ( 33 )

- § 15. 有理數的除法..... ( 37 )  
§ 16. 有理數乘法與除法的性質..... ( 38 )

#### 第四講 單項式與多項式

- § 17. 基本概念..... ( 43 )  
§ 18. 多項式的性質..... ( 45 )  
§ 19. 多項式的加法與減法..... ( 47 )  
§ 20. 指數定律與單項式乘法..... ( 50 )  
§ 21. 多項式乘法..... ( 54 )  
§ 22. 乘法公式..... ( 58 )  
§ 23. 單項式與多項式的除法..... ( 62 )

#### 第五講 多項式的因式分解

- § 24. 引言..... ( 68 )  
§ 25. 單項式的因式分解..... ( 69 )  
§ 26. 多項式的因式分解..... ( 70 )  
§ 27. 最高公因式與最低公倍式..... ( 82 )

#### 第六講 分式的四則運算

- § 28. 引言..... ( 85 )  
§ 29. 分式的基本性質..... ( 85 )  
§ 30. 分式的加法與減法..... ( 91 )  
§ 31. 分式的乘法..... ( 92 )  
§ 32. 分式的除法..... ( 94 )

## 第七講 比例與比例關係的量

- § 33. 成比例關係的量..... ( 98 )
- § 34. 圖象的作法..... (104)
- § 35. 比例式的性質..... (107)
- § 36. 比例的應用..... (110)
- § 37. 複比例與連比例..... (112)

## 第八講 一次方程式與一次聯立方程式

- § 38. 等式同它的性質..... (118)
- § 39. 方程式..... (122)
- § 40. 方程式的性質..... (124)
- § 41. 增根與失根..... (129)
- § 42. 一元一次方程式..... (131)
- § 43. 二元一次聯立方程式..... (134)
- § 44. 三元一次聯立方程式..... (139)
- § 45. 佈列方程式..... (142)

## 第九講 數的開平方

- § 46. 引言..... (150)
- § 47. 算術根與代數根..... (150)
- § 48. 正數開方的運算性質..... (151)
- § 49. 數的開平方..... (153)
- § 50. 平方根的近似值..... (155)

## 第十講 二次方程式與不等式

§ 51. 引言	(160)
§ 52. 幾種特殊二次方程式的解法	(161)
§ 53. 一元二次方程式的一般解法	(164)
§ 54. 不等式及其應用	(169)
§ 55. 不等式的性質	(170)
§ 56. 一元一次不等式的解法	(174)

## 習題答案



# 第一講 學好代數要準備些什麼

## § 1. 思想上作好準備：

(1) 要消除害怕數學的情緒，樹立學好代數的信心。過去學校裏教師講解數學時，多半是不從實際出發，往往叫學生背誦條文死記方法，以致多數學生害怕數學，喪失學習信心。這主要是由於教師掌握數學知識不夠，教學方法不妥當的緣故。其實，正確的數學知識都是從實際中得來的，它存在在我們日常生活的周圍，也存在在我們各項生產活動中。我們的祖先把長時期從勞動中所積累起來的數學知識，用語言符號把它系統地記錄在書本上，便利於我們學習，使我們在短時間內就能學會數學知識，用它去解決實際問題。但是書本上所記錄的語言符號，僅僅是數學知識的表達形式，不是數學知識的內容本身。我們真真要學會數學知識，就應當從實際中去理解。倘使我們學習數學的時候，能結合實際事物去領會數學知識，那就不會感到困難，更談不到害怕。

例如我們度量茶杯口子的周圍，知道周長是茶杯口的直徑的 3.14 倍；度量面盆的周圍，周長也是直徑的 3.14 倍；我們度量任何圓形的周長都是直徑的 3.14 倍。而且在幾何學裏還可證明圓周長是直徑的  $\pi$  倍。（ $\pi$  表示圓周與直徑的比值，約為 3.1416）這樣的性質存在在凡是有圓形的一切物體中，我們通過度量，經過思考就可理解它的道理。學好數學又可以解決許多實際問題，我們倘能結合實際來學習，一定會感到很大興趣。可是學習畢竟是一種艱苦的勞動，要學好數學，困難總是

有的，只要我們樹立信念，開動腦筋，困難是可以克服的。

(2) 不要把數學看做單純是一種計算方法。過去總是把數學看做就是計算方法，一般學數學的人往往專學方法，記牢怎樣算，不知道為什麼要這樣算的道理，這種看法是錯誤的。其實數學是一種科學，它是從研究實際事物的數量關係所獲得的一種知識。這種知識和任何科學知識一樣，是由淺到深、由簡到繁、有系統地組織起來的。當然數學知識也包括許許多多計算方法，但每種方法都有一定的道理做它的依據。因此學好數學，首先要系統地懂得數學知識，在懂得數學知識的基礎上去掌握計算方法；只有這樣，才能把學好的數學知識用來解決實際問題。所以我們反對重方法不重理解地學習數學，我們認為學習數學必須先求理解再學方法，必須懂得道理之後再掌握計算方法。

## §2. 注意學習方法：

(1) 要循序漸進，有系統地學習，不能跳躍：數學知識都是從實際出發，按照一定系統組織起來的一種科學知識。我們學習的時候，一定要面向實際，按部就班地去學習，把開始的基本概念搞清楚，然後循序漸進地學下去，決不容許跳躍，也不容許斷章取義。例如在算術中，首先學習自然數和它的運算，然後才能夠進一步學習分數和它的運算。不學好自然數馬上想學好分數，這是不可能的，也是不應該的。初步的數學知識是很重要的，因為它是基礎知識，基礎打得愈好，以後就可學得更深入。把基礎知識看得很容易，不去認真學習當然是錯誤的。

(2) 必須把基本概念搞清楚，在懂得基本概念的基礎上掌握運算方法：前面已經說過，數學是一種科學，它所包括的一切計算方法，都是有一定的道理做依據的。因此我們學習的時

候，如果光記方法不去理解它的道理，那末碰到解應用題的時候，就會感到手足無措。倘使懂得道理再去記住方法，那末不僅容易記憶，而且還能靈活運用。

(3) 把數學知識和實際結合起來去理解：數學知識既然是從實際中得來，是實際事物間數量關係或空間形式的反映，因此要做到真真懂得數學知識，必須和實際事物結合起來，才能理解。倘使光從數學教本上，咬文嚼字地去學習，即使把書上的條文背得爛熟，也是無用的。

(4) 要把懂得的概念牢牢記住，掌握的方法練習得純熟，還要學會應用這些來解應用題：數學既然是有系統的科學知識，所以不僅要把基本概念搞清楚，還得把它們牢牢記住，因為它們是學習以後的知識的重要條件，不記住前面的概念，就不可能去理解以後的知識。已經掌握了運算方法，不僅要懂得為什麼這樣算的道理，還要化工夫多多練習，到達一定的熟練程度。倘使簡單的運算不熟練，碰到較繁的運算就沒有辦法。學習數學的人，倘使能夠面向實際去學習，學懂的數學知識又能牢記，掌握的方法又練習得純熟，那末就可以用這些去解決實際問題。但解決實際問題並不是馬上就會的，應當經常地學習解應用問題，培養分析問題的能力，只有這樣，才能應用已經學得的知識，去解決遇到的實際問題。

§3. 要有鞏固的算術知識基礎：代數是算術的繼續，它繼續研究數的運算，再把數概念加以擴張，研究對象加以擴大，所以沒有算術知識做基礎，代數是學不好的。為了學好代數，把算術知識複習一次是必要的。複習當然要全面複習，特別是下列提出的幾個問題，對代數關係更大：

(1) 什麼是量？怎樣用數去標識量？數與量間有什麼關係？算術裏的運算對象究竟是數還是量？

(2) 整數、分數、十進小數以及和它們有關的基本概念要搞清楚；整數是怎樣產生的？整數的主要性質是什麼？整數怎樣擴大為分數？分數是否包括整數？十進小數和分數的關係，分數的主要性質是什麼？

(3) 整數的加法、減法、乘法、除法等運算定義怎樣？分數的加法、減法、乘法、除法等運算定義又怎樣？整數的運算定義是否可以包括在分數的運算定義之中？反過來又怎樣？

(4) 整數的運算定義與分數的運算定義是不同的，可是不論整數的運算或分數的運算，它們都具有共同的運算性質，這些運算性質都是從長期實踐中總結出來的，是非常重要的，它們是以後運算時的根據：

(一) 加法交換律：交換加數的位置，他們的和不變。

$$\text{例如 } 7+8=8+7; \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{3}$$

這個基本的運算定律，不論是整數，分數或十進小數都是適用的。若以字母  $a, b$  代表任何兩個數，那末這條運算定律就可很簡單地寫做公式：

$$a+b=b+a.$$

這一定律還可推廣到兩個以上的數相加的時候。

(二) 加法結合律：三個數相加，可以將任意兩數先相加，再將和與另一數相加，它們的結果不變。

$$\text{例如 } (5+7)+3=5+(7+3);$$

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{7} = \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{7}\right).$$

如以  $a, b, c$  代表任意三數，這個運算定律可簡單地寫做公式：

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad (\text{都等于 } a+b+c)$$

這一定律還可推廣到三個以上的數相加的時候。

(三)乘法交換律：交換乘數的位置，它們的積不變。

例如  $5 \times 7 = 7 \times 5$ ;  $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{5} \times \frac{2}{3}$ .

若以  $a, b$  代表任意兩數，那末這一定律可以簡單地寫做公式：

$$ab = ba,$$

這定律還可推廣到兩個以上的數相乘的時候。

(四)乘法結合律：三個乘數相乘，任意兩個乘數先乘，再與另一乘數相乘，它們的積不變。

例如  $(3 \times 7) \times 5 = 3 \times (7 \times 5)$ ;

$$\left(\frac{3}{5} \times \frac{5}{7}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}\right).$$

若以  $a, b, c$  代表任意三個數，那末這一定律可以簡單地寫做公式：

$$(ab)c = a(bc). \quad (\text{都等于 } abc)$$

這定律還可推廣到三個以上的數相乘的時候。

(五)乘法分配律：某數乘以若干個數的和，那末可用每個加數乘該數，再把各個乘積相加。

例如  $7 \times (6 + 5) = 7 \times 6 + 7 \times 5$ ;

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}.$$

若以  $a, b, c$  代表任意三個數，那末這一定律可以簡單地寫做公式：

$$a(b + c) = ab + ac.$$

這定律還可推廣到加數在兩個以上的時候。

以上五條運算定律，是算術中任何數相加、相乘的時候所具有的最基本的運算性質。根據這五項運算性質，已經推出下

面的幾項運算性質，現在把它們都寫成公式，讀者可以看出這些公式的意義，並用語言表達出來：

$$1. a + (b + c + d + \dots) = a + b + c + d + \dots;$$

$$2. a - (b + c + d + \dots) = a - b - c - d - \dots;$$

$$3. a + (b - c) = a + b - c;$$

$$4. a - (b - c) = a + c - b;$$

$$5. a(bcd\dots) = \{[(ab)c]d\}\dots;$$

$$6. (abc\dots)m = (am)bc\dots = a(bm)c\dots = \dots;$$

$$7. (a - b)c = ac - bc; \quad (\text{這裏 } a > b)$$

$$8. \frac{a + b + c + \dots}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \dots;$$

$$9. \frac{a - b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m};$$

$$10. (abc\dots) \div m = (a \div m)bc\dots = a(b \div m)c\dots = \dots;$$

$$11. a \div (bcd\dots) = [(a \div b) \div c] \div d\dots;$$

以上公式中的除數 $m$ 是不能等于零的；除數 $bcd\dots$ 中也不允許有任何一個乘數等于零。

(5) 運算的時候，首先要看被運算的對象是什麼數？假使是整數，就按照整數的運算定義去運算。假使是分數，就按照分數的運算定義去運算。整數也可以按照分數的運算定義去運算，因為整數包括在分數之中，但是分數不能按照整數的運算定義去運算。其次運算的時候要有根據，也就是根據五條基本運算定律與十一項運算性質去運算，倘使沒有根據地去運算就要犯錯誤。再其次還得認清所使用的運算符號與運算的先後順序，因為符號搞錯與順序搞亂，也會使結果不正確的。以上三點是運算時應當掌握的三大環節。懂得這三點，可以說是懂得了運算技能，但還應當多多練習，達到一定的熟練程度。

## 練 習 題

1. 
$$\frac{\left(8\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{2} + \left(3\frac{1}{8}-1\frac{7}{8}\right)\times 1\frac{3}{5}}{\left(5-4\frac{2}{5}\right)\div 10 + \left(2-1\frac{3}{8}\right)\div 3\frac{1}{8}}$$
2. 
$$\frac{\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{10}}{\frac{15}{16}\times\frac{14}{39}\times\frac{24}{25}\times\frac{13}{21}}\div\left(2\frac{1}{8}\times 2\frac{2}{7}\times 2\frac{15}{17}\times 4\frac{2}{3}\right)\div 196.$$
3. 
$$\left\{\frac{\left(53\frac{3}{4}+9\frac{1}{6}\right)\times 1\frac{1}{5} - \left(6\frac{4}{5}-3\frac{3}{7}\right)\times 5\frac{5}{6}}{\left(10\frac{3}{10}-8\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{9} - 3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}}\right\}-29\frac{5}{8}.$$
4. 
$$\frac{8\div\left(3\div\left(2\frac{3}{4}-1\frac{15}{28}\right)+\frac{2}{3}\div\frac{3}{2}\right)+\frac{57}{223}}{14\times\left(5\frac{5}{7}-4\frac{3}{4}\right)-9\frac{5}{7}+\frac{3}{14}}$$
5. 
$$\frac{5.2+17.25-3.36\div 0.3}{2.7\div 0.18+0.65\div 0.13}\div 0.05.$$
6. 
$$\frac{(2.1-1.965)\div(0.12\times 0.45)}{0.0325\div 0.13}-\frac{1\div 0.25}{0.16\times 6.25}.$$

## 第二講 學會怎樣使用字母

§4. 使用字母代表數：在學習算術的時候，曾經使用過字母去代表數。這樣的結果有兩種作用：(1) 把任何數所具有的共同運算性質表示了出來。例如“交換加數的位置它們的和不變”這一加法運算性質，就用 $a+b=b+a$ 很簡單明白地表示出來。(2) 把某些數量關係用公式表示出來之後，便利了計算。例如圓面積 $A$ 就用公式 $A=\pi r^2$ 來表示。這裏的 $\pi$ 是常數， $r$ 是圓半徑，只要知道圓的半徑，代入這公式，就可算出圓的面積。在代數裏專門研究使用字母代表數，這樣可以研究數的更多的性質，研究數量間更多的相依關係以及更多的運算問題。所以要學好代數的第一步，就是學會善于使用字母，能把字母所代表的數與 $2, 5, \frac{1}{3}$ 等等數，同樣熟悉的來看待它，而且要深深領會使用字母代表數的優越性。在算術中，主要是研究數的加、減、乘、除四種運算。要曉得這種運算不是憑空臆造出來的，而是根據實際數量間的關係總結出來的寶貴經驗。例如甲籃有桃15個，乙籃有桃27個，把兩籃桃子合併起來一共有桃 $15+27=42$ 個。不要認為這種簡單問題是當然的，倘使追問一句，為什麼用加法而不用別的方法？因為加法的產生就是為解決“把兩個數量合併起來計算是多少”這一類問題的。上面這個問題恰好是屬於這類問題，因此用加法運算。而且經驗告訴我們，用加法運算的結果是與實際合併後的桃數符合的。當然兩籃的桃數是可以有任何不同的整數，但要計算合併後的桃數總是用加法。這不僅對桃子合併是如此，就是計算任何兩個數



量相合併也是如此。這一普遍性倘使用字母代表數，就可把它表示出來：即一個數量是 $a$ ，另一個數量是 $b$ ，合併起來就是 $a+b$ 。

不同類型的問題就得用不同的表示方式，舉例如下：

例1 某農業合作社今年收穫早穀 $a$ 斤，晚穀 $b$ 斤，那末今年共收稻穀是 $a+b$ 斤。

有的問題就得用減法不能用加法。

例2 某農業社社員今年分到稻穀總量為 $x$ 斤，除賣給國家 $y$ 斤外，其餘留作自用。那末留作自用的稻穀一定是 $x-y$ 斤。

有的問題就得用乘法。

例3 某農業社今年共種水田 $a$ 畝，每畝收割稻穀 $b$ 斤。那末共收稻穀是 $a \times b$ 斤。

有的問題還得用除法。

例4 某校有獎學金 $A$ 元，平均獎給優秀學生 $n$ 人。那末每人所得獎金是 $(A \div n)$ 元。

究竟哪些問題要用加法？哪些問題要用乘法？這應當從兩方面去考慮：一方面要明確認識每種運算的定義，因為每種運算都是為解決某類實際問題才產生出來的。另一方面應當徹底搞清楚問題的實際意義。只有這兩方面結合起來，問題才能獲得解決。例如上面的例3，問題的意義是有 $a$ 畝田，每畝割稻穀 $b$ 斤，換句話說就是 $a$ 個 $b$ 斤相加。而乘法是這樣定義的：同樣的數累次相加時的簡法叫乘法。這樣兩方面的意思是一致了，因此斷定稻穀總數是 $a \times b$ 斤。很顯然倘使說稻穀總數是 $a+b$ 斤或 $a-b$ 斤都是錯誤的，這種錯誤還會鬧成笑話，因為 $a$ 畝田不能和 $b$ 斤穀加成為一件東西。當然稻穀總數也不會是 $b \div a$ 斤，因為把 $b$ 斤穀分散到 $a$ 畝田中去毫無實際意義。此外有的是幾何問題，就得同幾何知識相結合。例如一塊矩形的土地，長為 $a$ 尺，寬為 $b$ 尺，那末周圍長是 $2 \times (a+b)$ 尺；面積是 $a \times b$ 平方