★ 工程数学丛书

# 复变函数与积分变换（第二版）

● 华中科技大学数学系

高等教育出版社

工程数学丛书

# 复变函数与积分变换

第二版

华中科技大学数学系

李　红　谢松法

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

**图书在版编目（CIP）数据**

复变函数与积分变换/华中科技大学数学系.－2版.—北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7－04－011950－1

Ⅰ.复... Ⅱ.华... Ⅲ.①复变函数－高等学校－教材②积分变换－高等学校－教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第037804号

**责任编辑**：徐　可　　**封面设计**：王凌波
**版式设计**：杨　明　　**责任印制**：陈伟光

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010－64054588 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街4号 | **免费咨询** | 800－810－0598 |
| **邮政编码** | 100011 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010－82028899 | | http://www.hep.com.cn |
| **经　　销** | 新华书店北京发行所 | | |
| **印　　刷** | 北京市鑫霸印务有限公司 | | |
| | | **版　　次** | 1999年8月第1版 |
| **开　　本** | 880×1230　1/32 | | 2003年6月第2版 |
| **印　　张** | 8.375 | **印　　次** | 2003年6月第1次印刷 |
| **字　　数** | 240 000 | **定　　价** | 15.00元 |

# 序

在高等学校理工科专业的数学教育体系中,“工程数学”一直是属于具有重要地位的课程系列. 当前,革新之风正吹遍高等教育界;课程重组、内容改造与学时调整的呼声日益高涨. 在此形势下,工程数学课程经受了严峻的考验,它作为学习现代科学技术所不可缺少的重要基础课,其地位丝毫没有动摇.

然而,这绝不意味着现存的“工程数学”课程体系已经完美无缺;更不意味着数学教育界除了墨守成规之外别无所为.恰好相反,面对现代科学技术飞速发展的形势,面对教育界对数学训练质量的愈来愈高的期待,数学工作者革新“工程数学”课程的任务更为紧迫!正是意识到时代的需要与自己的职责,我们全力推出这套“工程数学”教材呈献给读者.

华中科技大学数学系几十年来一直在组织力量探索“工程数学”课程的新的内容体系与教学方法,先后编写了百余万字的教材与讲义,在多年使用过程中不断提炼,逐步趋于完善. 应该说,本套教材正是这一长期探索过程的产物,它凝结了华中科技大学数学系几代教师的心血. 当然,具体执笔的教师对教材的最终成型作出了决定性的贡献.

本套教材先分《线性代数》、《概率论与数理统计》、《计算方法》、《复变函数与积分变换》和《数学物理方程与特殊函数》五册出版.编者在取材上充分考虑到新世纪对科技人员数学知识的要求;在内容处理上力求联系理工科专业的实际需要,注重培养学生的基本运算能力、分析问题与解决问题的能力;在表述上力求清晰易读,便于教学与自学. 本套教材配备了较丰富的例题与习题,它们大多源于教师在自身教学中的积累,既具有明显的启发性,又具有典型的应用意义. 书末所附的习题答案与提示供教师与学生在教学中参考. 本套教材可供高等学校理工科各专业(非数学)使用.

本套教材的编写自始至终得到华中科技大学教务处及数学系的支

持，也得到华中科技大学数学系全体教师的协助与鼓励. 高等教育出版社的宝贵支持，使本套教材得以顺利出版. 对此，我们一并表示衷心的感谢.

刘次华

2003 年 5 月于武汉

# 第二版前言

本书是在《复变函数与积分变换》(高等教育出版社 1999 年出版)的基础上,广泛吸取校内外教师的意见后修订而成的. 从这几年使用第 1 版教材的高校教师的反馈情况来看,普遍认为本教材取材合理、叙述清楚、简明精要、易于教学、每章后的小结便于学生提纲挈领地掌握本章内容. 因此,新版在主要内容和结构框架上未作大的改动,但从教学角度出发对语句进行了仔细的推敲,改写了一些陈述,调整了例、习题的配置.

总的来说,新版保持了原书简明精要、逻辑严谨、论述清晰、例习题丰富、实用性强、便于自学等特色. 另与本教材配套的学习辅导教材即将由高等教育出版社出版.

对曾使用过第 1 版教材的各位教师和读者表示衷心的感谢,正是依据你们使用后的意见,作者在第 2 版中修正了不少错漏,使得本书更趋完善.

本书共分九章,外加两个附录,其中第一、二、三、四、五及第七章由李红教授执笔;第六、八、九章及附录由谢松法副教授执笔. 胡适耕教授审阅、修改,并作了详尽的具体指导.

编者

2003 年 5 月于华中科技大学

# 第一版前言

复变函数课程的主要内容是讨论复数之间的相互依赖关系，其主要研究对象是解析函数.

复变函数论是一门古老而富有生命力的学科. 早在19世纪，Cauchy、Weierstrass及Riemann等人就已给这门学科奠定了坚实的理论基础. 作为一种有力的工具，复变函数论广泛地应用于自然科学的众多领域，如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、地质学及自动控制学等等.

一般而言，积分变换是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换. 这里所说的积分变换是指傅里叶变换与拉普拉斯变换，它与复变函数有着密切的联系. 它的理论与方法不仅在数学的许多分支中，而且在其它自然科学和各种工程技术领域中均有着广泛的应用，它已成为不可缺少的运算工具.

复变函数又称复分析，是实变函数微积分的推广与发展. 因此它不仅在内容上与实变函数微积分有许多类似之处，而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也很类似. 当然，复变函数也有自身的特点，有自己的研究工具和方法，在学习过程中，应注意与微积分理论的比较，从而加深理解，同时须注意复变函数本身的特点，并掌握它自身所固有的理论和方法.

积分变换与复变函数一样，也是在实变函数微积分的基础上发展起来的，因此在学习中也应特别注意分清异同点，这样才能抓住要点、融会贯通.

编写本书的主要目的是为理工科本科生提供一本比较系统完整的“复变函数与积分变换”教材. 编者一方面汇总了国内同类教材的主要优点；另一方面融合了我校众多教师长期讲授该门课程的经验体会. 力求思路清晰、推证简洁且可读性强，从而满足广大师生的教、学需求.

本书在每一章后精心设计了“小结”,可帮助读者更清楚明了地把握学习要点,更深刻地理解该章的主要学习内容.大部分章节还给出了思考题,帮助读者对所学内容进行检验,启发并训练读者的独立思考能力与分析能力.全书习题是经过教学实践中不断积累更新而成,其内容涵盖了全书主要讲授内容的基本概念、基本理论和基本方法.既有一般的基础习题,也有难度较大的提高题. 书末除对计算题给出答案外,还对有些必要的难题给出了提示,其目的在于帮助读者尽快掌握本书所讲授的内容.

本书适当地介绍了本学科与其它学科之间的联系,给出了一些实际应用问题以帮助读者加深对课程的理解,培养解决实际问题的能力,从而达到学为所用的最终目的.

目录中打“*”号的章节,可根据各专业的不同需要选用.在本书的完成过程中,自始至终得到了本校数学系领导和同仁们的大力支持,没有他们的热情鼓励和帮助,本书不可能如期顺利出版,在此向他们表示衷心的感谢!

本书共分九章,外加两个附录,其中第一、二、三、四、五及第七章由李红副教授执笔;第六、八、九章及附录由谢松法副教授执笔.胡适耕教授审阅、修改,并作了详尽的具体指导.

编者

# 目　　录

# 第一章　复数与复变函数

复变函数论中所研究的函数的自变量与因变量均取复数. 因此，首先对于复数域以及复变量的函数要有清晰的认识. 本章论述复数的基本概念、复数的四则运算、复数的三角表示、平面点集的一般概念及其复数表示，以及复变量连续函数. 复数的概念、四则运算以及三角表示在现行中学数学课本中已经涉及，但可能有的读者未曾学到，因此这里仍从头开始，由于复数全体可以同平面上的点的全体作成一一对应，所以平面点集以后经常要用到. 这里仅介绍平面点集的一般概念，学习将某些简单的平面点集用含复变数的等式或不等式来表示的方法. 关于复变函数，本章主要讨论连续函数的性质. 许多定义与结果形式上看与高等数学中所学的颇为相似，但意义已不尽相同. 希望读者在开始学习时就特别留意.

## §1.1　复　数

### §1.1.1　复数的基本概念

我们将形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为**复数**. 其中 i 称为**虚数单位**，并规定 $\mathrm{i}^2=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$，或 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$；$x$ 与 $y$ 是任意实数，依次称为 $z$ 的**实部**(Real)与**虚部**(Imaginary)，分别表示为

$$\mathrm{Re}\, z = x,\ \mathrm{Im}\, z = y.$$

例如，对复数 $z=\sqrt{2}+\mathrm{i}$，有

$$\mathrm{Re}\, z = \sqrt{2},\ \mathrm{Im}\, z = 1.$$

当 $y=0$ 时，$z=x+\mathrm{i}y=x+\mathrm{i}0$，我们就认为它是实数 $x$；当 $x=0$ 时，$z=x+\mathrm{i}y=0+\mathrm{i}y$，我们称它为**纯虚数**，并且就写作 $\mathrm{i}y$. 例如 $2+\mathrm{i}0$ 就是实数 2；$0+3\mathrm{i}$ 是纯虚数，可以写成 $3\mathrm{i}$；而 $0+0\mathrm{i}$ 即可看作实数 0，也可

以看作纯虚数 0i.

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数. 如果 $x_1=x_2, y_1=y_2$,则称 $z_1$ 与 $z_2$ **相等**. 由此得出,对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$, $z=0$ 当且仅当 $x=y=0$.

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是一个复数,称 $x-\mathrm{i}y$ 为 $z$ 的**共轭复数**,记作 $\bar{z}$. 易知 $\overline{(\bar{z})}=z$. 共轭复数有很多用处,后文将逐步介绍.

### § 1.1.2 复数的四则运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数. 定义复数的**加法**为:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2). \tag{1.1}$$

复数的**减法**是加法的逆运算. 如果存在复数 $z$ 使 $z_1=z_2+z$,则 $z=z_1-z_2$. 因此得到

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2). \tag{1.2}$$

定义复数的**乘法**为:

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.3}$$

例如

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})(4+5\mathrm{i}) &=[2\cdot 4-(-3)\cdot 5] \\ &\quad +\mathrm{i}[2\cdot 5+(-3)\cdot 4] \\ &=23-2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

由乘法定义可验证

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=(0+1\cdot\mathrm{i})(0+1\cdot\mathrm{i})=-1.$$

复数的**除法**是乘法的逆运算. 当 $z_2\neq 0$ 时,我们说:"$z_1$ 除以 $z_2$ 得到商 $z$",意思就是

$$z_1=z_2\cdot z.$$

从这个式子我们来求 $z$. 记 $z=x+\mathrm{i}y$. 由于

$$\begin{aligned}x_1+\mathrm{i}y_1 &=(x_2+\mathrm{i}y_2)(x+\mathrm{i}y) \\ &=(x_2x-y_2y)+\mathrm{i}(x_2y+xy_2),\end{aligned}$$

根据两个复数相等的定义,得到

$$x_1=x_2x-y_2y,\quad y_1=x_2y+xy_2,$$

由此解出

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

这就是说，当 $x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0$（这相当于 $x_2^2+y_2^2\neq 0$）时，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.4}$$

因可直接验证

$$z_2\bar{z}_2=x_2^2+y_2^2,\ z_1\bar{z}_2=x_1x_2+y_1y_2+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2),$$

从而(1.4)式可缩写成$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$. 形式上看，这个等式是很自然的，它不过是指明分式 $z_1/z_2$ 的分子分母同乘 $\bar{z}_2$（$z_2\neq 0$）分式值不变. 这一结论可用于复数除法的实际演算，即

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}&=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}\\&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.\end{aligned}$$

例如

$$\begin{aligned}\frac{3-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}&=\frac{(3-2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}\\&=\frac{(6-6)+\mathrm{i}(-4-9)}{2^2+3^2}=-\mathrm{i}.\end{aligned}$$

同实数的四则运算一样，复数加法满足结合律与交换律；复数乘法也满足结合律与交换律；加法与乘法满足分配律. 这些，读者都可自行验证（作为练习）.

最后，我们顺便介绍有关共轭复数的几个运算性质，读者很容易自己去验证（作为练习）.

$$\overline{(z_1\pm z_2)}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,$$

$$\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq 0),$$

$$z\bar{z}=x^2+y^2=[\operatorname{Re}z]^2+[\operatorname{Im}z]^2,$$

$$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ \operatorname{Im} z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}).$$

**例 1.1** 设 $z_1, z_2$ 是任意两个复数,求证:

$$2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2.$$

**证** 利用公式 $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$可算得

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)&=z_1\bar{z}_2+(\overline{z_1\bar{z}_2})\\&=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1\,\bar{\bar{z}}_2=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2.\end{aligned}$$

学习了以上两段以后,读者可仔细体会,以加深对复数的认识.最初当给出复数概念时,我们所知道的复数是什么?复数无非是一个实数 $x$ 同另一个实数 $y$ 用"i"及"+"连接而写成"$x+\mathrm{i}y$"这样一个形式的东西,"i"是什么,"+"是什么意思,都未加说明.后来,介绍了复数与实数的关系,复数与纯虚数的关系,又介绍了复数加法的定义.这样,我们也就可以把 $x+\mathrm{i}y$ 看成实数 $x$ 同纯虚数 $\mathrm{i}y$ 相加.其后,又定义了复数乘法.利用复数的加法与乘法,现在已可将复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 真正理解为虚数 i 乘 $y$,然后再加上 $x$ 的结果(注意 $x=x+\mathrm{i}0, y=y+\mathrm{i}0, \mathrm{i}=0+1\mathrm{i}$):

$$z=(x+0\mathrm{i})+(0+1\cdot\mathrm{i})(y+0\mathrm{i})=x+\mathrm{i}y.$$

历史上,当人们第一次引进$-1$的平方根并把它当作"数"的时候,是把它作为想像中的数,所以称为"虚数".后来就把形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数叫做复数,意思是"复合"起来的数.

### §1.1.3 复平面

一个复数 $x+\mathrm{i}y$ 可唯一地对应一个有序实数对$(x,y)$.而有序实数对与坐标平面上的点是一一对应的.所以,复数 $z$ 全体与坐标平面上的点的全体形成一一对应.现在我们直截了当地把坐标平面上的点写成 $x+\mathrm{i}y$ (图 1.1),那么,横轴上的点就表示实数,纵轴上的点就表示纯虚数.整个坐标平面可称为**复(数)平面**.今

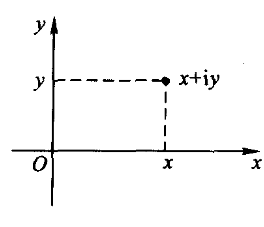


图 1.1

后我们索性将复数与复平面的点不加区分. 这种点、数等同将给我们带来许多方便. 在点、数等同的观点下，一个复数集合就是一个平面点集. 因此，很自然地，某些特殊的平面点集就可以用复数所满足的某种关系式来表示. 例如，

$$\{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$$

与

$$\{z : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1, 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\}$$

分别表示上半平面与以 0,1,1+i,i 为顶点的正方形.

# §1.2 复数的三角表示

## §1.2.1 复数的模与辐角

上面说过，复数与平面上的点作成一一对应，这是将复数实部与虚部分别看作直角坐标系下点的横坐标与纵坐标. 除此以外，复数还可以同平面向量作成对应，只要将复数的实部与虚部分别看作向量的水平分量与铅垂分量就行了. 所以我们也可以把复数与平面向量等同起来. 不过要注意，向量具有平移不变性，即其起点可安放在任意一点. 如果把向量的起点放在(复平面的)坐标原点，则此向量及向量的终点在上述两种对应下恰好对应同一个复数(图 1.2).

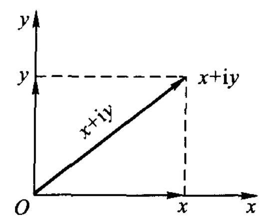


图 1.2

如果 $z$ 是一个不为 0 的复数，我们把它所对应向量的长度叫做 $z$ 的**模**，记作 $|z|$；把它所对应向量的方向角叫做 $z$ 的**辐角**. 辐角有无穷多个值，其中任意两个值相差 $2\pi$ 的整数倍. 今后，我们用记号 $\operatorname{Arg} z$ 作为 $z$ 的辐角的一般表示. 意思是它可以不受限制地取 $z$ 的辐角的任意值. 再用记号 $\arg z$ 表示 $z$ 的所有辐角中介于 $-\pi$ 与 $\pi$ 之间(包括 $\pi$)的那一个角，并把它称为 $z$ 的**主辐角**，即 $-\pi < \arg z \leqslant \pi$(顺便指出，有的书上

把 $z$ 的所有辐角中的非负最小值作为主辐角，也用记号 $\arg z$ 表示. 这样便有 $0 \leqslant \arg z < 2\pi$). 所以

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$$

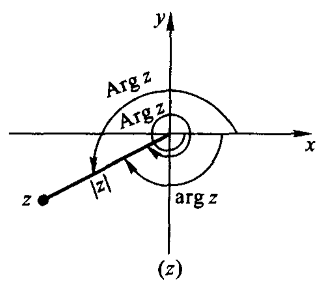


图 1.3

$k$ 是任意的整数(图 1.3). 当 $z=0$ 时，$|z|=0$，这时辐角没有意义. 对于共轭复数，我们有 $|z|=|\bar{z}|$ 以及 $\arg \bar{z}=-\arg z$（$z\neq 0$ 且不为负实数，对负实数有 $\arg \bar{z}=\arg z=\pi$). 对 $z=x+\mathrm{i}y$ 易验证

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2},$$

因此

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}.$$

由此推出

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

对于一个不为 0 的复数 $z=x+\mathrm{i}y$，它的实部与虚部同它的模与辐角之间有如下的关系. 一方面有

$$x = |z|\cos \operatorname{Arg} z, \quad y = |z|\sin \operatorname{Arg} z;$$

另一方面，反过来有

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

从而有明显的不等式

$$|x| \leqslant |z|, \ |y| \leqslant |z|, \ |z| \leqslant |x| + |y|.$$