研究生教学用书

学习辅导系列

矩阵论

学习辅导与典型题解析

林升旭

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书

学习辅导系列

矩阵论
学习辅导与典型题解析

△概述主要定义、定理与方法

△归纳解题技巧

△提高应试能力

林升旭

华中科技大学出版社

前 言

《矩阵论》是高等院校工科研究生的一门数学基础课，其理论和方法在科学和工程各个领域都有着广泛的应用，因而它是科学技术工作者必须掌握的一个数学工具。

由于教学学时所限，在大学本科“线性代数”课程的教学中只能侧重介绍代数矩阵的简单基本知识，而较少涉及抽象思维和推理方法。根据工科研究生的培养目标，一方面要求其掌握工程中需要的有关矩阵的数学方法，另一方面还应对其加强抽象思维和严谨的逻辑推理能力的训练，加强基础理论的应用，提高代数素质。矩阵论课程中概念多，理论性强，内容抽象，解题思路独特灵活，技巧性强，这的确给相当多的研究生的学习带来了一定困难。为此作者根据多年从事“线性代数”及“矩阵论”课程教学积累的经验，集思广益，精选了大量与主要教学内容相关的典型例题及历年来的考试题，分门别类，详尽解析。通过这些具有代表性的范例，强化学生对概念、定理的认识和理解，引导学生理清解题思路，熟练掌握主要运算方法和解题技巧，提高推理能力和计算能力，提高应试能力。

本书根据我校工科研究生“矩阵论”课程及国内大多数高等院校研究生“矩阵论”教材的主要内容编写而成，它是适应于40～50学时教学的一本辅导书，也是备考博士研究生的一本参考书。

作者在矩阵论教学和本书编写过程中，曾得到华中科技大学余鄂西教授、于寅教授的热情支持和帮助指教，在此表示衷心的感谢。

限于作者的水平，在编写中难免有错误不当之处，恳请读者赐教指正。

作者于华中科技大学

2003年5月

写在“研究生用书”出版15周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红。”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限。在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速。在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿。

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性全局性先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位。从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才。不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争。由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师。历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主。《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有依靠自己救自己。寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想。内因是发展的决定性的因素。当然，我们决不应该也决不可能“闭关锁国”，自我封闭，固步自封，而谋求发展，重犯历史错误。外因始终是发展的必要条件。正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己。这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才。何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此。人才，高级专门人才，拔尖创新人才，

是我们一切事业发展的基础。基础不牢，地动山摇；基础坚牢，大厦凌霄；基础不固，木凋树枯；基础深固，硕茂葱绿！

“工欲善其事，必先利其器。”自古凡事皆然，教育也不例外。教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一。“巧妇难为无米之炊”。特别是在今天，学科的交叉及其发展越来越多及越快，人才的知识基础及其要求越来越广及越高，因此，我一贯赞成与支持出版“研究生用书”，供研究生自己主动地选用。早在1990年，本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时，我就为此书写了个“代序”，其中提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。但这不等于他能在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面，他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面，他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生用书”的原因。今天，我仍然如此来看。

还应提及一点，在教育界有人讲，要教学生“做中学”，这有道理；但须补充一句，“学中做”。既要在实践中学习，又要在学习中实践，学习与实践紧密结合，方为全面；重要的是，结合的关键在于引导学生思考，学生积极主动思考。当然，学生的层次不同，结合的方式与程度就应不同，思考的深度也应同。对研究生特别是对博士研究生，就必须是而且也应该是“研中学，学中研”，在研究这一实践中，开动脑筋，努力学习，在学习这一过程中，开动脑筋，努力研究；甚至可以讲，研与学通过思考就是一回事情了。正因为如此，“研究生用书”就大有英雄用武之地，供学习之用，供研究之用，供思考之用。

在此，还应进一步讲明一点。作为一个研究生，来读“研究生用书”中的某书或其他有关的书，有的书要精读，有的书可泛读。记住了书上的知识，明白了书上的知识，当然重要；如果能照着用，当然更重要。因为知识是基础。有知识不一定有力量，没有知识就一定没有力量，千万千万不要轻视知识。对研究生特别是博士研究生而言，最为重要的还不是知识本身这个形而下，而是以知识作为基础，努力通过某种实践，同时深入独立思考而体悟到的形而上，即《老子》所讲的不可道的“常道”，即思维能力的提高，即精神境界的升华。《周易·系辞》讲了：“形而上谓之

道，形而下谓之器。”我们的研究生要有器，要有具体的知识，要读书，这是基础；但更要有“道”，更要一般，要体悟出的形而上。《庄子·天道》讲得多么好：“书不过语。语之所贵者意也，意有所随。意之所随者，不可以言传也。”这个“意”，就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”，就是“道”，就是形而上。它比语、比书，重要多了。要能体悟出形而上，一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础，一定要在读书去获得知识时，整体地读，重点地读，反复地读；整体地想，重点地想，反复地想。如同韩愈在《进学解》中所讲的那样，能“提其要，钩其玄”，以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会，妙处难与君说”的体悟，化知识为己之素质，为“活水源头”。这样，就可驾驭知识，发展知识，创新知识，而不是为知识所驾驭，为知识所奴役，成为计算机的存储装置。

这套“研究生用书”从第一本于1990年问世以来，到明年，就经历了不平凡的15个春秋。从研究生教育开始以来，我校历届领导都十分关心研究生教育，高度重视研究生用书建设，亲自抓研究生用书建设；饮水思源，实难忘怀！“逝者如斯夫，不舍昼夜。”截至今天，“研究生用书”的出版已成了规模，蓬勃发展。目前已出版了用书69种，有的书发行了数万册，有22种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖，有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材，有20种一印再印，久销不衰。采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信，称赞此书为研究生培养与学科建设作出了贡献。我们深深感激这些鼓励，“衷心藏之，何日忘之?!”没有读者与专家的关爱，就没有我们“研究生用书”的发展。

唐代大文豪李白讲得十分正确：“人非尧舜，谁能尽善?”我始终认为，金无足赤，物无足纯，人无完人，文无完文，书无完书。“完”全了，就没有发展了，也就“完”蛋了。江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻：“实践没有止境，创新也没有止境。”他又指出，坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进。这套“研究生用书”更不会例外。这套书如何？某本书如何？这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足，必然会有。但是，我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进，与时俱进，奋发前进。我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教，及时批评。当局者迷，兼听则明；“嘤其鸣矣，求其友声。”这就是我们肺腑之言。当然，在这里，还应该深深感谢“研究生用书”的作者、审阅者、组织(华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员)与出版者(华中科技大学出版社的编

辑、校对及其全体同志们)；深深感谢对“研究生用书”的一切关心者与支持者，没有他们，就决不会有今天的“研究生用书”。

我们真挚祝愿，在我们举国上下，万众一心，在“三个代表”重要思想指引下，努力全面建设小康社会，加速推进社会主义现代化，为实现中华民族伟大复兴，“芙蓉国里尽朝晖”，这一壮丽事业中，让我们共同努力，为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才，完成历史赋予研究生教育的重大任务而作出应有的贡献。

谨为之序。

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
2003年7月于喻园

符号说明

$R(C)$	实(复)数域
$R^n(C^n)$	实(复)n 维向量空间
$R^{m\times n}(C^{m\times n})$	实(复)矩阵空间
$P_n[x]$	次数不大于 $n-1$ 的一元多项式空间
$V_n(F),(V_n)$	数域 F 上的 n 维线性空间
$R(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域,$\boldsymbol{A}$ 的像空间
$N(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间
$R(T)$	线性变换 T 的值域,T 的像空间
$N(T),\mathrm{Ker}(T)$	线性变换 T 的零空间,线性变换 T 的核
$L[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$	由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成(张成)的子空间
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$W_1\cap W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的交空间
W_1+W_2	子空间 W_1 与 W_2 的和空间
$W_1\oplus W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的直和
$W^\perp$	子空间 W 的正交补
$\boldsymbol{A}^\mathrm{H}$	对 $\boldsymbol{A}$ 施行共轭转置运算,即 $\boldsymbol{A}^\mathrm{H}=\bar{\boldsymbol{A}}^\mathrm{T}$
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$,或 $\det\boldsymbol{A}$	方阵 A 的行列式
$\boldsymbol{J}$	Jordan 标准形矩阵
$\boldsymbol{A}^*$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\boldsymbol{E}_{ij}$	第 i 行第 j 列元素为 1,其余元素为零的矩阵
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	方矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹,即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素之和
$r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\rho(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为对角元素的对角矩阵
$\boldsymbol{A}_L^{-1}$	$\boldsymbol{A}$ 的左逆
$\boldsymbol{A}_R^{-1}$	$\boldsymbol{A}$ 的右逆
$\boldsymbol{A}^+$	$\boldsymbol{A}$ 的 M-P 广义逆
$\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^-$	$\boldsymbol{A}$ 的 1-逆或减号逆
$\boldsymbol{e}_i$	第 i 分量为 1,其余为 0 的 n 维向量
$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积

$\|\alpha\|$	向量 α 的长度
$\\|A\\|$	矩阵 A 的范数
$\\|X\\|_p$	向量 X 的 p 范数
$\\|X\\|_F$	X 的 Frobenius 范数

目　录

第一章　线性空间与线性变换

线性空间是某一类事物从量方面的一个数学抽象，线性变换则是反映线性空间元素之间最基本的线性函数关系，它们是研究线性代数的理论基础. 理解本章的主要概念，掌握基本定理、结论和方法，对学好矩阵论起着关键的作用.

§1.1　线性空间，基、维数及坐标

一、线性空间与子空间

[内容提要]

1. 线性空间

定义 1.1　设数域为 F，在非空集合 V 中，定义加法运算 $\forall\ \alpha,\beta\in V$，有 $\alpha+\beta\in V$；数乘运算 $\forall\ k\in F$，$\forall\ \alpha\in V$，有 $k\alpha\in V$，并且满足下面八条运算法则：

(1) 加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) 加法结合律：$(\alpha+\beta)+r=\alpha+(\beta+r)$；

(3) V 中零元存在 $\exists\ \alpha_0\in V$，$\forall\ \alpha\in V$，$\alpha+\alpha_0=\alpha$，记 $\alpha_0=\mathbf{0}$；

(4) 负元存在 $\forall\ \alpha\in V$，$\exists\ \beta\in V$，使 $\alpha+\beta=\mathbf{0}$，记 $\beta=-\alpha$；

(5) 数域 F 中存在单位元，$1\cdot\alpha=\alpha$；

(6) 数乘结合律：$(kl)\alpha=k(l\alpha)$，　$k,l\in F$；

(7) 分配律：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；　　(1.1-1)

(8) 分配律：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$，

则称 V 为数域 F 上的线性空间，或称为向量空间，V 中元素称为向量. 若 F 为实(复)数域，称 V 为实(复)线性空间.

线性空间 V 中的零元素是惟一的，任一元素的负元也是惟一的，若 $k\alpha=\mathbf{0}$，则 $k=0$ 或 $\alpha=\mathbf{0}$.

2. 子空间

定义 1.2　设数域 F 上的线性空间为 V，W 是 V 的非空集合，若 W 中的所有元素关于 V 中的加法与数乘运算也构成线性空间，则称 W 是 V 的一个子空间.

定理 1.1　设 $W\subseteq V$，则 W 是 V 的子空间的充分必要条件是

(1) $\forall\ \alpha,\beta\in W$，则 $\alpha+\beta\in W$（加法运算封闭）；

(2) $\forall\ \alpha\in W$，$\forall\ k\in F$，则 $k\alpha\in W$（数乘运算封闭）.

定义 1.3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是线性空间 V 的一组向量，它们的线性组合构成的集合，记为

$$L[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\}$$

是 V 的一个子空间，称为由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 称为生成元.

[**典型题解析**]

判别一个集合是否构成线性空间，首先要验证定义的加法运算与数乘运算是否封闭，其次再考查八条运算法则是否成立. 如果加法、数乘运算之一不封闭，或八条运算法则之一不成立，则其集合不是线性空间.

例 1.1-1 判断下列集合是否构成线性空间.

(1) 在 xoy 平面上第一卦限的二维向量的集合 V_1.

(2) 在实数域 R 上，集合 $V_2=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=0\}$.

(3) 在复数域 C 上，n 阶 Hermite 矩阵的集合

$$V_3=\{A\mid A^{\mathrm{H}}=A\}.$$

(4) 在实数域 R 上，与 n 阶矩阵 A 乘法可交换的矩阵集合

$$V_4=\{X_{n\times n}\mid AX=XA,A\in R^{n\times n},X\in R^{n\times n}\}.$$

解 (1) V_1 不是线性空间. 因为 $\alpha=(x_1,x_2)\in V_1$，但 $-\alpha\notin V_1$，即 V_1 中无负元.

(2) V_2 不是线性空间. 取 $\alpha=(1,0,\cdots,0)$，$\beta=(0,1,\cdots,1)\in V_2$，$\alpha+\beta=(1,1,\cdots,1)$，其分量之积 $x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=1$，因而 $\alpha+\beta\notin V_2$，加法不封闭.

(3) V_3 不是线性空间. 对于数乘运算，$k\in C$，$A\in V_3$，$(kA)^{\mathrm{H}}=k^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}=\bar{k}A\neq kA$，$kA\notin V_3$.

(4) V_4 是线性空间. 设 $X_1,X_2\in V_4$，即 $AX_1=X_1A$，$AX_2=X_2A$，有

$$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=X_1A+X_2A=(X_1+X_2)A,$$

即 $X_1+X_2\in V_4$，加法运算封闭. 对 $X\in V_4$，$k\in R$，

$$A(kX)=kAX=k(XA)=(kX)A,$$

即 $kX\in V_4$，数乘运算封闭. 由于矩阵运算满足定义 1.1 的八条运算法则，故 V_4 是一个线性空间.

例 1.1-2 在实数域 R 上，二维向量集合 $V=\{\alpha=(x_1,x_2)\}$，定义如下的加法运算与数乘运算：对于 $\alpha=(a_1,b_1)$，$\beta=(a_2,b_2)$，

$$\alpha\oplus\beta=(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$

$$k\odot\alpha=k\odot(a_1,b_1)=\left[ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right].$$

证明：V 是一个线性空间.

证 易证 $\alpha\oplus\beta\in V$，$k\odot\alpha\in V$，即加法与数乘运算封闭. 下面检验八条运算法则成立.

① $\alpha\oplus\beta=(a_1+a_2\ b_1+b_2+a_1a_2)=(a_2+a_1,b_2+b_1+a_2a_1)=\beta\oplus\alpha$.

② 令 $\boldsymbol{r}=(a_3,b_3)$，于是有

$$\alpha\oplus(\beta\oplus\boldsymbol{r})=(a_1,b_1)\oplus(a_2+a_3,b_2+b_3+a_2a_3)=$$
$$(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3+a_2a_3+a_1a_2+a_1a_3)=$$
$$[(a_1+a_2)+a_3,(b_1+b_2)+a_1a_2+b_3+(a_1+a_2)a_3]=$$
$$(\alpha\oplus\beta)\oplus\boldsymbol{r}.$$

③ 检验零元存在性：由 $\alpha\oplus\beta=\alpha$，则 β 为零元.

$$(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)=(a_1,b_1)$$

即 $a_1+a_2=a_1,b_1+b_2+a_1a_2=b_1$，解得 $a_2=0,b_2=0$，故 $\beta=(0,0)$是 V 的零元.

④ $\forall\ \alpha\in V$，由 $\alpha\oplus\beta=\mathbf{0}$，得

$$(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)=(0,0)$$

即 $a_1+a_2=0,b_1+b_2+a_1a_2=0$，解得 $a_2=-a_1,b_2=-b_1+a_1^2$，

故　$\beta=(-a_1,a_1^2-b_1)$是 α 的负元.

⑤ $1\odot\alpha=\alpha$.

⑥ $$(kl)\odot\alpha=\left[kla_1,klb_1+\frac{kl(kl-1)}{2}a_1^2\right]=$$
$$\left\{k(la_1),k\left[lb_1+\frac{l(l-1)}{2}a_1^2\right]+\frac{k(k-1)}{2}l^2a_1^2\right\}=$$
$$k\odot(l\odot\alpha).$$

⑦ $$(k+l)\odot\alpha=\left[(k+l)a_1,(k+l)b_1+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a_1^2\right]$$

而　$$(k\odot\alpha)\oplus(l\odot\alpha)=\left[ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right]\oplus\left[la_1,lb_1+\frac{l(l-1)}{2}a_1^2\right]=$$
$$\left[ka_1+la_1,kb_1+lb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2+\frac{l(l-1)}{2}a_1^2+kla_1^2\right]=$$
$$\left[(k+l)a_1,(k+l)b_1+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a_1^2\right],$$

故有$(k+l)\odot\alpha=(k\odot\alpha)\oplus(l\odot\alpha)$.

⑧ $$k\odot(\alpha\oplus\beta)=k\odot(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)=$$
$$\left[ka_1+ka_2,kb_1+kb_2+ka_1a_2+\frac{k(k-1)}{2}(a_1+a_2)^2\right]=$$
$$\left[ka_1+ka_2,kb_1+kb_2+\frac{k(k-1)}{2}(a_1^2+a_2^2)+k^2a_1a_2\right].$$

$$k\odot\alpha\oplus k\odot\beta=\left[ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right]\oplus\left[ka_2,kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2\right]=$$
$$\left[ka_1+ka_2,kb_1+kb_2+\frac{k(k-1)}{2}(a_1^2+a_2^2)+k^2(a_1a_2)\right].$$

故有　$k\odot(\alpha\oplus\beta)=(k\odot\alpha)\oplus(k\odot\beta)$，即八条运算法则皆成立，$V$ 在实域 R 上构成

线性空间.

注意到一个线性空间的零元与负元是由定义的加法与数乘运算所确定的. 例如正实数集合 R^+，定义了加法 $\forall\ a,b\in R^+, a\oplus b=ab$，数乘 $k\odot a=a^k$，则可验证 R^+ 是一个线性空间. 由于

$$a\oplus 1=a\cdot 1=a;a\oplus a^{-1}=a\cdot a^{-1}=1,$$

故 1 是 R^+ 空间的零元，而 a^{-1} 是 a 的负元.

例 1.1-3　判别下列集合是否构成子空间.

(1) $W_1=\{\alpha=(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1, R\text{ 为实数域}\}$.

(2) $W_2=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}\}$.

(3) R^3 中，$W_3=\{\alpha=(x_1,x_2,x_3)\mid \int_0^t(x_1\tau^2+x_2\tau+x_3)\mathrm{d}\tau=0\}$.

(4) $W_4=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\mid \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=0,\boldsymbol{A}\in R^{m\times n}\}$.

由子空间的判定定理知，要判别线性空间的子集 W 是否构成线性子空间，只要验证 W 中向量对加法与数乘运算是否封闭.

解　(1) W_1 不是 R^3 的子空间. 因为加法或数乘运算不封闭. 例如 $k=2,\alpha=(1,0,0), k\alpha=(2,0,0), x^2+y^2+z^2=4>1, k\alpha\overline{\in} W_1$.

(2) W_2 不是 $R^{n\times n}$ 的子空间. 因为零矩阵 $\boldsymbol{0}\overline{\in} W_2$.

(3) W_3 是一个子空间. 设 $\forall\ \alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3)\in W_3$，即有 $\int_0^t(x_1\tau^2+x_2\tau+x_3)\mathrm{d}z=0,\int_0^t(y_1\tau^2+y_2\tau+y_3)\mathrm{d}\tau=0$，对于

$\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$，有 $\int_0^t[(x_1+y_1)\tau^2+(x_2+y_2)\tau+(x_3+y_3)]\mathrm{d}\tau$

$=\int_0^t(x_1\tau^2+x_2\tau+x_3)\mathrm{d}\tau+\int_0^t(y_1\tau^2+y_2\tau+y_3)\mathrm{d}\tau=0$

即 $\alpha+\beta\in W_3$，同理可证　$k\alpha\in W_3$，满足加法运算和数乘运算封闭性，故 W_3 是子空间.

(4) W_4 是一个子空间. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}\in V_4,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$，则

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=0$$

即有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in W_4$，同样由于 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$，

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}ka_{ij}=k\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=k0=0$$

即有 $k\boldsymbol{A}\in W_4$. 加法运算和数乘运算封闭，故 W_4 是一个子空间.

二、线性空间的基，维数与坐标

［内容提要］

1. 空间的基，维数

定义 1.4　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 中的 n 个线性无关向量，若 $\forall\ \alpha\in V$，α 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性表示：

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,$$

称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基，称 n 为 V 的维数，则称 V 为 n 维线性空间，记为 $\dim V=n$，常常把 V 记为 V_n.

定理 1.2(基判别定理)　n 维线性空间 V_n 中任 n 个线性无关的向量都是 V_n 的基.

定理 1.3(扩基定理)　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r<n)$ 是 n 维线性空间 V_n 的 r 个线性无关的向量，则在 V_n 中存在 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成 V_n 的一组基.

常用空间的标准基：

(1) 向量空间 $C^n(R^n)$ 的标准基(或自然基)

$$e_1,e_2,\cdots,e_n,\text{其中 } e_i=(\underbrace{0,\cdots 0,1}_{i},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 多项式空间 $P_n[x]$ 的基：$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$.

(3) 矩阵空间 $C^{m\times n}$ 的基：

$$E_{ij},i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n.$$

其中 E_{ij} 表示其矩阵元素在第 i 行第 j 列位置上为 1，其他皆为 0.

$$\dim C^{m\times n}=mn.$$

(4) 生成空间的基，维数

生成空间 $W=L[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$ 中，生成元 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中的一个极大无关组 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 是 W 的一组基，$\dim W=r$.

两个极为重要的子空间 $R(A)$，$N(A)$：

定义 1.5　$A\in C^{m\times n}$，A 列分块为 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，记

$$R(A)=\{Y\mid Y=AX,\forall\ X\in C^n\}=\{Y=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n\}=L[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n],$$

称 $R(A)$ 为 A 的列空间，或称 $R(A)$ 为 A 的像空间.

$$N(A)=\{X\mid AX=0,X\in C^n\},$$

称 $N(A)$ 为矩阵 A 的零空间，即为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间.

若 A 的秩 $r(A)=r$，且设 $AX=0$ 的基础解系为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$，则 $N(A)=L[X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}]$，