高等数学概念剖析是非题选择题

王华荣　褚衍东编

西南交通大学出版社

高 等 数 学

概念剖析 是非题 选择题

王华荣　褚衍东　编

陆吉祥　王志超　审

西南交通大学出版社

新登字(川)018号

高等数学概念剖析是非题选择题

王华荣　褚衍东　编

•

西南交通大学出版社出版发行

（四川成都九里堤）

四川省新华书店经销

郫县印刷厂印刷

•

开本：787×1092　1/32　印张：12.5625　字数：276千字

印数：1—4000册　1992年8月第1版　1992年8月第1次印刷

ISBN7—81022—378—X/O.017

定价：5.60元

前　言

高等数学是工科院校的一门重要基础课．为了使读者加深对这门课程基本概念和基本理论的理解，提高他们分析、思考和解决问题的能力，编者整理了历年积累的教学资料，以是非题、选择题的客观题形式奉献给读者．书中列举的问题，大部分是初学者学习信息的反馈，这些问题同时也是教学过程中容易忽视的地方．本书内容取舍以国家教委颁布的《高等数学课程教学基本要求》为依据，编排体系参照同济大学数学教研室主编的《高等数学》（第三版）．

本书有以下特点：

（1）针对性强．每章的概念剖析将这一章中重要的概念，或初学者感到困惑、易产生错误的问题进行辨伪剖析，强化对基本概念、重要结论、典型方法的理解与记忆．

（2）说理透彻．对于正确的陈述，从多方面进行深入浅出的剖析，还提出了应该注意的问题．对于不真的陈述，举出了恰当的反例．

（3）题型新颖．书中题目，有些选自兄弟院校编写的教材，有些是近年来硕士研究生入学试题，还有一部分题目是编者根据教学中反馈的问题，自己编撰而成．

中国数学会理事、西北师范大学教授丁传松，甘肃省数学会副理事长、甘肃教育学院教授蔡伟阅读了本书的初稿，提出过许多宝贵的意见．兰州铁道学院数学教研室对编写工

作给予了大力支持．在此，一并表示诚挚的感谢．

编者力图通过本书，对高等数学的教学做些微薄贡献，但因水平所限，书中缺点与不足在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

1992 年 1 月

目　　录

第一章 函数 极限 连续

函数是高等数学研究的主要对象．极限方法作为数学分析的一种基本方法，应用于高等数学的所有部分．连续性是函数的一种重要性质，这种性质几乎在高等数学的每一章节都要遇到．正确地理解并掌握函数、极限和函数连续性等概念及其性质，对学好高等数学十分重要．

概念剖析

1．确定一个函数的根本要素是定义域及函数关系f．在高等数学的学习中，必须特别重视复合函数与分段函数这两类函数．

(1) 复合函数　函数$y=f(u)$ ($u\in D_f$)与$u=\varphi(x)$ ($x\in D_\varphi$)的复合是有条件的．当且仅当内函数$\varphi(x)$的值域R_φ与外函数$f(u)$的定义域D_f的交集合非空，即$R_\varphi\cap D_f\neq\phi$时，$f[\varphi(x)]$才有意义．例如函数$y=\arcsin u$与$u=2+x^2$不能复合成一个复合函数，因为$R_\varphi=[2,+\infty)$，而$D_f=[-1,1]$，$R_\varphi\cap D_f=\phi$，所以$\arcsin(2+x^2)$没有意义．更多的时候则是需要把一个复合函数分解为若干个基本初等函数．灵活地掌握函数的“分”与“合”，对学好微积分有很大帮助．

我们还常遇到函数关系f的一些运算，这种运算的实质是函数的复合运算，例如

$$f(x)=\frac{1}{x+1},\quad f[f(x)]=\frac{x+1}{x+2}$$

复合函数$f[f(x)]$的定义域应为$x\neq-1$，$x\neq-2$。

（2）分段函数　分段函数是一个函数，不是几个函数．有些函数例如$f(x)=x|x|$，$g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$等，形式上虽然不是分段函数，实际上为分段函数。对于分段函数，要注意区别分段点两侧函数解析式的特征，分段点处函数是否有定义，以及是否连续、可导等．

一般情况下，分段函数不是初等函数，但也有例外，例如

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(x+1-\sqrt{(x-1)^2}\right)$$

$$=\begin{cases}x, & x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

2．数列极限和函数极限的严格定义是用“ε—N”，“ε—δ”语言给出的，这种定义不仅精确地刻划了极限过程中诸变量之间的变化状态，表达了极限概念的本质，同时为极限性质的严格证明、极限存在准则的建立等奠定了基础，现以数列极限为例，分析极限定义的本质．

数列x_n的“ε—N”定义由任意给定的$\varepsilon>0$，及相应的$N>0$所确定的两个不等式

$$n>N,\quad |x_n-a|<\varepsilon$$

组成．$|x_n-a|<\varepsilon$描述了x_n与a无限接近的特征，而$n>N$则

保证了这种无限接近的可能. ε与N是数列极限定义中两个重要的"标记"，要准确理解它们的作用.

(1) $\varepsilon>0$的作用　ε用来衡量x_n与a接近的程度，它既是任意的，又是给定的. 由于ε是任意的，才能由$|x_n-a|<\varepsilon$反映出数列x_n与a的无限接近. 否则，即使ε非常小，如$\varepsilon=0.000\,01$，也只能说明数列x_n从某项以后有$|x_n-a|<0.000\,01$，并不表明x_n与a无限地接近. ε又是给定的，只有给定，才能对$x_n\to a$的过程进行定量分析. 如果ε只有任意性，其值不确定，就无法入手对极限过程进行定量分析. ε这种任意、给定的二重特性，体现了数列x_n逼近数a是一个无限过程，并且这一过程需要逐步实现.

(2) N的作用　N是保证$|x_n-a|<\varepsilon$成立的一个时刻（即至少从第N项以后，…）. N由ε确定，但不是被ε唯一确定. 对任意给定的$\varepsilon>0$，若已经找到相应的某个N，那末$N+1$，$N+2$，…都可以充当N的角色，即只要N的存在，而无需找最小的N. 这正是证明极限时，为什么可以采取适当放大不等式方法的原因所在.

N的存在性是确定数列x_n是否无限接近于数a的条件. 如果对于某个给定的$\varepsilon_0>0$，及任何自然数N，都至少存在一个$n_0>N$，使$|x_{n_0}-a|>\varepsilon_0$成立，这时数列$x_n$不以$a$为极限.

(3) 寻找N的思路　任意给定$\varepsilon>0$，由不等式$|x_n-a|<\varepsilon$出发，从中"解"出满足该不等式的n. 若解得$n>N(\varepsilon)$，取$N\geqslant N(\varepsilon)$即可. 具体做法是先对$|x_n-a|$化简、整理，或适当放大，得到$|x_n-a|<X(n)$. 然后使$X(n)<\varepsilon$，解出$n>N(\varepsilon)$. 以上寻找$N$的过程必须是可逆的，否则对于得到的$N$，不能保证$n>N$时有$|x_n-a|<\varepsilon$成立.

例 1 设数列$x_n=\frac{n^2+1}{n^2-n}$（$n=2，3，\cdots$），证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

错误证法：要使$|x_n-1|=\frac{n+1}{n(n-1)}<\varepsilon$，只要

$$n+1<n(n-1)\varepsilon<n(n+1)\varepsilon,$$

即$n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时，$|x_n-1|<\varepsilon$成立.

错误之一，没有交待ε是任意给定的正数；之二，显然$\frac{1}{n}<\frac{n+1}{n(n-1)}$，因此$\frac{1}{n}<\varepsilon$不能保证$\frac{n+1}{n(n-1)}<\varepsilon$成立，或者说，这里求N的过程不可逆.

正确证法：对于任意给定的$\varepsilon>0$，欲使$|x_n-1|<\varepsilon$，因为

$$|x_n-1|=\frac{n+1}{n(n-1)}<\frac{2}{n},$$

所以只要$\frac{2}{n}<\varepsilon$，或$n>\frac{2}{\varepsilon}$。取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时，有

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

成立。即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

3. 求数列极限与函数极限是本章的重点. 在求极限的过程中，应当注意各种方法使用的前提，防止出错.

(1)极限的四则运算法则是充分条件，不能直接用于$\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型、$\infty-\infty$型、$0\cdot\infty$型等不定式。对于这几种情形，一般先通过分解因式、分子分母有理化、通分合并等方法，消除“不定性”，然后再用法则求极限.

(2)利用两个重要极限的结论求极限时，必须将所求函数的极限化为重要极限的形式，即，若设$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，且在点$x_0$的某空心邻域内$\alpha(x)\neq 0$(参考本章是非题58题)，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e.$$

例2 求$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\mathrm{sim}\frac{1}{x}$.

错误解答：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

其实，上式第二个极限不是重要极限.

正确做法：利用有界量与无穷小量之积是无穷小量的结论，得

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例3 求$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

错误解答：$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}=e$.

错误在于$x\to 0$时，底中无穷小部分$(-2x)$与指数中无穷大部分$\frac{1}{x}$不是互为倒数.

正确解答：

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim_{x\to 0}\left((1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-2}=e^{-2}.$$

(3)使用等价无穷小代替求极限时，整个分子或分母应该同时用该极限过程中同阶的等价无穷小去代替．若分子或分母是几个无穷小的代数和时，代替每项的等价无穷小阶数必须与同一极限过程中整个分子或分母的无穷小阶数相同．一般的，化成仅有乘或除的情况再用等价无穷小代替．

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

错误解答：因为$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\operatorname{tg}x\sim x$，所以得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

实际上，这个极限值是$\frac{1}{2}$．由于$x\to 0$时，分母是x的三阶无穷小，如果函数的极限存在，那末分子至少是关于x的三阶无穷小．可见，替代$\sin x\sim x$，$\operatorname{tg}x\sim x$是不合理的．

正确解法：

由 $$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),$$

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

有 $$\operatorname{tg}x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+o(x^3).$$

∴ $$\operatorname{tg}x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3.$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

(4) 求分段函数在分段点处的极限时，若分段点两侧的函数解析式不相同，应分别求出函数在该点的左、右极限，再判断函数在分段点处的极限是否存在.

例5 设函数$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

错误解答：因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^x=1$，又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(x+1)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

错误在于没有注意到$f(x)$在点$x=0$两侧的解析式不同，因此对x趋于零的方向未加区分.

正确解法：

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0} e^x=1,$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(x+1)=1,$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

（5）利用复合函数的连续性，可以简化求极限的运算，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$. 这里函数 $f(u)$ 的连续性条件不可缺少，否则，计算结果错误.

例 6 设函数 $f(u)=\begin{cases} u^2, & u\neq 1, \\ 0, & u=1, \end{cases}$ $u=\varphi(x)=x^2$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f[\varphi(x)]$.

错误解答：
$$\lim_{x\to 1} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to 1}\varphi(x)]$$
$$=f(1)=0.$$

注意到函数 $f(u)$ 在点 $u=1$ 处不连续，所以复合运算与极限运算不能交换次序．实际上，由于

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} x^4, & |x|\neq 1, \\ 0, & |x|=1, \end{cases}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1} f[\varphi(x)]=1$.

采用变量替换方法求函数的极限时，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且$f(u)$在点$u_0$连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0).$$

使用变量替换时，必须检查$f(u)$在点u_0处的连续性，否则将导致错误.

4. 函数$f(x)$在点x_0处连续，应同时具备$f(x_0)$有意义、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在及$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$三个条件，缺一不可. 必须强调指出，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$时不表示$f(x)$在点$x_0$连续，只有$A=f(x_0)$即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$时，才能确认$f(x)$在点$x_0$处连续. 若$f(x)$不满足上述三个条件之一，那末它在点$x_0$处不连续，点$x_0$就是$f(x)$的间断点.

如果$f(x)$是初等函数，使$f(x)$无定义的点就是该函数的间断点，如果$f(x)$是分段函数，分段点极有可能是间断点，应分别求出函数在分段点处的左、右极限，进行判断.

例 7 设函数$f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1/x}}$，指出间断点并分类.

错误解答：点$x=0$是$f(x)$的间断点，又因$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，故$x=0$是可去间断点.