



普通高等教育“九五”教育部重点教材

解析几何

尤承业 编著

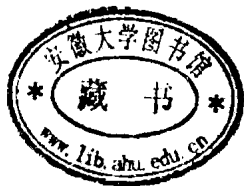


北京大学出版社

普通高等教育“九五”教目即王应怀制

解 析 几 何

尤承业 编著



北京 大 学 出 版 社

• 北 京 •

图书在版编目(CIP)数据

解析几何/尤承业编著. —北京: 北京大学出版社, 2004. 1

(普通高等教育“九五”教育部重点教材)

ISBN 7-301-04580-8

I. 解… II. 尤… III. 解析几何-高等学校-教材 IV. 0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 093174 号

书 名: 解析几何

著作责任者: 尤承业 编著

责任编辑: 邱淑清

标准书号: ISBN 7-301-04580-8/O · 0468

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村 北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn> 电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

排版者: 北京高新特打字服务社 51736661

印刷者: 北京大学印刷厂

经销者: 新华书店

850 毫米×1168 毫米 32 开本 10.25 印张 263 千字

2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 15.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,翻版必究

内 容 提 要

本书是学习几何学的入门教材。书中既讲解了空间解析几何的基本内容和方法(向量代数,仿射坐标系,空间的直线和平面,常见曲面等),又讲解了仿射几何学中的基本内容和思想(仿射坐标变换,二次曲线的仿射理论,仿射变换和保距变换等),还介绍了射影几何学中的基本知识,较好地反映了几何学课程的全貌。全书共分五章,每章内都附有一定数量的习题,书末附有习题答案和提示,便于读者深入学习或自学。

本书突出几何思想的教育,强调形与数的结合;方法上强调解析法和综合法并重;内容编排上采用“实例—理论—应用”的方式,具体易懂;内容选取上兼顾各类高校的教学情况,具有广泛的适用性。本书表达通顺,说理严谨,阐述深入浅出。因此,本书是一本颇具特色、为广大高校欢迎的解析几何课程教材。

本书可作为综合性大学和师范类大学数学系、物理系等相关学科的教材,对于那些对几何学有兴趣的大学生和其他读者也是一本适宜的课外读物或参考书。

北京大学出版社数学重点教材书目

1. 北京大学数学教学系列丛书

书 名	编著者	定价 (元)
高等代数简明教程(上、下)(北京市精品教材) (教育部“十五”规划教材)	蓝以中	32.00
实变函数与泛函分析	郭懋正	20.00
复分析导引	李 忠	15.00
黎曼几何引论(上册)	陈维桓 李兴校	24.00
黎曼几何引论(下册)	陈维桓 李兴校	16.00
金融数学引论	吴 岚	18.00
寿险精算基础	杨静平	17.00
二阶抛物型偏微分方程	陈亚浙	16.00
普通统计学(北京市精品教材)	谢衷洁	18.00
数字信号处理(北京市精品教材)	程乾生	20.00
抽样调查(北京市精品教材)	孙山泽	13.50
测度论与概率论基础(北京市精品教材)	程士宏	15.00
应用时间序列分析(北京市精品教材)	何书元	16.00

2. 大学生基础课教材

书 名	编著者	定价 (元)
数学分析新讲(第一册)(第二册)(第三册)	张筑生	44.50
数学分析解题指南	林源渠 方企勤	20.00
高等数学简明教程(第一册) (教育部 2002 优秀教材一等奖)	李 忠等	13.50
高等数学简明教程(第二册)(获奖同第一册)	李 忠等	15.00
高等数学简明教程(第三册)(获奖同第一册)	李 忠等	14.00
高等数学(物理类)(第一册)(第二册)(第三册)	文 丽等	50.00
高等数学(生化医农类)上册(修订版)	周建莹等	13.50

书 名	编著者	定价 (元)
高等数学(生化医农类)下册(修订版)	张锦炎等	13.50
高等数学解题指南	周建莹 李正元	25.00
高等数学解题指导——概念、方法与技巧(工科类)	李静主编	19.00
大学文科基础数学(第一册)(第二册)	姚孟臣	27.50
数学的思想、方法和应用(修订版) (北京市精品教材)(教育部“九五”重点教材)	张顺燕	24.00
简明线性代数(理工、师范、财经类)	丘维声	16.00
线性代数解题指南(理工、师范、财经类)	丘维声	15.00
解析几何(第二版)	丘维声	15.00
解析几何(教育部“九五”重点教材)	尤承业	15.00
微分几何初步(95 教育部优秀教材一等奖)	陈维桓	12.00
基础拓扑学讲义	尤承业	13.50
初等数论(第二版)(95 教育部优秀教材二等奖)	潘承洞 潘承彪	25.00
简明数论	潘承洞 潘承彪	14.50
实变函数论(教育部“九五”重点教材)	周民强	16.00
复变函数教程	方企勤	13.50
傅里叶分析及其应用	潘文杰	13.00
泛函分析讲义(上册)(91 国优教材)	张恭庆等	11.00
泛函分析讲义(下册)(91 国优教材)	张恭庆等	12.00
数值线性代数(教育部 2002 优秀教材二等奖)	徐树方等	13.00
现代数值计算方法	肖筱南等	15.00
数学模型讲义(教育部“九五”重点教材,获二等奖)	雷功炎	15.00
新编概率论与数理统计	肖筱南等	19.00
概率论与数理统计解题指导(工科类)	李寿梅等	13.00

邮购说明 读者如购买北京大学出版社出版的数学重点教材,请将书款(另加 15% 的邮挂费)汇至:北京大学出版社北大书店王艳春同志收,邮政编码:100871,联系电话:(010)62752015。款到立即用挂号邮书。

北京大学出版社展示厅
2003 年 7 月

前 言

几何学是一门古老而又保持着旺盛生命力的数学学科. 追溯历史, 它是分析、代数等许多数学分支产生和发展的基础和背景; 又是数学联系实际应用的重要桥梁. 它体现了形与数的结合, 演绎法与解析法的结合. 它的直观性、实验性的特点启示了许多新思想、新原理的诞生. 因此几何课程对于数学类专业大学生的综合素质的培养是十分重要的, 加强综合大学数学系几何课程的教学, 现在已经成为一种共识, 然而目前几何课程的安排还很薄弱. 为此, 解析几何课程担负着培养学生几何思想, 加强他们的几何观念的重要任务.

本书是为北京大学数学科学学院几何学课程的需要而编写的. “解析几何”(现在称为“几何学”)是数学科学学院为本院全体本科生开设的第一门几何学课程, 是我院的传统重要基础课. 本书编者从 1981 年起在北京大学数学系讲授本课程, 累计达十余次, 对该课程有着深刻的理解, 对课程内容的取舍, 对各部分内容的处理和讲解方法等方面都有着丰富的经验, 并积累了大量的素材. 在此基础上, 为适应教学改革的要求编写了这本新教材. 编写时我们也考虑了其他综合大学和师范院校的教学情况, 使得它有着广泛的适用性.

本书从内容上说不单是严格意义的空间解析几何(这部分内容只占一小半), 还包含有仿射几何和射影几何的内容. 欧氏几何(传统解析几何的内容)、仿射几何和射影几何在本书中是有机地联系起来的, 以仿射几何为主线, 欧氏几何作为其特殊情形, 射影几何看作其延伸.

加强对学生几何素质的培养是几何课程的重要目的, 也是编

写本书的指导思想. 所有重要概念的定义都是几何本义的(近些年的国内教材为了省事, 常常用代数方法定义几何概念). 还着重介绍了几个重要的几何思想, 如不变量、坐标变换和点变换、几何学的分类等等, 使得学生通过学习能加深对几何学的认识. 在方法上, 强调解析法与综合法并重, 并注重几何直观与推理能力的培养.

考虑到读者是刚刚跨进大学门的学生, 而几何学的有些理论对他们来说比较抽象, 编写本书时, 我们努力做到深入浅出, 使得学生容易理解接受. 我们采用“实例—理论—应用”的路线, 在引进新概念、新方法之前, 精选了生动有趣的例子, 展现出理论产生的背景, 理论的出现就显得自然, 容易理解和接受.

本书共分为五章.

第一二两章是空间解析几何部分, 类似于中学的平面解析几何, 一般学生不会感到很困难. 但是第一章中的向量法、仿射坐标系等对多数学生来说是新鲜事物. 第二章中讨论图形的方程是在仿射坐标系中进行的, 有别于中学, 这也是仿射几何的基础. 注意求图形的方程的轨迹法: 分析图形上的点的几何特征并用坐标表示出来, 得到图形的方程.

第三章介绍坐标变换, 并用其研究二次曲线. 这部分的计算有些繁杂, 学习时应着眼于问题的提出和解决的思路, 不要陷在繁杂的论证中, 迷失了方向(有的繁杂的论证可先撇开不看). 注意领会“不变量”这一重要的几何思想.

第四章讨论仿射变换(和其特殊情形: 保距变换). 这是仿射几何学的核心内容. 本章内容较前面的抽象, 方法上较多地运用逻辑推理, 因此难度较大, 但学生在学习中的提高也大. 本章建立了图形的等价、度量性质、仿射性质等概念, 并提出几何学的分类思想. 注意这些几何思想在解决几何问题中的应用.

第五章介绍射影几何的最基本的概念, 讨论几何图形的射影性质, 这些都是很抽象的内容. 学习这部分内容应该先从例子(本

章之初,我们以生动有趣的例子展现理论的背景)感受建立理论的目的,并了解其应用.还应注意和前几章的内容联系、比较.

本书的每一节都配有丰富的习题,其中包括一些有一定难度的题.在答案和提示中,给出了比较好的解题思路,力求自然、简洁.

解析几何是一学期的课程,根据我们以往教学实践的经验,在一学期内讲完本书的内容时间并不宽松.如果要想教学安排得从容些,建议可放弃第五章,或者用其中的例子扼要介绍该章的思想.在其他各章中,标有“*”号或排小字号的内容(它们或是比较复杂的论证,或是离开主线较远的内容),都可不讲,留给有兴趣的学生自己阅读.

编者在讲授该课程时,采用了北京大学数学系以前编写的两本同名教材(吴光磊、丁石孙、姜伯驹、田畴编著,解析几何,人民教育出版社,1961;丘维声编,解析几何,北京大学出版社,1996.),它们对编者几何学教学思想的形成和对本书的体系的影响是不言而喻的,本书的有些素材也是从这两本书中移植的.在此谨向这两本书的作者们深表感谢.段海豹教授和编者共同在北京大学数学学院讲授本课程,经常在一起研讨,使编者受益匪浅,在此谨向他表示衷心的感谢.数学学院的包志强等年轻教师也参与了本课程的教学,在此也向他们表示衷心的感谢.

还要感谢北京大学数学学院的历届学生们,历来教学相长,在形成本书的过程中,他们给了编者很多帮助.

本书的出版只是一个阶段教学实践的总结,但愿它能成为推动几何学课程和教材向前发展的良好的基础.但是由于编者个人的局限性,本书肯定会有许多不足之处,也难免会出现一些错误,欢迎广大读者批评指正.

尤承业
2003年3月

目 录

第一章 向量代数	(1)
§ 1 向量的线性运算	(1)
1.1 向量的概念、记号和几何表示	(1)
1.2 向量的线性运算	(3)
1.3 向量的分解	(7)
1.4 在三点共线问题上的应用	(9)
习题 1.1	(14)
§ 2 仿射坐标系	(17)
2.1 仿射坐标系的定义	(17)
2.2 向量的坐标	(19)
2.3 几何应用举例	(21)
习题 1.2	(24)
§ 3 向量的内积	(26)
3.1 向量的投影	(26)
3.2 内积的定义	(28)
3.3 内积的双线性性质	(29)
3.4 用坐标计算内积	(31)
习题 1.3	(33)
§ 4 向量的外积	(34)
4.1 三个不共面向量的定向	(34)
4.2 外积的定义	(35)
4.3 外积的双线性性质	(36)
4.4 用坐标计算外积	(37)
习题 1.4	(39)

§ 5	向量的多重乘积	(40)
5.1	二重外积	(40)
5.2	混合积	(41)
5.3	用坐标计算混合积	(42)
	习题 1.5	(45)
第二章	空间解析几何	(47)
§ 1	图形与方程	(47)
1.1	一般方程与参数方程	(47)
1.2	柱坐标系和球坐标系	(50)
	习题 2.1	(51)
§ 2	平面的方程	(53)
2.1	平面的方程	(53)
2.2	平面一般方程的系数的几何意义	(56)
2.3	平面间的位置关系	(57)
* 2.4	三元一次不等式的几何意义	(58)
	习题 2.2	(60)
§ 3	直线的方程	(62)
3.1	直线的两类方程	(62)
3.2	直线与平面的位置关系,共轴平面系	(65)
3.3	直线与直线的位置关系	(69)
	习题 2.3	(72)
§ 4	涉及平面和直线的度量关系	(76)
4.1	直角坐标系中平面方程系数的几何意义	(76)
4.2	距离	(76)
4.3	夹角	(80)
	习题 2.4	(81)
§ 5	旋转面、柱面和锥面	(84)
5.1	旋转面	(84)
5.2	柱面	(93)

5.3 锥面	(95)
习题 2.5	(98)
§ 6 二次曲面	(102)
6.1 压缩法	(102)
6.2 对称性	(105)
6.3 平面截线法	(106)
习题 2.6	(110)
§ 7 直纹二次曲面	(111)
7.1 双曲抛物面的直纹性	(112)
7.2 单叶双曲面的直纹性	(116)
习题 2.7	(119)
第三章 坐标变换与二次曲线的分类	(122)
§ 1 仿射坐标变换的一般理论	(122)
1.1 过渡矩阵、向量和点的坐标变换公式	(123)
1.2 图形的坐标变换公式	(124)
1.3 过渡矩阵的性质	(127)
1.4 代数曲面和代数曲线	(130)
1.5 直角坐标变换的过渡矩阵、正交矩阵	(131)
习题 3.1	(134)
§ 2 二次曲线的类型	(136)
2.1 用转轴变换消去交叉项	(137)
2.2 用移轴变换进一步简化方程	(137)
习题 3.2	(141)
§ 3 用方程的系数判别二次曲线的类型、不变量	(142)
3.1 二元二次多项式的矩阵	(144)
3.2 二元二次多项式的不变量 I_1, I_2, I_3	(145)
3.3 用不变量判别二次曲线的类型	(148)
* 3.4 半不变量 K_1	(149)
习题 3.3	(153)

§ 4	圆锥曲线的仿射特征	(154)
4.1	直线与二次曲线的相交情况	(155)
4.2	中心	(156)
4.3	渐近方向	(157)
4.4	抛物线的开口朝向	(159)
4.5	直径与共轭	(159)
4.6	圆锥曲线的切线	(162)
	习题 3.4	(163)
§ 5	圆锥曲线的度量特征	(167)
5.1	抛物线的对称轴	(167)
5.2	椭圆和双曲线的对称轴	(169)
	习题 3.5	(173)
第四章	保距变换和仿射变换	(175)
§ 1	平面的仿射变换与保距变换	(176)
1.1	一一对应与可逆变换	(176)
1.2	平面上的变换群	(178)
1.3	保距变换	(180)
1.4	仿射变换	(181)
	习题 4.1	(185)
§ 2	仿射变换基本定理	(186)
2.1	仿射变换决定的向量变换	(187)
2.2	仿射变换基本定理	(190)
2.3	关于保距变换	(191)
2.4	二次曲线在仿射变换下的像	(192)
2.5	仿射变换的变积系数	(193)
	习题 4.2	(195)
§ 3	用坐标法研究仿射变换	(196)
3.1	仿射变换的变换公式	(196)
3.2	变换矩阵的性质	(200)

3.3	仿射变换的不动点和特征向量	(203)
3.4	保距变换的变换公式	(205)
习题 4.3		(207)
§ 4	图形的仿射分类与仿射性质	(211)
4.1	平面上的几何图形的仿射分类和度量分类	(211)
4.2	仿射概念与仿射性质	(212)
* 4.3	几何学的分类	(214)
习题 4.4		(215)
* § 5	空间的仿射变换与保距变换简介	(216)
5.1	定义和线性性质	(217)
5.2	空间仿射变换导出空间向量的线性变换	(217)
5.3	空间仿射变换基本定理	(217)
5.4	在规定的坐标系中空间仿射变换的变换公式	(219)
5.5	不动点和特征向量	(220)
5.6	空间的刚体运动	(220)
习题 4.5		(221)
第五章	射影几何学初步	(222)
§ 1	中心投影	(222)
习题 5.1		(228)
§ 2	射影平面	(230)
2.1	中心直线把与扩大平面	(230)
2.2	扩大平面和中心直线把上的“线”结构	(231)
2.3	点与线的关联关系	(232)
2.4	射影平面的定义	(233)
习题 5.2		(234)
§ 3	交比	(235)
3.1	普通几何中的交比	(235)
3.2	中心直线把和扩大平面上的交比	(240)
3.3	调和点列和调和线束	(243)

习题 5.3	(244)
§ 4 射影坐标系	(246)
4.1 中心直线把上的射影坐标系	(247)
4.2 扩大平面上的射影坐标系	(249)
4.3 扩大平面上的仿射-射影坐标系	(251)
4.4 射影坐标的应用	(252)
4.5 对偶原理	(256)
习题 5.4	(258)
§ 5 射影坐标变换与射影变换	(260)
5.1 射影坐标变换	(261)
5.2 射影映射和射影变换	(263)
5.3 射影映射基本定理	(265)
5.4 射影变换公式和变换矩阵	(266)
习题 5.5	(269)
§ 6 二次曲线的射影理论	(271)
6.1 射影平面上的二次曲线及其矩阵	(271)
6.2 二次曲线的射影分类	(273)
6.3 两点关于圆锥曲线的共轭关系	(275)
6.4 配极映射	(278)
6.5 几个著名定理	(282)
习题 5.6	(284)
附录 行列式与矩阵	(286)
一、行列式	(286)
二、矩阵	(289)
习题答案和提示	(294)

第一章 向量代数

解析几何的基本内涵和方法是坐标法. 这是大家在中学的平面解析几何课程中早已熟悉的方法. 概括地讲, 它的基本思想是: 在平面上(或空间中)建立坐标系, 平面上(或空间中)的点就可用有序数组(即点的坐标)来表示, 在此基础上几何图形就可以用方程——即几何图形上的点的坐标所满足的数量关系——来表示. 于是, 几何问题就可转化为代数问题, 从而代数方法被引入几何学的研究中来.

本书中, 坐标法仍然是最基本的方法, 但是我们将作发展: 不再局限于直角坐标系, 还将要引进仿射坐标系. 此外, 我们还要引入一个辅助方法: **向量法**, 它也是把代数运算引进几何学的方法. 向量有很强的几何直观, 同时又可直接进行代数运算. 把几何问题用向量来表述, 然后利用向量的运算来解决, 这就是向量法. 许多问题用向量法处理既简捷, 又直观. 把向量法和坐标法结合使用, 能使解题思路更加灵巧简捷. 向量还是建立仿射坐标系的基础.

本章我们要讨论向量的两类运算: 线性运算和度量运算(内积和外积), 以及它们的性质和应用. 并利用向量的分解定理建立仿射坐标系, 为向量法在全书中的应用打下基础.

§ 1 向量的线性运算

1.1 向量的概念、记号和几何表示

向量的概念最初来自物理学. 许多物理量不仅有大小, 还有方向, 如位移、速度、力等等, 现在在物理学中把这类物理量称为矢

量. 抛弃它们的物理意义, 只留下大小和方向两个要素, 就抽象为在数学中的向量概念: 既有大小, 又有方向的量称为**向量**.

如果两个向量大小相等、方向相同, 就说它们相等.

本书中常用黑斜体小写西文字母来命名一个向量, 如向量 α , β, γ, a, b, c 等(对于数则用普通的小写斜体西字母表示). 用绝对值记号表示向量的大小, 如 $|\alpha|$ 表示向量 α 的大小.

大小为零的向量称为**零向量**, 就记作 0 . 零向量是惟一方向不确定的向量.

和一个向量 α 大小相等、方向相反的向量称为 α 的**反向量**, 记作 $-\alpha$. 显然, $\alpha = -\alpha$ 的充分必要条件是 α 为零向量.

如果向量 α 与 β 方向相同或相反, 就说它们平行, 记作 $\alpha // \beta$. 为了以后论述起来方便, 认定零向量和任何向量都平行.

如果向量 α 与 β 的方向互相垂直, 就说它们**垂直**或**正交**, 记作 $\alpha \perp \beta$. 认定零向量和任何向量都正交. 显然, 如果 $\alpha \neq 0$, 则和 α 既平行, 又垂直的向量只有零向量.

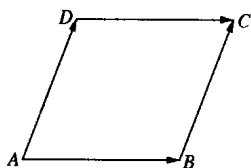


图 1.1

几何上, 用有向线段表示向量. 确定了方向的线段称为**有向线段**. 为了表明线段的方向, 只要指定线段的两个端点中哪个是起点, 哪个是终点. 如果有向线段的起终点分别为 A 和 B , 就把它记作 $\overrightarrow{AB}$. 有向线段的长度和方向正好表示了向量的大小和方向这两个因素, 以后我们就把它看作向量. 按照几何学的习惯, 我们把向量的大小称为长度. 有向线段还有位置这个几何因素, 但是当把它看作向量时, 位置是不起作用的. 因此, 当一个有向线段作平移时, 它表示的向量不改变. 例如在图 1.1 中, $ABCD$ 是一个平行四边形, 则

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

对任一向量 α 和任取一点 A , 存在惟一点 B , 使得 $\overrightarrow{AB} = \alpha$. 显然有