萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

算術
整數之性質

林鶴一 加藤幸重郎著
崔朝慶譯

商務印書館發行

算術
整數之性質

林鶴一 加藤幸重郎著
崔朝慶譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

算術—整數之性質

林鶴一　加藤幸重郎著

崔朝慶譯

發行人　王雲五　上海寶山路五〇一號

印刷所　商務印書館　上海寶山路

發行所　商務印書館　上海及各埠

中華民國二十年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

THE PROPERTY OF INTEGER
BY HAYASHI AND KATO
TRANSLATED BY TSUI CHAO CHING

PUBLISHED BY Y. W. WONG
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1931

五〇〇四分

序

此篇所論述者，爲算術中之整數性質；全篇分爲五章：第一章第二章，述倍數約數之性質；第三章第四章，述最大公約數最小公倍數之性質；第五章爲整數之性質雜問；凡算術教科書所有關於整數性質之事項，搜採一無遺漏，且加詳焉.

整數之性質，奥妙無窮，非窮年累月之功，不能達高深之域；今依本叢書之宗旨，以中等學校之數學程度爲範圍，惟理論之問題，較他種教科書稍多；蓋欲學者練習心思，由此而觸類旁通也.

今之教科書中，所載倍數約數最大公約數最小公倍數之問題，殆千篇一律，本書亦不得不斟酌採輯；但著者有創造之新題，可以補他書之闕.

本書專論整數，知不宜涉及分數小數；惟求分數小數之最大公約數最小公倍數，因整數之最大公約數最小公倍數連類而及，雖稍踰整數之界限，否則求最

大公約數最小公倍數之門類，不能完備；且以分數小數之最大公約數，約其分數小數，及以分數小數約其最小公倍數，皆必爲整數，是分數小數之最大公約數最小公倍數，不得云與整數絕無關係也.

書中理論較深處，以＊爲誌，可暫緩讀、

明治四十四年十一月三日

加藤幸重郎識

算術 整數之性質

第一章

倍數

1. 倍數

某整數，用他整數除得商爲整數，無餘數，則被除之某整數，爲他整數之倍數。

例如 42 爲 2,3,6,7,14 各數之倍數，36 爲 2,3,4,6,12 各數之倍數。

某數之倍數，乃以某數乘任何整數而得之數，其被乘之整數爲若干，則乘得之數，卽某數之若干倍。(如 2 之倍數 6，乃以 2 乘 3 而得之數，6 卽 2 之 3 倍。)

注意 本篇專論整數，凡云數，皆整數也。

2. 倍數之和與差.

述倍數之和與差，當先詳細說明乘法之數種法則。

(甲) 各數之和與某數相乘之積，等於各數與某數相乘之積之和。

例如 $(8+7+4)\times3=19\times3=57$。

又　$(8+7+4)\times 3=(8\times 3)+(7\times 3)+(4\times 3)$

$$=24+21+12=57.$$

（乙）　二數之差與某數相乘之積，等於從被減數與某數相乘之積。減去減數與某數相乘之積之差。

例如　$(15-8)\times 4=7\times 4=28.$

又　$(15-8)\times 4=(15\times 4)-(8\times 4)=60-32=28.$

（丙）　若干因數之積，因數之次序改變而積不變。

例如　$4\times 7\times 3=4\times 3\times 7=3\times 7\times 4$

$$=3\times 4\times 7=7\times 4\times 3$$

$$=7\times 3\times 4=84.$$

（丁）　若干因數之積，等於任意以各因數中之一因數與其餘因數之積相乘。

例如　$(4\times 7)\times 3=(4\times 3)\times 7=4\times(7\times 3)=84.$

注意　此四種法則，其用甚廣，讀者固須了解其意，且須熟記於心。

某數之倍數之和與差，仍爲某數之倍數.

例如 75 爲 5 之倍數，35 亦爲 5 之倍數，75+35 即 110 仍爲 5 之倍數，又 75−35 即 40，仍爲 5 之倍數。

此因　$75+35=(5\times 15)+(5\times 7)=5\times(15+7)=5\times 22.$

$75-35=(5\times 15)-(5\times 7)=5\times(15-7)=5\times 8.$

（見前（甲），（乙）之法則）

3.　倍數之倍數.

某數之倍數之倍數，仍爲某數之倍數.

例如 12 爲 3 之倍數，12 之 5 倍 60，仍爲 3 之倍數。

此因 $12=3\times4$，故 $12\times5=3\times4\times5=3\times(4\times5)=3\times20$，

(見前(丁)之法則)

4. 10,100,1000 等之倍數。

某整數之10倍100倍1000倍等，僅須添0(十倍添一箇0，百倍添兩箇0；千倍添三箇0，餘可類推，)於某整數之右端。

右端有一箇0之數，爲10之倍數，有兩箇0之數，爲100之倍數，有三箇0之數，爲1000之倍數。

5. 2之倍數。

某數之末位爲0，或爲2之倍數，其數爲2之倍數；末位非0，又非2之倍數，其數非2之倍數。

例如3670與578，皆爲2之倍數。

此因 $3670=10\times367=2\times5\times367=2$ 之倍數之倍數。

$=2$ 之倍數。

$578=570+8=2$ 之倍數 $+2$ 之倍數 $=2$ 之倍數。

(參觀第2節及第3節)

注意　凡2之倍數之整數，名曰偶數，非2之倍數之整數，名曰奇數，

6. 5之倍數。

某數之末位爲0，或爲5，其數爲5之倍數；末位非0又非5，其數非5之倍數。

例如 380 與 305, 皆爲 5 之倍數。

因 380 爲 10 之倍數, 而 10 爲 5 之倍數, 故 380 爲 5 之倍數之倍數, 仍爲 5 之倍數(參觀第 3 節)。

又 305 爲 5 之倍數 300 與 5 之和, 因 5 之倍數與 5 之倍數之和, 仍爲 5 之倍數, 故 305 仍爲 5 之倍數(參觀第 2 節)。

7. 4 之倍數. 25 之倍數.

某數右端之二位, 俱爲 0, 或爲 4 之倍數, 其數爲 4 之倍數; 末二位, 不俱爲 0, 又非 4 之倍數, 其數非 4 之倍數。

某數右端之二位, 俱爲 0, 或爲 25 之倍數, 其數爲 25 之倍數; 末二位, 不俱爲 0, 又非 25 之倍數, 其數非 25 之倍數。

例一。 500 與 624 皆爲 4 之倍數。

因 $500=100\times5=4\times25\times5=4$ 之倍數之倍數 $=4$ 之倍數。

又 $624=600+24=4$ 之倍數 $+4$ 之倍數 $=4$ 之倍數。

(參觀第 2 節第 3 節)

例二。 3700 與 575, 皆爲 25 之倍數。

因 $3700=100\times37=25\times4\times37=25$ 之倍數之倍數。

$=25$ 之倍數。

又 $575=500+75=25$ 之倍數 $+25$ 之倍數 $=25$ 之倍數。

(參觀第 2 節第 3 節)

8. 8 之倍數 125 之倍數

某數之右端三位,俱爲0,或爲8之倍數,其數爲8之倍數;末三位,不俱爲0,又非8之倍數,其數非8之倍數.

某數之右端三位,俱爲0,或爲125之倍數 其數爲125之倍數,末三位,不俱爲0,又非125之倍數,其數非125之倍數.

例一. 4000與3832,皆爲8之倍數.

因 $4000=1000\times4=8\times125\times4=8$ 之倍數之倍數

$=8$ 之倍數.

又 $3832=3000+832=8$ 之倍數 $+8$ 之倍數 $=8$ 之倍數.

(參觀第2節第3節)

例二 5000與4625,皆爲125之倍數.

因 $5000=1000\times5=125\times8\times5=125$ 之倍數之倍數

$=125$ 之倍數.

又 $4625=4000+625=125$ 之倍數 $+125$ 之倍數

$=125$ 之倍數.

(參觀第2節第3節)

9. 9之倍數

某數之數字之和爲9之倍數,其數爲9之倍數,數字之和非9之倍數,其數非9之倍數.

例如2736之數字之和 $2+7+3+6=18$ 爲9之倍數,故2736爲9之倍數.

其理如次

$$2000=2\times1000=(2\times999)+2.$$

$$700=7\times100=(7\times99)+7.$$

$$30=3\times10=(3\times9)+3.$$

$$6=6.$$

$$2736=\underbrace{(2\times999)+(7\times99)+(3\times9)}_{9\text{之倍數}}+2+7+3+6.$$

$$2736=9\text{之倍數}+(2+7+3+6).$$

若 $(2+7+3+6)$ 爲 9 之倍數,則 2736 爲 9 之倍數,今 $2+7+3+6$ 適爲 9 之倍數,故知 2736 爲 9 之倍數。

如上所示之例,任何數皆等於 9 之倍數與其數字之和,故述於次之事,亦合於理。

以 9 除某數之餘數,等於以 9 除其數字之和之餘數。

例如以 9 除 3629,得商 403,餘 2,又以 9 除其數字和 $3+6+2+9$ (卽 20)亦餘 2。

因 $3629=9$ 之倍數 $+(3+6+2+9)=9$ 之倍數 $+(9$ 之倍數 $+2)$

$=9$ 之倍數 $+2$。

故以 9 除 3629,餘數爲 2。

10. 3 之倍數

某數之數字之和爲 3 之倍數,其數爲 3 之倍數,數字之和非 3 之倍數,其數非 3 之倍數。

例如564數字之和 $5+6+4$(卽 15)爲3之倍數,卽知 564 爲 3 之倍數。

因 $564=9$ 之倍數 $+(5+6+4=3)$ 之倍數 $+(5+6+4)$,今 $5+6+4$ 適爲 3 之倍數,故 564 爲 3 之倍數。

由此知達於次之事，亦合於理。

以3除某數之餘數，等於以3除其數字之和之餘數。

例如以3除2561，得商853，餘2，又以3除其數字和2+5+6+1(即14)亦餘2。

因　2561=9之倍數+(2+5+6+1)=3之倍數+14

=3之倍數+(3之倍數+2)=3之倍數+2。

故以3除2561之餘數，等於以3除2+5+6+1(即14)之餘數。

11.　11之倍數

從某數之右端起，奇數位之數字之和，等於偶數位之數字之和，或其差爲11之倍數，其數爲11之倍數。

例如　637813之奇數位數字之和3+8+3=14，偶數位數字之和1+7+6=14，其二和數相等，故其數爲11之倍數。

又63745之奇數位數字5+7+6=18，偶數位數字4+3=7，二和數18與7之差爲11之倍數，故63745爲11之倍數。

詳示其理於次。

凡基數(從1至9之九數，名曰基數，)之右，附奇數0之數，等於11之倍數與其基數之差。

例如　700000=11之倍數−7。

因　700000=7×100000=7×(99990+10)

=7×(99990+11−1)=7×(11之倍數−1)

=11之倍數−7。

又8000=8×1000=8×(990+10)=8×(990+11−1)

=8×(11之倍數−1)=11之倍數−8。

凡基數之右，附偶數 0 之數，等於 11 之倍數與其基數之和。

例如 $50000=5\times10000=5\times(9999+1)$

$=5\times(11\text{之倍數}+1)=11\text{之倍數}+5$。

又 $800=8\times100=8\times(99+1)=8\times(11\text{ 之倍數}+1)$

$=11\text{ 之倍數}+8$。

由此詳解 63745 為 11 之倍數於次。

$$
\begin{aligned}
60000&=11\text{ 之倍數}+6.\\
3000&=11\text{ 之倍數}-3.\\
700&=11\text{ 之倍數}+7.\\
40&=11\text{ 之倍數}-4.\\
5&=\qquad\qquad 5.\\
\hline
63745&=11\text{ 之倍數}+6-3+7-4+5\\
&=11\text{ 之倍數}+\{(6+7+5)-(3+4)\}.
\end{aligned}
$$

因 $(6+7+5)-(3+4)$ 為 11 之倍數，故知 63745 為 11 之倍數。

又依同法計算 629783 為 11 之倍數。

$$
\begin{aligned}
629783&=11\text{ 之倍數}+(3+7+2)-(6+9+8)\\
&=11\text{ 之倍數}-\{(6+9+8)-(3+7+2)\}.
\end{aligned}
$$

因 $(6+9+8)-(3+7+2)$ 為 11 之倍數，故知 629783 為 11 之倍數，

由上所說明之理由，知述於次之事，亦合於理。

任何數，皆等於 11 之某倍數加其奇數位之各數字而減其偶數位之各數字。

故以 11 除某數，其餘數等於從其奇數位之數字之和減其偶數位之數字之和，（若奇數位之數字之和，小則酌加 11 之若干倍，而以偶數位之數字之和減之，）或等於以 11 除其相減之數之餘數。

例如以 11 除 84567 之餘數 10,卽從 (8+5+7) 減 (4+6) 之餘數。又以 11 除 678531 之餘數 7,卽從 (1+5+7+11) 減 (3+8+6) 之餘數也。

12. 用 9 及 11 驗運算有無錯誤。

驗加法及乘法,先求以 9 或 11 除被加數或各因數之餘數,此各餘數相加或相乘,又以 9 或 11 除之,得餘數,加法之和乘法之積,亦以 9 或 11 除之,所得之餘數,與前所得之餘數相等,則其運算多分不誤。

例一　驗加法

4568	··············5.(用 9 驗)	····················3.(用 11 驗)	
7391	··············2.	····················10.	
7854	··············6.	····················0.	
53469	··············0.	····················9.	
13470	··············6.	····················6.	
+58143	··············3.	····················8.	
144895·········4.	22······4. ······3.		36·········3.

例二　驗乘法

3748	············4.(用 9 驗)	·················8.(用 11 驗)	
× 6236	············8.	·················10.	
積23372528·····5.	32·········5	3.	80······

證明用 9 驗加法之理由如次。

$$(9\text{ 之倍數}+A)+(9\text{ 之倍數}+B)+(9\text{ 之倍數}+C)+\cdots\cdots$$

$$=(\text{若干 }9\text{ 之倍數之和}+A+B+C+\cdots\cdots).$$

故以 9 除各被加數,所得各餘數之和,復用 9 除之之餘數,等於以 9 除

被加數之和所得之餘數。

用 11 驗加法之理由，與用 9 驗同。

證明用 9 驗乘法之理由如次。

(9 之倍數+A)×(9 之倍數+B)

=9 之倍數×(9 之倍數+B)+A×(9之倍數+B)

=(9 之倍數×9 之倍數)+(9之倍數×B)+(A×9 之倍數)+(B×A)

=9 之倍數+A×B。

故以 9 除各因數所得各餘數相乘，復以 9 除之之餘數，等於以 9 除因數之積之餘數。

用 11 驗乘法之理由，與用 9 驗同。

驗減法，先求以 9 或 11 除減數及差數之餘數相加復以 9 或 11 除之之餘數，次求以 9 或 11 除被減數之餘數，若兩餘數相等，則其運算多分不誤。

其例如次

985697	……………8.(用 9 驗)	………9.(用 11 驗)
−759876	……………6.	………7.
225821	……………2.	………2.
	2+6=8.	2+7=9.

驗除法，先求以 9 或 11 除除數及商數之餘數相乘復以 9 或 11 除之餘數，次求以 9 或 11 除被除數之餘數，若兩餘數相等，則其運算多分不誤。

其例如次

157)1288342(8206

1256

323