2004年

考研 人大版

硕士研究生入学考试

数学模拟试卷

（理工类）

主编　李恒沛 侯书会 李忠范

教育部考试中心命题组前小组长亲自编写

内含：十二套全真模拟试题

2003年硕士研究生入学考试真题

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2004年硕士研究生入学考试数学模拟试卷(理工类)/李恒沛等主编
北京:中国人民大学出版社,2003

ISBN 7-300-05030-1/G·1027
Ⅰ. 2…
Ⅱ. 李…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第090284号

2004年硕士研究生入学考试数学模拟试卷(理工类)

主编　李恒沛　侯书会　李忠范

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242(总编室)		010－62511239(出版部)
	010－62515351(邮购部)		010－62514148(门市部)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.easyky.com(轻松考研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	中煤涿州制图印刷厂		
开　　本	787×1092毫米 1/16	**版　　次**	2003年10月第1版
印　　张	10.75	**印　　次**	2003年10月第1次印刷
字　　数	237 000	**定　　价**	15.00元

13-40
L312

2004 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一模拟试卷(1)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x =$ ________.

(2) 平面 $Ax + By + Cz = 0 (C \neq 0)$ 与柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相交所成椭圆的面积为________.

(3) 微分方程 $y''' + 6y'' + 13y' = 0$ 的通解为________.

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} =$ ________.

(5) 已知当机器调整良好时,产品的合格率为 0.90;当机器调整不好时,产品的合格率为 0.30;每天开始生产时机器调整良好的概率为 0.75.如果某日生产的第一件产品是合格品,则机器调整良好的概率为________.

(6) 设随机变量 x 的概率分布为

$$P\{X = i\} = \frac{1}{\mathrm{e}i!}, i = 0, 1, 2, \cdots$$

则 $E(X) =$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = k \quad (k < 0)$,则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处

(A) 导数不存在. (B) 导数存在,且 $f'(0) \neq 0$.

(C) 取得极小值. (D) 取得极大值.

[ ]

(8) 设 S 是平面 $x + y + z = 2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 截出的有限部分,则曲面积分 $\iint\limits_S x \mathrm{d}S$ 的值为

(A) $\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 0. (D) π.

[ ]

(9) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛,则

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 未必收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. (D) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

[ ]

(10) 设 $f_1(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, f_2(x)=\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$，则 $f_1(x)+f_2(x)=$

(A) $\frac{\pi}{2}$.　　(B) 0.　　(C) $\frac{1}{2}\arctan x$.　　(D) $2\arctan x$.

[　　]

(11) 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处

(A) 不连续且偏导数不存在.　　(B) 不连续但偏导数存在.

(C) 连续且偏导数存在.　　(D) 连续但偏导数不存在.

[　　]

(12) 三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为2,4,4,属于特征值2的特征向量为$(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$,则属于特征值4的所有特征向量为

(A) $k_1(1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(B) $k_1(0,1,1)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

(C) $k_1(1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_1\neq 0,k_2\neq 0)$.

(D) $k_1(1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,1)^{\mathrm{T}}$　(k_1,k_2 不全为0).

[　　]

(13) 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,则此方程组的基础解系还可以选用

(A) $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$.

(B) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的一个等价向量组.

(C) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的一个等秩向量组.

(D) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4$.

[　　]

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $Y\sim N\left(1,\frac{1}{2}\right)$,则与随机变量 $Z=Y-X$ 同分布的随机变量是

(A) $X-Y$.　　(B) $X+Y$.

(C) $X-2Y$.　　(D) $Y-2X$.

[　　]

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分12分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}\right)$.

(16)(本题满分12分)

设 $f(x)$ 在[0,1]上有连续导数,且满足

$$x\int_0^x f(t)dt=(x+1)\int_0^x tf(t)dt, f(1)=2, \text{求 } f(x).$$

(17)(本题满分12分) 计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(x^2z + y^2z + \frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$，其中 $f(t)$ 具有连续导数，$\sum$ 为下半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1(z < 0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 12 分)

设一质点从时刻 $t = 0$ 开始沿直线运动，移动单位距离用了单位时间，且初速度和末速度都为零，则在单位时间内总有某一时刻的加速度的绝对值不小于 4.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 连续，$x \in [a, b]$，且可导，$x \in (a, b)$，试证在 (a, b) 内存在一点 ξ，使 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$.

(20)(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY}$ 化成标准型 $f = y_2{}^2 + 2y_3{}^2$，求 a, b 及所用的正交变换.

(21)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 向量线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由这个向量组线性表示，而 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能用这个向量组线性表示，求证：$\forall k$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$，必线性无关.

(22)(本题满分 9 分)

设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 都在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x e^{-\frac{x^2}{\lambda}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

其中 α 是常数，$\lambda > 0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，

1) 求常数 α；

2) 求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$；

3) 判别 $\hat{\lambda}$ 是否为 λ 的无偏估计量.

HK89/12

数学一　模拟试卷(1)参考解答及分析

一、填空题

(1) **分析**:这是广义积分.

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to1^-}\int_0^b \ln\frac{1}{(1+x)(1-x)}\mathrm{d}x = \lim_{b\to1^-}\int_0^b[-\ln(1+x)-\ln(1-x)]\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{b\to1^-}[-x\ln(1+x)+x-\ln(1+x)-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)]\Big|_0^b$$

$$= 2(1-\ln2).$$

解:应填 $2(1-\ln2)$.

(2) **分析**:$D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1,z=\frac{Ax+By}{-C}$.

$$S=\iint_D \mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1}\sqrt{1+\left(-\frac{A}{C}\right)^2+\left(-\frac{B}{C}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi ab\sqrt{1+\left(\frac{A}{C}\right)^2+\left(\frac{B}{C}\right)^2}$$

$$=\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

解:应填$\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

(3) **分析**:相应特征方程为

$$r^3+6r^2+13r=0$$

$$\Rightarrow r(r^2+6r+13)=0$$

$$\Rightarrow r=0,-3\pm2i.$$

于是原方程之通解为

$y=c_1+\mathrm{e}^{-3x}(c_2\cos2x+c_3\sin2x)$,($c_1,c_2,c_3$ 为任意常数).

解:应填 $y=c_1+\mathrm{e}^{-3x}(c_2\cos2x+c_3\sin2x)$,($c_1,c_2,c_3$ 为任意常数).

(4) **分析**:利用分块矩阵求逆.

解:应填$\begin{pmatrix}0&0&1&-3\\0&0&1&-2\\1&-1&0&0\\-1&2&0&0\end{pmatrix}$.

(5) **分析**　设 A 表示事件"机器调整良好",B 表示事件"产品是合格品",根据贝叶斯公式,得所求概率为

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})}$$

$$= \frac{0.75 \times 0.90}{0.75 \times 0.90 + 0.25 \times 0.3} = 0.90.$$

解:应填 0.90.

(6) **分析**:由定义可得

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{\mathrm{e}i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}(i-1)!} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 1.$$

解:应填 1.

二、选择题

(7) **分析**:由设知 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$,由 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = k \quad (k < 0) \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = k + \alpha$

$\Rightarrow f(x) = kx^2 + \alpha x^2 \quad$ (当 $x \to 0, \alpha \to 0$),于是 $\exists$ 点 $x = 0$ 的邻域,有 $f(x) - f(0) < 0$,

即 $\quad f(0)$ 为极大值.

解:应选(D).

(8) **分析**:$z = 2 - x - y, \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} = -1$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\iint\limits_{S} x\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \sqrt{3}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r = 0$.(或由区域对称性及被积函数为奇函数直接得 0)

解:应选(C).

(9) **分析**:例如级数 $\quad 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 发散,但$(1-1) + (1-1) + \cdots$ 收敛,说明(A),(D) 都不对.

又如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2n}}\right)$ 收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 也收敛,说明(C) 也不对.

即 $\quad$ (B) 正确.

解:应选(B).

(10) **分析**:因$(f_1(x) + f_2(x))' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$,

故 $\quad f_1(x) + f_2(x) = C$(常数)

$\overset{\text{由设}}{\Rightarrow} \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = C$

令 $x = 1$,可得 $f_1(x) + f_2(x) = \frac{\pi}{2}$.

解:应选(A).

(11) **分析**:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^3} = 0.$$

同理得 $\quad f'_y(0,0) = 0$,

故 $\quad f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处偏导数存在,但 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 与.

$$\left(\begin{array}{l}\text{例如,取 } y = kx\text{,当 } x \to 0, y \to 0\text{,于是}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \dfrac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \dfrac{k}{1+k^2}.\end{array}\right)$$

因而 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处不连续.

解:应选(B).

(12) **分析:**实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量正交.

解:应选(D).

(13) **分析:**利用基础解系的概念.

解:应选(D).

(14) **分析:** 因为 X 和 Y 是相互独立的正态随机变量,所以

$$Z = Y - X \sim N(1,1), \qquad X + Y \sim N(1,1),$$

从而可知 $X+Y$ 与 $Z = Y - X$ 是同分布的随机变量.

解:应选(B).

三、解答题

(15) **分析:**本题证明需用到夹逼法则.

证:因为

$$n! < \sum_{k=1}^{n} k! < (n-2)(n-2)! + (n-1)! + n! < 2(n-1)! + n!,$$

所以

$$1 < \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! < 1 + \frac{2}{n},$$

于是由夹逼法则知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k!}{n!}\right) = 1.$$

(16) **分析:**对等式两端求导变成微分方程.利用初始条件,解出 $f(x)$,再由 $f(x)$ 的连续性,求出 $f(0)$,即得 $f(x)$ 的表达式.

解:等式两端对 x 求导,得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + x(x+1)f(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + x^2 f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = xf(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$\Rightarrow x^2 f'(x) + 3xf(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = -\frac{1}{x} - 3\ln x + \ln C$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} x^{-3} C)$$

$$\Rightarrow f(x) = Cx^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},$$

当 $x = 1, f(x) = 2, 2 = C\mathrm{e}^{-1}$,得 $C = 2\mathrm{e}$,

故 $f(x)=2x^{-3}e^{1-\frac{1}{x}}\qquad(0<x\leqslant 1)$,

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\qquad$(由题设).

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}2ex^{-3}e^{-\frac{1}{x}}=2e\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^3}}{e^{-\frac{1}{x}}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}2e\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3}{e^t}=0.$$

故得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{1-\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(17) **分析**:添加平面 $z=0$,使积分域成为封闭曲面,利用高斯公式计算之.

解:添加平面 $P:z=0$, $\Sigma\cup P$ 为封闭曲面,

$$\iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma\cup P}-\iint_{P}.$$

$$\oiint_{\Sigma\cup P}\frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_{\Omega}\left[\frac{2y^2}{y}f'(xy^2)-\frac{2xy}{x}f'(xy^2)+(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}v$$

$$=-\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2}{5}\pi.$$

而 $\iint\limits_{P}=0$,

故 $$\iint_{\Sigma}\frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{5}\pi.$$

(18) **分析**:由题设知(令距离函数 $s=s(t)$)

$s(0)=0,s(1)=1,s'(0)=0,s'(1)=0.$

欲证 $|s''(\xi)|\geqslant 4.$ 本题可利用泰勒公式证之.

证:由泰勒公式有

$$s(t)=s(0)+s'(0)t+\frac{s''(\xi_1)}{2!}t^2=\frac{s''(\xi_1)}{2!}t^2,$$

(ξ_1 在 0 与 t 之间)

于是得 $s(\frac{1}{2})=\dfrac{s''(\xi_1)}{8}\qquad$ ①

又由泰勒公式有

$$s(t)=s(1)+s'(1)(t-1)+\frac{s''(\xi_2)}{2!}(t-1)^2=1+\frac{s''(\xi_2)}{2!}(t-1)^2,$$

(ξ_2 在 t 与 1 之间)

于是得 $s(\frac{1}{2})=1+\dfrac{s''(\xi_2)}{8}\qquad$ ②

由①与②得

$$\frac{1}{8}[s''(\xi_1)-s''(\xi_2)]=1,$$

即 $s''(\xi_1)-s''(\xi_2)=8,$

因此

$$8=|s''(\xi_1)-s''(\xi_2)|\leqslant|s''(\xi_1)|+|s''(\xi_2)|$$
$$\leqslant 2\max(|s''(\xi_1)|,|s''(\xi_2)|),$$

取 $|s''(\xi)|=\max(|s''(\xi_1)|,|s''(\xi_2)|),$

故 $8\leqslant 2|s''(\xi)|,\xi\in(0,1),$

即 $|s''(\xi)|\geqslant 4,\xi\in(0,1).$

(19) **分析**:欲证 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi},$

或 $f(\xi)-f(a)=f'(\xi)(b-\xi),$

即 $f'(\xi)(b-\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0$

$$\Rightarrow bf'(\xi)-[\xi f'(\xi)+f(\xi)]+f(a)=0$$

$$\Rightarrow[bf(x)]'\Big|_\xi-[xf(x)]'\Big|_\xi+[f(a)x]'\Big|_\xi=0$$

$$\Rightarrow[bf(x)-xf(x)+f(a)x]'\Big|_\xi=0$$

$$\Rightarrow[(b-x)(f(x)-f(a))+bf(a)]'\Big|_\xi=0$$

$$\Rightarrow[(b-x)(f(x)-f(a))]'\Big|_\xi=0$$

取辅助函数

$$F(x)=(b-x)[f(x)-f(a)]$$

容易验证 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件,即可证得.

证:

令 $F(x)=(b-x)[f(x)-f(a)],$

由题设,知 $F(x)$ 连续,$x\in[a,b]$,且可导,

又 $F(a)=F(b)=0,$

故存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $F'(\xi)=0.$

由 $F'(x)=(b-x)f'(x)-[f(x)-f(a)],$

得 $F'(\xi)=(b-\xi)f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0$

即 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi},\xi\in(a,b).$

(20) **分析**:此类问题的关键在于正确地写出二次型的矩阵.

解:$f=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$.其标准型 $f=y_2{}^2+2y_3{}^2$ 的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$.显然有 $|A|=|B|=0$,由此得 $a=b$.又 1(或 2) 为 A 的特征值.即 $|A-E|=0$(或 $|A-2E|=0$),由此得 $a=b=0$.

由$(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,取特征向量 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

由$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,取特征向量 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

由$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,取特征向量 $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2\ \boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0 & 1 & 0\\\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

则所求正交变换为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$.

(21) **分析**:这是关于线性相关、无关的证明的一道常规题.

证:设存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\lambda$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n+\lambda(k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{0}$$

即 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n+\lambda k\boldsymbol{\beta}_1+\lambda\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$

则 $\lambda=0$(否则,因 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$ 表示,则得 $\boldsymbol{\beta}_2$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$ 表示矛盾).

从而 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$

故 $\forall k,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 必线性无关.

(22) **分析**:求解本题,可以利用卷积公式,此时要正确定出积分限;也可以先求出 Z 的分布函数,再求得 Z 的概率密度.

解法 1: X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由于 X 与 Y 相互独立,利用卷积公式可得 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f_X(z-y)\mathrm{d}y.$$

令 $z-y=t$,得

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}f_X(t)\mathrm{d}t,\ -\infty<z<+\infty.$$

由于 $f_X(x)$ 在$(0,1)$内的值为 1,在其余点处的值为 0,因此

① 当 $z<0$ 时,$z-1<0$,有

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}0\mathrm{d}t=0;$$

② 当 $0\leqslant z<1$ 时,$z-1<0$,有

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^z 1\mathrm{d}t = z;$$

③ 当 $1 \leqslant z < 2$ 时，$0 \leqslant z-1 < 1$，有

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} 1\mathrm{d}t + \int_1^z 0\mathrm{d}t = 2-z;$$

④ 当 $z \geqslant 2$ 时，$z-1 \geqslant 1$，有

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{z} 0\mathrm{d}t = 0.$$

于是得 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 \leqslant z < 1, \\ 2-z, & 1 \leqslant z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

解法 2: 由于 X 与 Y 相互独立，因此二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{X + Y \leqslant z\} = \iint_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{z^2}{2}, & 0 \leqslant z < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2}(2-z)^2, & 1 \leqslant z < 2, \\ 1, & z \geqslant 2, \end{cases}$$

$Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 \leqslant z < 1, \\ 2-z, & 1 \leqslant z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(23) **分析:** 利用概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$，即可求得 α；写出似然函数 $L(\lambda)$ 后即可求得最大似然估计量 $\hat{\lambda}$；由 $E(\hat{\lambda}) = \lambda$，可知 $\hat{\lambda}$ 是 λ 的无偏估计量.

解: 1) 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \alpha x \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\lambda}} \mathrm{d}x = \alpha \cdot \frac{\lambda}{2} = 1$,

得 $\alpha = \frac{2}{\lambda}$.

2) 设总体 X 的样本值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n (x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$，似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = (\frac{2}{\lambda})^n \cdot (\prod_{i=1}^{n} x_i) \cdot \exp\{-\frac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n} x_i^2\},$$

取对数，得

$$\ln L(\lambda) = n\ln 2 - n\ln\lambda + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$，得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$，$\lambda$ 的最大似然估计量为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

3) 由于

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2}{\lambda} x \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\lambda}} \mathrm{d}x = \lambda,$$

因此 $$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X^2) = \lambda.$$

由此可知 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是 λ 的无偏估计量.

2004年全国硕士研究生入学统一考试

数学一　模拟试卷(2)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1) 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(mh)-f(-nh)}{h}=\_\_\_\_\_\_.$$

(2) 设当 $x\geqslant 0$, $f(x)$ 为连续函数,且满足

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\mathrm{d}t = x,\text{则 } f(2)=\_\_\_\_\_\_.$$

(3) 设有级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{x+1}{3}\right)^n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$,则该级数的收敛半径 $R=\_\_\_\_\_\_$.

(4) 设三阶方阵 A 的特征值为1,2,3,则 A^*+A^2-5A 的三个特征值分别为______.

(5) 将15名新生(其中有3名优秀生)随机地分配到三个班级去,其中一班4名,二班5名,三班6名,则3名优秀生都被分配到二班的概率为____.

(6) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 σ^2 为已知,μ 为未知参数.从总体 X 中抽取样本容量为16的样本值,算得 μ 的置信水平为0.95的置信区间中的最小长度为0.588,则 $\sigma^2=\_\_\_\_$.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 空间曲线 $P:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\\ z=bt\end{cases}$ (a,b 为正的常数)上任一点处的切线

(A) 与 z 轴成定角.　　(B) 与 x 轴成定角.

(C) 与 yoz 平面成定角.　　(D) 与 zox 平面成定角.

[　　]

(8) 设 $f(x)$ 具有二阶导数,且 $f''(x)>0$, $f(0)=0$,则当 $x>0$, $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

(A) 是单调减少的.　　(B) 是单调增加的.

(C) 有极小值.　　(D) 有极大值.

[　　]

(9) 在下列已知级数中,收敛的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.　　(B) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n^2+n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\tan\frac{\pi}{n}$.

[　　]

(10) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的

(A) 必要条件而非充分条件.　　　　(B) 充分条件而非必要条件.

(C) 必要充分条件.　　　　(D) 既非必要条件又非充分条件.

[　　]

(11) 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解,且 $f'(x_0) = 0$ 及 $f(x_0) < 0$,则函数 $f(x)$ 在点 x_0

(A) 某个邻域内单调增加.　　　　(B) 某个邻域内单调减少.

(C) 取得极小值.　　　　(D) 取得极大值.

[　　]

(12) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵,则

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$.

(B) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{B}$.

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$.

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$.

[　　]

(13) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (3 \leqslant r \leqslant n)$ 线性相关的充分必要条件是

(A) 存在一组全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\mathbf{d}_r = \mathbf{0}$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 中任意两个向量都线性相关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 中任何一个向量都能由其余向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 中至少有一个向量能由其余向量线性表示.

[　　]

(14) 设事件 A, B, C 两两独立,则事件 A, B, C 相互独立的充分必要条件是

(A) A 与 BC 相互独立.　　　　(B) AB 与 $A \cup C$ 相互独立.

(C) AB 与 AC 相互独立.　　　　(D) $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 相互独立.

[　　]

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 12 分)

设　$u = z(x^2 + 3)$,

求向量场 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\, \boldsymbol{u}$ 通过上半球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z > 0)$ 的上侧的流量.

(16)(本题满分 12 分) 试在曲线族

$y = a(1 - x^2), (a > 0)$ 中,选一条曲线,使这条曲线与其在 $(-1, 0)$ 及 $(1, 0)$ 两点处的法线所围成图形的面积比这族曲线中其他曲线以同样方法围成图形的面积都小.

(17)(本题满分 12 分) 设在半平面 $x > 0$ 中,有力 $\boldsymbol{F} = -\dfrac{k}{r^3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$ 构成的力场,其中 k 为常数,$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 证明在此力场中,场力所做的功与所取路径无关,而只与起点、终点有关,并计算由点 $(1, 1)$ 到点 $(2, 2)$ 场力所做的功.

(18)(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上二阶可导,且 $f(1) = f(2) = 0$, $F(x) = (x - 1)^2 f(x)$,试证在 $(1, 2)$ 内至少存在一点 ξ,使 $F''(\xi) = 0$.

(19)(本题满分 10 分) 如图 1—2—1 所示,

码头位于 O 点处，在相距 a 米的河对岸，向着码头开出一条轮船，其速度为 v_1，方向朝着 O 点，水流速度为 v_2，求轮船所行驶的曲线方程.

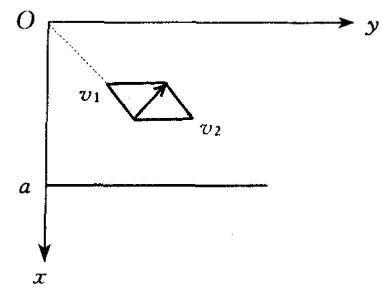

图 1—2—1

(20)(本题满分 8 分)

1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是三维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，证明存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\boldsymbol{\xi}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出.

2) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix};\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-3\\-4\\3\end{pmatrix}$ 时，求所有既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出的向量.

(21)(本题满分 10 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-a&-1&a\\4&2&-3\end{pmatrix}$，问当 a 为何值时，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵，并求出 $\boldsymbol{P}$ 和相应的对角矩阵.

(22)(本题满分 9 分)

设试验成功的概率为 $\frac{3}{4}$，失败的概率为 $\frac{1}{4}$，独立重复地试验直到成功两次为止，以 X 表示所需要进行的试验次数，求：

1) X 的概率分布；

2) X 的数学期望.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求未知参数 θ 的矩估计量，并判别它是否为 θ 的无偏估计量.