初等代数教程

〔法〕C. 布尔勒著 朱广才譯

上海科学技术出版社

初 等 代 数 教 程

〔法〕C. 布尔勒 著
朱广才 譯

上海科学技术出版社

內容提要

本书从負数的引进开始，介紹了函数的概念以及有关代数的各种运算，着重討論了一次、二次方程的解，对极限、导数、微分等作了初步介紹，最后討論了級数及对数。說理清楚，討論深入，系統性、严謹性很强。可供中学数学教师，师范学校、院数学系学生，及高中学生参考。

LEÇONS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Carlo Bourlet

Librairie Armand Colin

初等代数教程

朱广才 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 17 8/32　排版字数 409,000

1964年4月第1版　1964年4月第1次印刷　印数 1—16,500

統一书号 13119·567　定价（九）1.75 元

譯 者 序

本书根据法国卡尔洛·布尔勒 (Carlo Bourlet) 的初等代数教程(Leçons d'Algèbre élémentaire) 1919 年第六版譯出.

这本教程是在法国科学院院士达尔布 (Darboux) 領导下，为法国高中数学班所編写的数学教程的一种，在很长的一段时間里，法国有許多教师用它做教本，对于法国中学数学程度的提高起了一定的作用.

原书第五編第四第五两章 (第 145～154 节) 是討論利息的算法，除了利用对数可以使之簡化而外，与代数学沒有什么重要的关系，故删除未譯；但后面节号仍連接編排，因此与原书节号不完全相同. 习題編号亦作了同样处理.

本稿承范会国同志在百忙之中抽暇校閱，改正了某些譯誤，特此致以謝意.

朱广才 1962 年 12 月北京

第六版序

十四年前，在这部初等代数教程刚出版的时候，不但理科学士❶考試大綱不包括导数論，而且爭取学士学位的人，連“函数”这个名詞都可以不知道.

在我的老师，科学院常任书記 (Secrétaire perpétuel) G. 达尔布先生允諾和指点之下，我怀着不无冒进的心情，編写了引导学生远远超出公令規定的范圍之外的这部书.

在这部书里，人們初次見到，在代数运算之前，把負数列在首位，并作为专論詳加說明. 由于决定放弃寻求极大値和极小値虛构的老方法，为了簡化繁重的証明，所以从极限的理論入手，引到导数的理論. 根据个人的經驗，我深信，学生不难了解这种一般性的方法，而且很容易习惯于函数和导数的概念，从而使中学里的高年級的代数教学获得一大进步.

事情的演变証明我的看法完全是对的. 从 1902 年起，导数已列入学士考試大綱，到 1905 年，又下降为高中二、三年級 C, D 班必修的課程.

所以，先于这些大綱、而迟晚与之相符的本书，能在漫长的一段时期适用，而无需有重大修訂.

---

❶ 在法国，高中毕业后，参加学士会考 (Baccalauréat) 及格者，获得学士 (Bachelier) 学位和入大学的資格. ——譯者注

然而日子长了，这本书終于落伍了，而第一个感到愉快的人就是我.

許多采用此书做教本的同事，曾向我提出有益的意見，我决定把它彻底修訂，使之与現行的初等数学班 A，B 教学大綱完全符合.

除了若干細节上的变动以外，其中主要是負数的应用和代数运算，我从头至尾彻底修訂了关于二次課題的討論、导数論和应用导数来研究函数变化的几章.

深入地討論二次課題，对学生是一种最好的訓练，能养成其有条理的习慣和运用分析的方法. 关于这方面，不可能給予他們絕对严密的法則；而且用一些太細致的框框，想把他們关起来，甚至还是危险的，因为这将毁灭他們的鉆研和主动的精神. 然而，不必在微細节目上，恣意发揮致成詞廢，他們还是須有可靠的指导，这就是我所要努力供給他們的.

关于导数，我先把以前放在附录里的圓函数变化全篇移入正文，然后介紹一下微分記法，这是学生在物理学书上到处所遇見的. 我并且把导数应用于函数变化的一般定理重新修訂. 今天我敢于做了十四年前以魄力不足所未做的一件事，就是导入有限增量定理. 这个定理的应用，能使說明旣謹严又清晰，絲毫也不見得繁复. 为了符合教学大綱，最后我加了几頁关于曲綫面积的导数和关于原函数.

在結束这篇前言的时候，我再次向諸位同事表示謝意，感謝他們对这本书所提的意見，并将以感激的心情接受他們的任何新的意見，以便再版时加以郑重地考慮.

C. 布尔勒　巴黎 1909 年 6 月

目　录

第二編　一次方程

第三編　二次方程

第四編 导数，函数的变化

第五編 級数，对数

附 录

緒　　論

1. 代数学中軸載的有向綫段論，在几何学里能起很重要的作用．而且掌握了这个理論，可以很容易說明負数論的基本原則．有这两种理由，我們首先把軸載的有向綫段論的要点介紹一下．

定义　規定了指向的一段直綫，就叫**有向綫段**．为了确定綫段的指向，我們把限定綫段的两个点加以区別．一个叫做**原点**，一个叫做**終点**．綫段的指向就是一个动点由原点沿綫段移到終点的方向．

由此看来，有向綫段就是一个动点所走的路程，并指出走路的方向．在一切运动問题里，不但需要知道动点所走的路程，而且还要知道它的方向．如果我們說，一个动点从一直綫上的点 A 起，沿着直綫走了一段路程，那么动点所到达之点就有疑問；因为我們不知道到达点是在出发点的右边，还是在左边．相反的，如果用有向綫段来表示，那就一点也沒有犹疑了；因为我們不但知道它的路程，而且还知道它的方向．

凡表示一个有向綫段，总要先指出原点（动点的出发点），然后指出終点（到达之点）．如"綫段 AB"所指的是以 A 为原点、以 B 为終点的有向綫段；反之，"綫段 BA"所指的則是以 B 为原点、以 A 为終点的有向綫段．

由原点到終点的(几何)距离，叫做有向綫段的**长度**．长度为零时(卽原点与終点重合时)，就說有向綫段等于零．

同一直綫所載的两个有向綫段，如其长度相等、指向相同，我們就說它們**相等**．如图 1，两个有向綫段，长度 AB 与长度 CD 相等，并且是同一指向，我們就写

$$綫段\ AB=綫段\ CD.$$

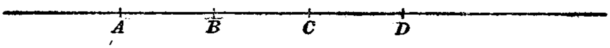

图 1

两个同載綫的相等的有向綫段，总可以重合，令其中之一沿載綫滑动，使其原点与另一綫段的原点重合．

同載綫的两个有向綫段，如果长度相等，指向相反，就叫做**相反的有向綫段**．如图 1，綫段 AB 与綫段 DC 就是相反的．此外，在一直綫上随意指两点 A 和 B，这两点就能确定两个相反的有向綫段，一是綫段 AB，一是綫段 BA．我們不能使两个同載綫的相反的有向綫段重合，就是說，不能令其循載綫滑动，使原点与原点、終点与終点分别重合．但是，如果令第一綫段的原点与第二綫段的終点重合，則第二綫段的原点就与第一綫段的終点重合．

2．两个有向綫段的合量　如果把同載綫的两个有向綫段連起来，使第二綫段的原点与第一綫段的終点重合，則以第一綫段的原点为原点、以第二綫段的終点为終点的有向綫段，就叫做这两个有向綫段的**合量**，或叫**几何和**．

如图 1，綫段 AB 和綫段 BC 就是第二綫段的原点 B 与第一綫段的終点 B 重合，綫段 AC 就是它們的合量，其原点是第一綫段的原点 A，終点是第二綫段的終点 C．同样，綫段 BC 和綫段 CA，就以綫段 BA 为合量．

当同載綫的两个有向綫段不相連接时，要求其合量，則令第二綫段循載綫滑动，使其原点与第一綫段的終点重合．这两个經过滑动后的新的有向綫段的合量，或任一与其相等的有向綫段，就叫做两个給定綫段的合量．

定理 两个有向綫段的合量，与求合量时連接它們的次序无关．

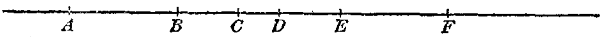

图 2

設綫段 AB 和綫段 BC 是相連接的两个有向綫段，而綫段 AB 在前．它們的合量是綫段 AC．另一方面，設

$$\text{綫段 } EF = \text{綫段 } AB, \quad \text{綫段 } DE = \text{綫段 } BC$$

是相連接的两个有向綫段，而綫段 DE 在前．这两个有向綫段的合量（綫段 DF），就是綫段 BC 和綫段 AB 且綫段 BC 在前所形成的合量．要証明这两个合量（綫段 DF 与綫段 AC）相等，有两种不同的情况应加以区别．

1° 我們先假定綫段 AB 与綫段 BC 是同一指向的（图 2）．那么，綫段 DE 与綫段 EF 也是同一指向．譬如，若 B 在 A 的右边，C 就在 B 的右边，因而也在 A 的右边；于是 B 居于 A 与 C 之間，各段直綫的长度的关系有如下等式：

$$AC = AB + BC.$$

同样，E 在 D 的右边，F 在 E 的右边，因而 F 也在 D 的右边，于是

$$DF = DE + EF.$$

由于 $AB = EF$，$BC = DE$，所以 $AC = DF$；綫段 AC 与綫段 DF 既然长度相等，又是同一指向（因为 C 在 A 的右边，F 在 D 的右边），所以它們相等．

2° 假定綫段 AB 与綫段 BC 指向相反，同时假定綫段 AB 較長(图 3).

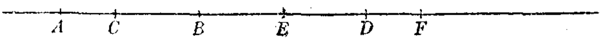

图 3

譬如，若 B 在 A 的右边，C 就在 B 的左边. 由于 BC 短于 BA，点 C 必在 A 与 B 之間，并在 A 的右边. 同样，因为綫段 DE 与綫段 BC 同一指向，所以 E 在 D 的左边；因为綫段 EF 与綫段 AB 同一指向，所以 F 在 E 的右边. 由于 EF 长于 ED，F 也在 D 的右边. 一方面 C 在 A 与 B 之間，另一方面 D 在 E 与 F 之間，所以

$$AC = AB - BC,$$
$$DF = EF - ED,$$

从而

$$AC = DF.$$

結論是：綫段 AC 与綫段 DF 既然長度相等，又是同一指向(因为 C 在 A 的右边，F 也在 D 的右边)，所以它們相等.

上面的定理可以表达如下：两个有向綫段的几何加法是有交換性的.

注意 1° 两个相反的有向綫段的合量，是一个零有向綫段. 因为(图 3)，如果 $AB = BC$，点 C 就与点 A 重合. 有向綫段 AC 的原点与終点重合，故等于零.

2° 根据上面的定理，給两个有向綫段的合量下定义时，无須指明拈取綫段的先后，因构成它們的合量的結果与次序无关.

3° 如果一个动点沿一直綫先由点 A 移到点 B，然后由点 B 移到点 C，它就先后走了綫段 AB 和綫段 BC 所表示的路程. 由此看来，两个有向綫段的合量，就是动点从出发点 A 直接移到最后到达点 C 所走的路程.

上面的定理指出，动点从同一点 A 出发，到点 C，与其先后走那两个有向綫段的次序无关. 譬如动点从点 A 起，先向右移动 100 米，然后，向左移动

50 米，到达点 C，与先向左移动 50 米，然后再向右移动 100 米所到达之点并无不同．在这两种情况之下，到达之点 C，都与动点直接向右移动 50 米所达之点相同．

3．两个以上的有向綫段的合量　設有給定的几个有向綫段 S，S'，S''，S'''，載于同一直綫上，它們的合量或几何和是如下获得的有向綫段：先求出头两个有向綫段 S 和 S' 的合量 R'，再求出 R' 和下一个有向綫段 S'' 的合量 R''；最后，R'' 和末一个有向綫段 S''' 的合量 R'''，就是給定的四个有向綫段按給定次序相加的合量 R．如果給定的有向綫段相連接，前面的有向綫段的終点与后面的有向綫段的原点相重合，則它們的合量就是以第一个有向綫段的原点为原点、以末一个有向綫段的終点为終点的有向綫段．如图 4，考慮几个有向綫段，綫段 AB，綫段 BC，綫段 CD，綫段 DE．綫段 AB 和綫段 BC 的合量是綫段 AC；綫段 AC 和綫段 CD 的合量是綫段 AD；最后，綫段 AD 和綫段 DE 的合量是綫段 AE．所以，給定的四个有向綫段的合量，是以第一个有向綫段的原点为原点、而以末一个的終点为終点的有向綫段 AE．

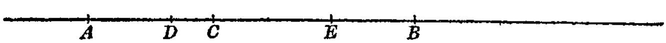

图 4

定理 I　几个同載綫的有向綫段的合量不变，如果把两个或两个以上相連的有向綫段以它們的合量代替之；或相反，一个有向綫段，可用以它为合量的两个或两个以上的有向綫段代替之．

設有五个有向綫段，綫段 AB，綫段 BC，綫段 CD，綫段

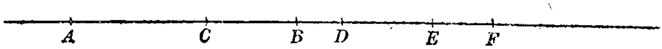

图 5

DE，綫段 EF，其合量为綫段 AF（图 5）．試将图上的中間点 C 去掉．这对于两个极端点 A 和 F 不发生影响，所余的四个有向綫段，綫段 AB，綫段 BD，綫段 DE，綫段 EF，还是以綫段 AF 为合量．可見，两个相連的有向綫段可以其合量代替．泛言之，不拘多少个相連的有向綫段，都可以其合量代替；因为这无非是在有向綫段构成的图形上簡单地去掉一个或几个中間点而已．

反之，設有四个有向綫段，綫段 AB，綫段 BD，綫段 DE，綫段 EF，以綫段 AF 为合量；在載綫上任取一点 C．此点 C 与点 B 及点 D 形成两个相連的有向綫段，綫段 BC 和綫段 CD，它們以綫段 BD 为合量．增添点 C 对于两个极端点并无影响，所获得的五个有向綫段还是以綫段 AF 为合量．泛言之，我們可以把一个有向綫段，用以它为合量的几个綫段代替；因为这无非是在几个有向綫段形成的图形上，增添一个或几个中間点而已．

定理 II 設在同一直綫上有給定的几个有向綫段，它們的合量，与求合量时拈取它們的次序无关．

換句話說，需要証明，当交換同載綫的有向綫段的次序时，其合量不变．这有两种情况：

1° 掉換两个相連的有向綫段的次序，总合量不变．依定理 I，这两个有向綫段可以其合量代替；然后，依逆定理又可以把这合量，用以它为合量的两个相連的有向綫段代替，特别是，就以原来这两个有向綫段交換次序代替之．两次替代的結果，是使两个相連的有向綫段变換了次序，对于总合量并未发生影响．

2° 有向綫段的次序可以任意掉換．依上所述，两个相連的有向綫段的次序既然可以变換，那么，只須做遍了这样的变換，就能把給定的有向綫段排成任何次序，而且每次变換并不影响总合量，定理于是証明．例如，設有按下面的次序排列的五个有向綫段：

$$S,\ S',\ S'',\ S''',\ S^{\mathrm{IV}}.$$

我們可以把次序变换为

$$S', S, S^{\mathrm{IV}}, S''', S''.$$

为此，只須作一系列两个相連的有向綫段的掉换如下：

$$\underline{S', S}, S'', S''', S^{\mathrm{IV}};$$

$$S', S, S'', \underline{S^{\mathrm{IV}}, S'''};$$

$$S', S, \underline{S^{\mathrm{IV}}, S''}, S''';$$

$$S', S, S^{\mathrm{IV}}, \underline{S''', S''}.$$

（掉换次序的两个有向綫段画一横綫表示.）

注意 根据这个重要的定理，为了确定几个有向綫段的合量，用不着說按什么次序拈取它們以构成这个合量.

有向綫段的几何和，具有普通数的算术和的基本性质，即交换各項的次序，其和不变. 一般的几何加法是有交换性的.

定理 III 設在同一直綫上給定几个有向綫段，两个或两个以上的有向綫段，可以其合量代替之，总合量不变.

这个定理，在有向綫段相連接的情况下业已証明. 如果有向綫段不連接，可首先掉换次序，使其連接，这不会影响总合量；然后就可以把所考虑的有向綫段，以其合量来代替.

反过来，我們可以把一个有向綫段，用以它为合量的几个綫段所代替，然后将这些新的有向綫段随意分布于其他有向綫段之間.

注意 定理 III 使有向綫段的几何和与几个数的算术和更徹底地类似. 因为定理 III 正与算术和的下列命題相对应：在几个数的和中，部分的数可以其和代替，反之，也可以部分的数代其和.

关于这个特性，我們說：几何加法具有結合性.