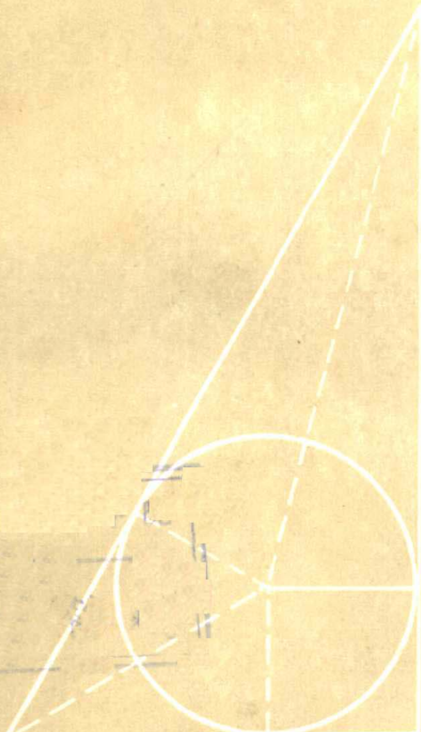
浅谈几何辅助线

袁晓东 编



北京师范大学出版社

浅谈几何辅助线

袁晓东 编

北京师范大学出版社

出 版 说 明

几何，对于初学者来说，总感到困难，证题无从下手，辅助线不会作。作者根据自己多年的教学实践，总结出一些基本规律，并编成歌诀。经作者在几个地区的实验证明，歌诀便于学生记忆和使用，有助于提高证题的技巧和能力。

本书可作中学生的学习参考书和中学老师的教学参考书。也可供自学青年使用。

浅谈几何辅助线

袁晓东 编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

西安新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：7.625 字数：160千

1984年12月第1版 1984年12月第1次印刷

印数 1－47,000

统一书号：7243·263 定价：0.95元

序　言

东风吹渭水，群英赴长安。在《西北五省（区）数学教学研究首届联合交流会》上，西北地区数学界的代表，欢聚古城西安，交流教学经验。他们从西北五省（区）的实际出发，贯彻中国教育学会数学教学研究会“烟台会议”精神，进一步加强中学数学“双基”教学的研究，大面积提高初中教学质量而献计献策。1977年以来，由于种种原因，初中学生的成绩两极分化愈来愈严重，其中初中数学教学是一个薄弱环节，多数学生过不了平面几何入门这一关，那更谈不上在几何中怎样作辅助线了。这是作者撰写本书的动机。

学过数学的人都知道，在几何证明题中，遇到稍难的问题，往往束手无策，或者说，不会由题设推出题断。这就需要想法于题设与题断之间搭一座桥，使二者之间畅通无阻。这座桥就是辅助线。

几何辅助线起着桥梁作用和化难为易的作用，因此辅助线在几何证明题中是有力的工具。然而中学几何课本里都用到辅助线，却没有讲怎样作辅助线。这个问题就成了理论上打通了，而方法上、规律上都还有待于研究解决。

北京师范大学梁绍鸿先生的函授学生袁晓东同志，是一位富有教学经验的教师，他喜欢钻研，抓业余时间，以勤补拙。1978年4月，他出席了西安市科学大会；1982年初，《陕西电视台》将他在研究“圆形计算尺为农业应用”方面

的事迹和讲课，进行了播放，向全省农村推广；1977年10月以后，他在指导高考复习中，对几何作辅助线开始了探索，边教边写，翻阅资料，终于找到了不少作辅助线的规律。他把规律两年前编成歌诀，通俗易懂，文笔有趣，应用方便。1980—1983年，他先后在西安、户县、洛川等地一些中学进行推广，曾得到了师生的欢迎。后来根据校内外师生的要求以及魏庚人先生、赵慈庚先生的鼓励，除在平面几何作辅助线外，还在立体几何、解析几何与三角等方面也举了例证，把研究成果，汇集成书。本书可供中学师生参考之用，不但从中可以学到知识，并且可以收到提高能力、发展智力的效果。

欲穷千里目，更上一层楼。几何作辅助线是一个较复杂的课题，不可能一下子解决好。袁晓东同志已由长安县细柳中学应聘于陇县中学任教，这次他有幸出席西北五省会议，开扩眼界，互相学习，我希望他今后能在我省陇县和宝鸡市教育部门诸同志的帮助下，加倍努力，戒骄戒躁，在教学研究的道路上，为四化做出更多的贡献！

陕西省教育学会中小学数学教学研究会副理事长
兼西安市教育学会数学研究会理事长

夏志强

1983.11.

目　录

第一章　辅助线的分类 ……………………………………（1）

第二章　作辅助线的一般规律……………………………（9）

第三章　范例 ………………………………………………（13）

§1.　中点、中位线，延线、平行线…………………（13）

§2.　垂线、分角线，翻转全等连 ……………………（32）

§3.　边边若相等，旋转作试验 ………………………（41）

§4.　造角、平、相似，和、差、积、商见……………（52）

§5.　两圆若相交，连心、公共弦 ……………………（91）

§6.　两圆相切、离，连心、公切线 …………………（100）

§7.　切线连直径；直角与半圆 ………………………（109）

§8.　弧、弦、弦心距；平行、等距、弦 ……………（133）

§9.　面积找底高；多边变三边 ………………………（146）

§10.　歌诀联合用，分析是关键 ………………………（169）

第四章　补遗 ………………………………………………（203）

第五章　练习题 ……………………………………………（210）

主要参考书 …………………………………………………（235）

编后记 ………………………………………………………（236）

第一章　辅助线的分类

1.在几何证明题中，往往由已知（也叫条件或题设）推出结论（也叫求证或题断）是很困难的。这种困难，一是由于我们对定义、定理、公理等不熟悉，二是分析能力和逻辑思维能力较差，三是作不出辅助线。前两者姑且不谈，只谈后者。我们的任务是过河，要过河，就需解决桥和船的问题。桥和船在几何图形中可认为是辅助线，在代数方程中可认为是辅助未知数，在解析几何中可认为是参数，在立体几何中可认为是辅助面，在三角中可认为是辅助角等，我们数学界老前辈傅种孙先生对于数学中的桥和船，他统称为“辅助件”。

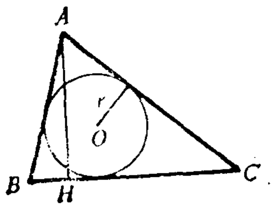
如何作几何中的辅助线？没有一个固定的模式可循。要具体问题具体分析，要靠自己多实践，从中摸出一些可行的规律。但总的说来，大致可分为：不作、可作、巧作、多作和难作等五类。

第一类：不作辅助线。

试作一　已知$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)\cdot r$，其中$r$为内切圆半径，又三边$AB$、$BC$、$CA$成等差数列（图一），求证：（1）$\triangle ABC$的高$AH=3r$.

（2）$\sin C$、$\sin A$、$\sin B$亦成等差数列。

证明：设$AB=a-d$，$BC=a$，$CA=a+d$，



图一

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)\cdot r$$

$$=\frac{3}{2}a\cdot r,$$

又 $S=\frac{1}{2}a\cdot AH$，

故 $\frac{3}{2}a\cdot r=\frac{1}{2}a\cdot AH$，即 $AH=3r$。

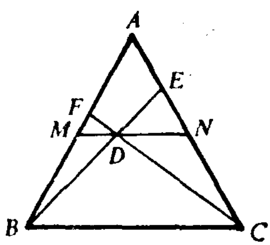
用正弦定理可证（2）。

试作二 正三角形的两边AB、AC的中点为M、N两点，D为MN上一点，BD、CD和对边的交点为E、F，设$CE=x$，$BF=y$，$BC=2a$ 求证：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2a}$，

提示：
$$\begin{cases}\dfrac{MD}{2a}=\dfrac{FM}{BF}\\[2ex]\dfrac{DN}{2a}=\dfrac{EN}{CE}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{MD}{2a}=\dfrac{y-a}{y}=1-\dfrac{a}{y},\ (1)\\[2ex]\dfrac{DN}{2a}=\dfrac{x-a}{x}=1-\dfrac{a}{x},\ (2)\end{cases}$$

(1)+(2)：$\frac{MN}{2a}=2-\left(\frac{a}{x}+\frac{a}{y}\right)$，

即 $\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=\frac{3}{2}$。



图二

以上两例，如果硬要作辅助线，那将是，弄巧成拙，事倍功半。因此，说明证题之困难并非一概为辅助线所致，所以，谓之“不作”。此类题在本书的范例中不出现，空集也。

第二类：可作辅助线。

试作三 已知在$\triangle ABC$之两边AB，AC上分别向外作正$\triangle ABF$及$\triangle ACE$，连结BE、CF，且交于O，再连结AO，

求证：$\angle 1=\angle 2$。

分析：（1）图三甲，容易证得$\triangle ABE\cong\triangle AFC$，

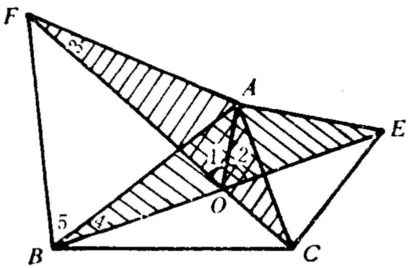
则 $\angle 3=\angle 4$，

$\therefore$ A、F、B、O四点共圆。

$\therefore$ $\angle 1=\angle 5=60°$

同理$\angle 2=60°$。

故 $\angle 1=\angle 2$。



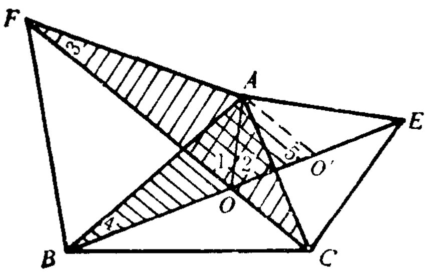
图三甲

（2）如图三乙，由上面（1）可知，

$\angle 3=\angle 4$，

又$AF=AB$。

把$\triangle AFO$绕中心A，逆时针旋转至$\triangle ABO'$处，则$\triangle ABO'\cong\triangle AFO$（歌诀：边边若相等，旋转作试验）



图三乙

$$\therefore \left.\begin{cases}\angle 1=\angle 5\\ AO=AO'\Longrightarrow\angle 2=\angle 5.\end{cases}\right\}\Longrightarrow\angle 1=\angle 2.$$

从这个题可以看出，不作辅助线证明起来要比作辅助线

AO'简单些。不过初二学生没学过四点共圆，那只能作辅助线了。故曰"可作"。此类题在本书范例中是蜻蜓点水，一掠而过。

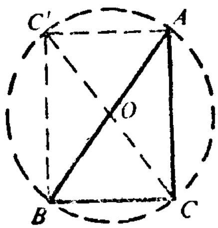
第三类：巧作辅助线。

试作四 用托列米（ptolemy）定理证明勾股定理（图四）：

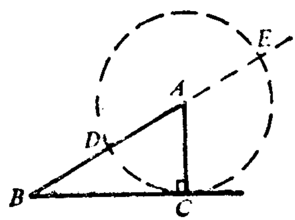
关于勾股定理的证法，历代数学家多有用面积割补和射影定理去证，据梁绍鸿老师所谈，其证法不下二百种。这里我用"直角与半圆"的歌诀作出了辅助圆，得矩形$AC'BC$，再用托列米定理非常简单。（见范例42，应用1）

其次，还有两种特殊证法介绍如下：

（1）应用切割线定理：以$Rt\triangle ABC$之A为圆心，以AC为半径画辅助圆，（歌诀：直角与半圆）交AB于D，



图四



图五

延长BA交$\odot A$于E（图五），

则 $BC^2=BD\cdot BE=(AB-AD)(AB+AD)$

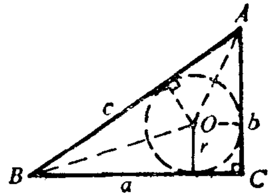
$=AB^2-AD^2$

$=AB^2-AC^2$，

即 $c^2=a^2+b^2$.

（2）借助于内切圆：作$Rt\triangle ABC$的内切圆O，（歌

诀：切线连直径）见图六。



图六

设⊙O 的半径为 r，

由 $a+b-c=2r \Longrightarrow$

$(a+b)^2=(2r+c)^2$

$\Longrightarrow a^2+2ab+b^2$

$=4(r^2+rc)+c^2$，

但 $2ab=4S_{\triangle ABC}=4(r^2+$

$+2S_{\triangle ABO})=4(r^2+rc)$，$\therefore$ $a^2+b^2=c^2$。

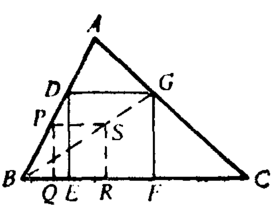
以上特殊证法（包括用托列米证法）和用射影定理去证一样，都是以相似形为理论基础的，故在逻辑上均能成立。诸如此类，在辅助线作法上可谓“巧作”。作了辅助线以后，证明很简单。

第四类：多作辅助线。

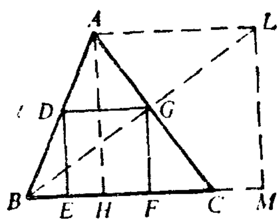
试作五 已知△ABC，求作内接正方形$DEFG$。

作法1：在AB上任取一点P，作正方形$PQRS$为辅助正方形，连结BS且延长交AC于G，可得。（图七甲）

作法2：在顶点A处作$AH\perp BC$，再作正方形$AHML$为辅助正方形，连结BL交AC于G，可得。（图七乙），



图七甲



图七乙

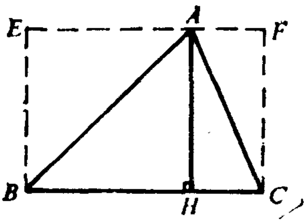
本类中「试作五」和「试作六」都是多作辅助线的例

子。本书中的范例是以第三类和第四类作为重点讲述的。对于「试作五」的其它作法还可参考第三章范例130中的研究。

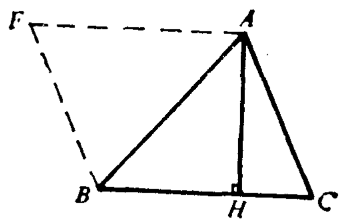
试作六 已知$\triangle ABC$中，$BC=a$，高$AH=h$，面积为S。

求证： $S=\frac{1}{2}ah.$ （用极限证法参看第四章例五）

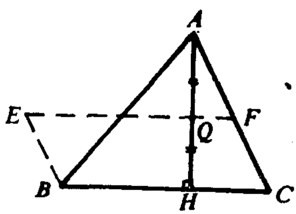
分析： 这个求三角形的面积公式是基本公式之一，要证明必须建立在求矩形的面积公式上，所以要设法作辅助线把三角形转化为矩形。其辅助线作法画出几种，供参考（图八甲乙丙丁）：



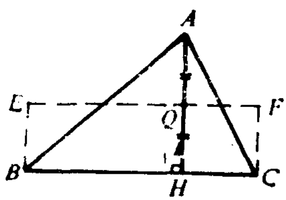
图八甲



图八乙



图八丙

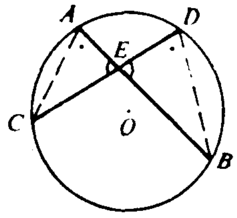


图八丁

试作七 求证相交弦定理。

提示： 相交弦定理是圆中基本定理之一，它是在相似形

的基础上建立的，所以必须作辅助线创造相似形（如图九）（连结AD，CB亦可）。



图九

从这两题的几种方法作辅助线看，可使证题思路大为开阔，应用知识范围宽广。

第五类：难作辅助线。

要证某题，非作辅助线不可，但无从下手，所以只好凭经验善分析。要巧干，多闯见，既要锻炼逻辑思维，还要加强形象思维，设法作出辅助线来，故曰："难作"。本书补遗就是这一类。不过，这一类题在中学数学课本中，非常罕见。我希望深钻几何的读者继续研究。

综上五类，我们把辅助线的不作，可作，巧作，多作和难作统称为"试作"辅助线。不过，这五类是相对的，而不是绝对的。

2.图形的准确性对证题很有帮助，所以证题时，首先要按条件（有时按结论）尽量把图画准确，使之有直观性。如要证明线段相等，而图中线段长短不一，那就要检查另画图。在立体几何中的线段、角则不然。如直角不一定在图上显示为直角等。不过在立体几何中，你必须要有丰富的想象力或制作模型，或另画局部图为佳。我深感只有首先建立正确的感性认识，也就容易而迅速地提高到理性的认识上去。在画图时，绝不能随便增加条件，如画$\triangle ABC$，有些学生往往画成$Rt\triangle ABC$，等边$\triangle ABC$，这都是不对的。

3.当你不易作出辅助线，或作了后不易证出结论时，就可把图形、已知或求证稍加变换，往往化难为易，水到渠

成。如$a^2=b(b+c)$，变换成$\frac{a}{b}=\frac{b+c}{a}$，就容易想出相似三角形，作出辅助线，等等。所以，恩格斯在《反杜林论》中说："数学中的变换，不是无聊的游戏，而是解决实际问题的杠杆。"

一言以蔽之：几何作辅助线，在解题时，必须目的明确，讲究方法和技巧，不能盲目从事，否则会使图形杂乱纷繁，不利思考，自捆手脚。因此，我编写一首打油诗，馈赠读者，以作应用辅助线十句歌诀时借鉴：

证题有困难，　试作辅助线；
编歌供参考，　望尔多实践。
条件和结论，　先后把歌念。
感性须直观，　变换作杠杆。

第二章 作辅助线的一般规律

虽然几何题目千差万别，证明方法多种多样，辅助线的作法也因题而异。但笔者经多年的教学实践认为，可以总结出作辅助的几条规律。现以歌诀形式叙述如下：

1.中点、中位线，延线，平行线。

如遇条件中有中点，中线、中位线等，那么过中点，延长中线或中位线作辅助线，使延长的某一段等于中线或中位线；另一种辅助线是过中点作某已知边或线段的平行线，以达到应用某个定理或造全等形的目的。此外，也有制造中点和辅助圆作辅助线，我们把它放在§10中叙述。

2.垂线、分角线，翻转全等连。

如遇条件中有垂线或角的平分线，可以把图形按轴对称的方法，并借助其它条件，而翻转180°，得到全等形，这时辅助线的作法就会应运而生。其对称轴往往是垂线或角的平分线。

3.边边若相等，旋转作试验。

如遇条件中有多边形的两边相等或两角相等，有时边角互相配合，然后把图形旋转一定的角度，可得全等形，这时辅助线的作法仍会应运而生。其对称中心，因题而异，有时没有中心。故可分“有心”和“无心”旋转两种。（见范例39）

4.造角、平、相似，和、差、积、商见。

从解题实践知道，欲证线段或角的和差积商，往往与相似形有关。在制造两个三角形相似时，一般地，有两种方

法：第一，造一个辅助角等于已知角；第二，是把三角形中某一线段进行平移。故作歌诀："造角、平、相似，和、差、积、商见"。

托列米定理和梅叶劳定理的证明作辅助线分别是造角和平移的代表。

5.两圆若相交，连心公共弦。

如果条件中出现两圆相交，那么辅助线往往是连心线或公共弦。

6.两圆相切、离，连心、公切线。

如条件中出现两圆相切（外切，内切）或相离（内含、外离），那么，辅助线往往是连心线或内外公切线。

7.切线连直径；直角与半圆。

如果条件中出现圆的切线，那么辅助线是过切点的直径或半径使出现直角；相反，条件中是圆的直径、半径，那么辅助线是过直径（或半径）端点的切线。即切线与直径互为辅助线。

如条件中有直角三角形，那么作辅助线往往是斜边为直径作辅助圆，或半圆；相反，条件中有半圆，那么在直径上找圆周角——直角为辅助线。即直角与半圆互为辅助线。

8.弧、弦、弦心距；平行、等距、弦。

如遇弧，则弧上的弦是辅助线；如遇弦，则弦心距为辅助线。

如遇平行线，则平行线间距离相等，距离为辅助线；反之，亦成立。

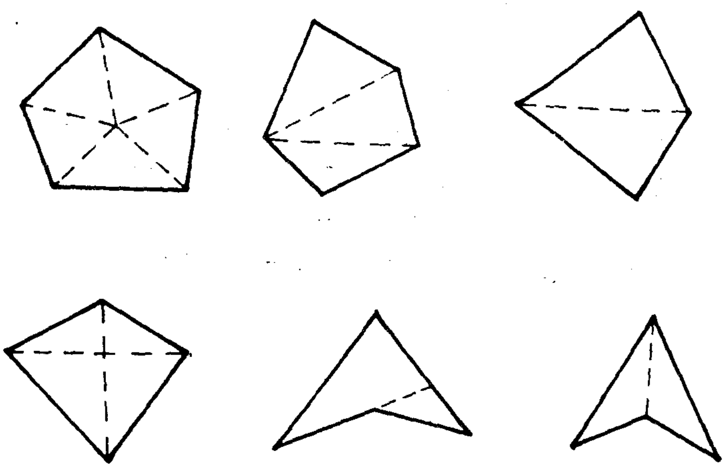
如遇平行弦，则平行弦间的距离相等，所夹的弦亦相等，距离和所夹的弦都可视为辅助线；反之，亦成立。

有时，圆周角、弦切角、圆心角、圆内角和圆外角也存在因果关系互相联想作辅助线。

9.面积找底高；多边变三边。

如遇求面积（在条件和结论中出现线段的平方、乘积，仍可视为求面积），往往作底或高为辅助线，而两三角形的等底或等高是思考的关键。

如遇多边形，想法割补变成三角形；反之，亦成立。仅画部分图形，，以供参考：



（凹四边形）