

浙江大学出版社

弹性结构的屈曲

[加] J. 罗达 著 王飞跃 译
谢贻权 校

高等学校教学用书

弹性结构的屈曲

[加] J. 罗达 著

王飞跃 译

谢贻权 校

浙江大学出版社

内 容 简 介

由于近代大型结构对减轻重量的迫切要求,使弹性结构屈曲的研究变得愈来愈重要。本书从基本概念开始,介绍了结构的后屈曲理论、实验,缺陷结构的稳定性,随机缺陷和可靠性等近代理论。内容深入浅出,层次分明,结构严密,说理清楚,全书采用国际单位制。

本书可作为理工科院校的工程力学、航空、造船、土建、机械等有关专业的教材,亦可作为有关研究人员和工程技术人员人员的入门参考书。

弹性结构的屈曲

[加] J. 罗达 著

王飞跃 译

谢贻权 校

责任编辑 贾吉柱

浙江大学出版社出版

上虞汤浦印刷厂排版

肖山东湘印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

787×1092 32 开本 3.5625 印张 78 千字

1989年6月第1版

1989年6月第1次印刷

印数: 1—3000

ISBN 7-308-000

定价: 0.95 元

译者前言

自从1759年L.Euler提出压杆屈曲的经典理论后,他的工作,经过长达一个多世纪未能赢得人们应有的理解和注意,而只是被看作为一个大数学家的奇想而已。直到十九世纪的后半叶,随着铁道交通的发展,由于对压杆屈曲的错误计算,在欧洲发生了许多次桥梁等倒塌事故,压杆的屈曲问题才引起工程界和研究者的重视,成为工程上需要解决的重大问题。但是随后的一个世纪中,屈曲的研究一直停留于寻找结构开始屈曲的临界载荷,而对屈曲后发生的现象很少考虑。可是在近30多年来,由于航空、航天、大尺寸空间结构,大型船体等对减轻结构重量的迫切需要,促进了精确屈曲理论的研究,并取得了突破,搞清楚了屈曲开始后所发生的现象,建立了非线性的后屈曲理论。

本书原著是加拿大Waterloo大学土木系J.Roorda教授所著。该书内容精湛,篇幅紧凑,阐述清楚、简练,深入浅出,从屈曲的基本概念开始,介绍了后屈曲的理论、实验,带缺陷结构的稳定性,随机缺陷和可靠性等近代理论,十分适合建筑、桥梁、机械、船舶、航空、航天、力学等有关专业的师生、工程设计人员和科研工作者入门学习之用。考虑到当前我国有关屈曲理论的书藉出版尚不多,外文原版书又不易得到,特翻译出版,便利学习、阅读。

限于译者的业务水平,译稿中错误欠妥之处在所难免,敬请读者给予批评和指正。

译者 1988年5月

目 录

译者前言

第一章 基本的稳定性概念	1
1.1 引言.....	1
1.2 稳定性.....	3
1.3 最小势能原理的数学意义.....	5
1.3.1 单自由度系统	5
1.3.2 多自由度系统	8
1.3.3 连续系统	10
第二章 弹性结构的后屈曲	18
2.1 引言.....	18
2.2 单自由度系统的分析.....	19
2.2.1 平衡分析	20
2.2.2 稳定性分析	23
2.3 实例.....	28
2.3.1 Von Mises 桁架.....	28
2.3.2 双杆框架模型	31
2.3.3 弹性压杆	34
第三章 带缺陷弹性结构的不稳定性	39
3.1 引言.....	39
3.2 n 个自由度的缺陷结构	40
3.3 平衡和稳定性.....	45
3.4 对称后屈曲的性质.....	52
3.5 缺陷敏感度.....	57
第四章 后屈曲实验	60
4.1 引言.....	60

4.1 试验结构	65
4.2 试验方法	65
4.3 试验设备	65
4.4 试验过程	65
4.5 试验结果	65
4.6 结果的评述	77
第五章 随机缺陷和可靠性	80
5.1 引言	80
5.2 临界载荷的统计分析	81
5.2.1 特殊情况	85
5.2.2 例:柱的失效	88
5.3 稳定性和可靠性	93
5.3.1 独立正态变量	95
5.3.2 轴向加载的圆柱壳	99
参考文献	101

第一章 基本的稳定性概念

1.1 引言

在探索结构稳定性知识的过程中，以往的研究人员基本上习惯于两种方法。第一种方法，人们认为结构是由粒子或质点组成的连续体，全体质点在同一时刻所在的位置总称为结构的构形，只要移动结构的任意一个质点，结构就经历了一个位移，简而言之，结构构形的任一变化就是一个位移。这就是所谓的“连续体方法”。尽管它在概念上是严格的，但其缺点在于由这种方法所引入的数学复杂性常常掩盖了基本的整体结构的性质。

第二种方法在本质上要简单些，它是基于宏观水平，而不是在上述微观水平上进行考虑。其思路是首先抓住结构的整体性质，用有限个确定的“内涵”量对结构进行分析，并由这些量表征结构在屈曲过程中的整体变形。通常的做法是选取结构上的某些离散点的位移，结合适当选取的模式，由这些位移就定义整个结构的形式或构形。这一宏观的方法自然地导致了自由度的概念。例如，表示压杆挠度的傅里叶级数

$$y = \sum_n Q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (1.1)$$

的系数 Q_n 是一组广义坐标。如果级数在某一 n 值被截断，那么压杆的构形就可以用有限个自由度来逼近。这种近似方法为宏观学派分析者广泛采用。由于它所涉及的分析比较简单，因此在下面的描述中我们将采用这一方法。

在开始研究弹性结构稳定性之前,人们或许会提出这样的问题:为什么要指定是弹性结构呢?Chilver^[1]在回答这个问题时是这样说的:“不稳定性本质上是几何形状处于极端状态的结构,比如象细长压杆、薄平板和薄圆柱壳等所具有的特性。撇开对稳定性的考虑,极端的几何形状对结构设计者来说也是非常具有吸引力的。结构稳定性的正确意图,就是要阐明由于考虑稳定性而对极端几何形状所施加的限制。对于极端几何形状的结构,屈曲基本上都发生于弹性状态,至少在屈曲的初始阶段是如此。此外,在多数实际工作条件下(与破坏条件相反),结构一般都是处于弹性状态”。尽管弹性屈曲可能会在非极端形状的结构中发生,对于它们的研究同样是有价值的,而且有时还是必需的,弹性屈曲一直是并将继续是人们最关心的问题。

屈曲理论的经典问题是确定处于平衡状态下的结构系统转变为不再稳定的条件。通常,都是处理那些具有一定几何对称特性的未屈曲的结构系统。这种结构有一个变量,它常常是代表外载荷的实参数 P ,当然它也可能是温度(在热屈曲问题中)或磁场强度(在磁弹性屈曲问题中)。重要的是,对应于 P 的每一个值,仅存在一个未屈曲的结构构形。

在经典屈曲问题中,当 P 较小时系统是稳定的,而当 P 较大时系统就变成不稳定的。系统转变为不稳定时的 P 值称为临界载荷,通常记作 P_{CR} 。更一般的结构稳定性问题,是要确定在给定加载类型下结构的平衡构形,搞清楚构形中哪些是稳定的,它们在什么载荷水平下发生和在这些载荷水平下又有什么特征性的结果。

1.2 稳 定 性

假设一个弹性保守系统，最初在一系列外力的作用下处于静平衡状态。当受到某些扰动力的作用时，系统就会偏离原来的平衡状态，亦即产生了位移和速度。如果扰动力传递给系统的能量是 E ，那么，根据能量守恒原理

$$E = T + V = \text{常数}$$

这里 T 是系统的动能， V 是系统的势能。可见， T 每增加一个小量，同时 V 将减少一个量值相等的小量，反之亦然。于是，就产生了许多不同的情况。如果系统初始时刻处于具有最小势能的平衡位置上，当给它一个小的初始速度后，系统的动能 T 在随后的自由运动中将因势能 V 的增加而减少，因此系统偏离初始状态的位移将保持为小量，从而平衡状态是稳定的。由此推知，一个置于光滑圆球形碗底的小球是处于稳定状态，如图 1.1(a)。如给予该小球一个微小初速度，它将开始在碗底振动，并且保持在其平衡状态的附近。另一方面，如果系统初始时不是处在最小势能 V 的位置，当给予系统一个激励使它沿着势能减少的路径运动后，系统的动能将连续增加，结果很快就产生较大的位移和速度。这样的系统就称为不稳定的，这种情况与一个放置在光滑“小山”顶上或转折水平点上的小球相似，如图 1.1(b)，1.1(c)所示。

由上面的直观论述可以引出最小势能原理的表述如下：

一个保守系统处于稳定平衡状态的充要条件是其势能取相对极小值。

这里用了“相对”二字，因为平衡状态附近可能存在其他的极小值，它们的势能值更小，并且同平衡状态极小值相隔一座

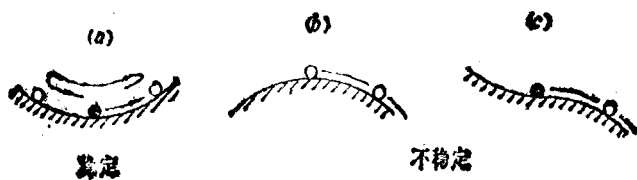


图 1.1

“小丘”。这一点可由图 1.2 来说明。如果“踢”一下处在平衡状态 A 的小球，即给予它一个足够小的扰动，那末传递给小球的能量将不足以使它越过“丘峰”而到达位置 B 。但是，如果“踢”得较重，足以使小球滚过小丘，最后在平衡位置 B 静止下来，而处于更低的能量水平，并与 A 离开一段有限的距离。从实际来看，尽管 A 点相对于（无限小）扰动是稳定的，但是从工程观点来看，这类平衡是完全不能接受的。例如，人们不能接受这样的一个扁圆屋盖结构，它可以处于所希望的平衡状态，而且只要扰动保持很小时总是稳定的。但是，如果屋盖受到一个有足够大能量的剧烈冲击，它就很可能发生突变而进入严重的变形状态。因此，应用最小势能原理含意下的无限小稳定性理论时，要仔细

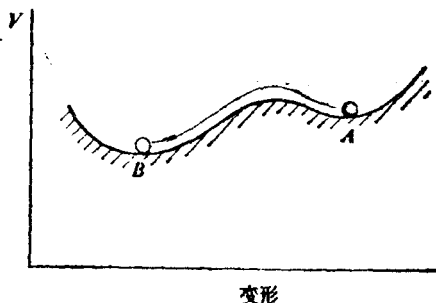


图 1.2

斟酌并充分理解它的实际限制。

必须指出,上述最小势能原理,严格地说要求平衡构形的势能取相对极小值,严格地说,这仅是稳定的充分条件。我们还没有明确地证明它也总是必要的^[2]。尽管如此,最小势能原理还是很有把握地被用作为稳定性的充分和必要条件。

1.3 最小势能原理的数学意义

1.3.1 单自由度系统

如果一个弹性结构,受到一个常力 P 的作用,它的变形状态可由单独一个挠度参数(或广义坐标) Q 完全确定,那么势能就可以写成 Q 的函数,即

$$V = V(Q) \quad (1.2)$$

图 1.3 给出 V 与 Q 关系曲线的一种可能形式,这里假定 V 是 Q 的单值函数。现在要求找出平衡点,并确定这些点究竟是稳定的还是不稳定的。

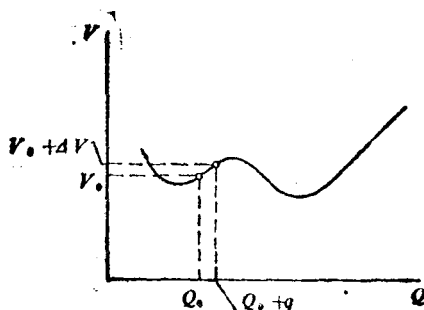


图 1.3

在曲线上选取一任意点 (V_0, Q_0) , 首先需要考察在这点的

微小邻域中曲线的斜率。给 Q 一个微小增量 q , 应用泰勒级数展开 $V(Q)$, 得到

$$V(Q_0 + q) = V(Q_0) + \frac{\partial V}{\partial Q} q + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} q^2 + \dots \quad (1.3)$$

这里偏导数(因为 P 保持为常数)在 Q_0 点取值。上式可以重新写成

$$V_0 + \Delta V = V_0 + \delta V + \delta^2 V + \dots \quad (1.4)$$

这里 $\delta V, \delta^2 V, \dots$ 分别是 V 的一阶, 二阶, $\dots$ 变分。取极值(极大或极小)的条件是 δV 为零。于是, 平衡要求是

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = 0 \quad (1.5)$$

极小值的条件是

$$\delta V = 0, \quad \text{且 } \delta^2 V > 0 \quad (1.6)$$

对于所有可能的 q (非零值) 都成立。因此稳定性的判据是

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} > 0 \quad (1.7)$$

如果 $\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} < 0$, 结构系统是不稳定的, 如果 $\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} = 0$, 那么要

得出结论, 还需要考察更高阶的变分。例如, 如果 $\delta V = \delta^2 V = 0$, 那么 $\delta^3 V \neq 0$, 就表明是一个不稳定系统。如果 $\delta^3 V$ 也为零, 那么 $\delta^4 V > 0$, 表明它是一个稳定系统, 而 $\delta^4 V < 0$ 表明它是一个不稳定系统, 如此等等。而对大多数实际情况, 在二阶变分之内就可确定是否稳定的性质。

例 一根长度为 L 的竖直无重量刚性杆件, 它由一个刚度系数为 C 的扭转弹簧连接到一个固定的基础上。杆件承受沿杆轴中心作用的竖直接荷 P 。试求杆件的竖直位置成为不稳定时 P 的临界值。

解 设给予结构一个小挠度(转动), 如图 1.4 所示, 并计算这位置上势能的改变。

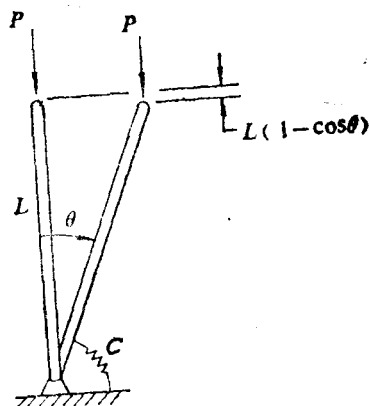


图 1.4

势能:

$$V = (\text{弹簧中的应变能}) - (\text{载荷作的功})$$

$$= \frac{1}{2} C \theta^2 - PL(1 - \cos \theta)$$

平衡:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = C\theta - PL \sin \theta = 0$$

对于小挠度, $\sin \theta \approx \theta$, 因此可求出两个解

$$\theta = 0, \quad P = C/L$$

其中第一个解是竖直(未屈曲)构形。第二个解给出挠曲的平衡状态可能发生时的 P 值。

稳定性:

未屈曲解 $\theta = 0$ 的稳定性由下式给出

> 稳定

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} = C - PL = 0 \text{ 临界}$$

< 不稳定

因此, $P = P_{CR} = C/L$ 是载荷的临界值, 小于这个值的竖直位置是稳定的。

1.3.2 多自由度系统

如果结构的构形可由 n 个独立的挠度参数 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ 完全描述, 并且结构受常力 P 的作用, 那么势能可写成所有 Q 的函数, 即

$$V = V(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n) \quad (1.8)$$

并再次假设 V 是单值的。可以把这个函数想象为 $n+1$ 维空间 $V - (Q_1, \dots, Q_n)$ 中的势能“超曲面”, 如图 1.5 所示。利用 n 维泰勒级数的展开式就可以来研究在任意点 $(Q_{10}, Q_{20}, \dots, Q_{n0})$ 邻域中这个超曲面的形状。

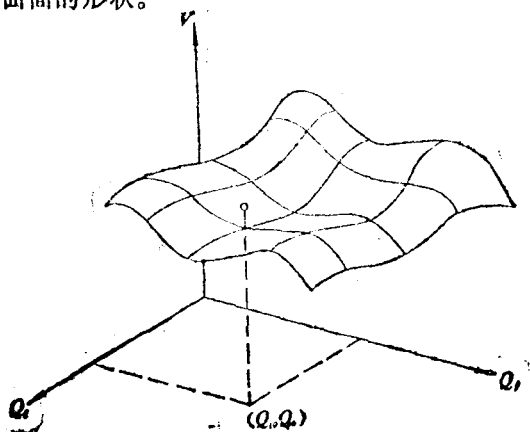


图 1.5

取

$$Q_i = Q_{i0} + q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.9)$$

势能的展开式可以写成

$$\begin{aligned} V(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = & V(Q_{10}, Q_{20}, \dots, Q_{n0}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial Q_i} q_i \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial Q_i \partial Q_j} q_i q_j + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

这里偏导数是在

$$Q_i = Q_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

处取值。

将上式改写成下列形式

$$V_0 + \Delta V = V_0 + \delta V + \delta V^2 + \dots \quad (1.11)$$

取极大或极小值所要求的条件为 $\delta V = 0$ ，这样给出 n 个独立的平衡方程

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.12)$$

对于稳定性，还必须满足正定二阶变分

$$\delta^2 V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial Q_i \partial Q_j} q_i q_j \quad (1.13)$$

的附加要求。如果 $\delta^2 V$ 是正定的（即，它对 q_i 和 q_j 的所有可能的非零组合皆取正值，其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$ ），那么二次型的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial Q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial Q_1 \partial Q_2} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Q_2 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial Q_2^2} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial^2 V}{\partial Q_n^2} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial^2 V}{\partial Q_i \partial Q_j} \right| \quad (1.14)$$

以及它的所有主子行列式都必须是正确的。主子式是它的主对角线同 D 的主对角线重合的那些子行列式。

下面的例子将用来说明这些概念。

例 一个由二根长度为 $L/2$ 的无重量刚性链杆组成的柱结构, 两链杆之间互相铰接并由一刚度系数为 C 的扭转弹簧联接到固定基础上, 竖直载荷 P 沿着柱的中心线作用在上链杆的顶端。试求链杆的竖直位置变为不稳定时 P 的临界值。

解 给结构一个小挠度如图 1.6 所示。这时, 扭转弹簧中的应变能是

$$u = \frac{1}{2} C [\phi_1^2 + (\phi_2 - \phi_1)^2]$$

载荷作的功

$$P\Delta = PL \left(1 - \frac{1}{2} \cos \phi_1 - \frac{1}{2} \cos \phi_2 \right)$$

势能: (无量纲势能——译者注)

$$V' = \frac{V}{C} = \frac{1}{2} \phi_1^2 + \frac{1}{2} (\phi_2 - \phi_1)^2 - \frac{PL}{C} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \phi_1 - \frac{1}{2} \cos \phi_2 \right)$$

平衡:

$$\frac{\partial V'}{\partial \phi_1} = \phi_1 - (\phi_2 - \phi_1) - \frac{PL}{2C} \sin \phi_1$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial V'}{\partial \phi_2} = (\phi_2 - \phi_1) - \frac{PL}{2C} \sin \phi_2 = 0$$

取 $\frac{PL}{4C} = k$ 作为无量纲载荷参数, 重写上列两式, 并注意对

于小角度 $\sin \phi \approx \phi$, 得到

$$\begin{aligned}(2-2k)\phi_1 - \phi_2 &= 0 \\ -\phi_1 + (1-2k)\phi_2 &= 0\end{aligned}$$

显然 $\phi_1 = \phi_2 = 0$ 是一个可能解, 并且仅当系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} 2-2k & -1 \\ -1 & 1-2k \end{vmatrix} = 0$$

才有可能存在屈曲形式的解。由此导出特征方程

$$4k^2 - 6k + 1 = 0$$

其根为

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} = 0.19$$

它们就是载荷参数的特征值。

稳定性: 未挠曲的解 $\phi_1 = \phi_2 = 0$ 的稳定性决定于行列式

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V'}{\partial \phi_1^2} & \frac{\partial^2 V'}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \\ \frac{\partial^2 V'}{\partial \phi_2 \partial \phi_1} & \frac{\partial^2 V'}{\partial \phi_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2k & -1 \\ -1 & 1-2k \end{vmatrix}$$

和它的主子式

$$D_1 = 2-2k$$

$$D_2 = 1-2k$$

的符号。对于稳定状态, 要求条件

$$D > 0, D_1 > 0, D_2 > 0$$

必须全部满足。图 1.7 给出 D 、 D_1 和 D_2 对 k 的变化曲线。显然, 仅当结构的 k 值小于 0.19 时, 铅直位置才是稳定的, 因此

$$P = \frac{0.76 C}{L}$$