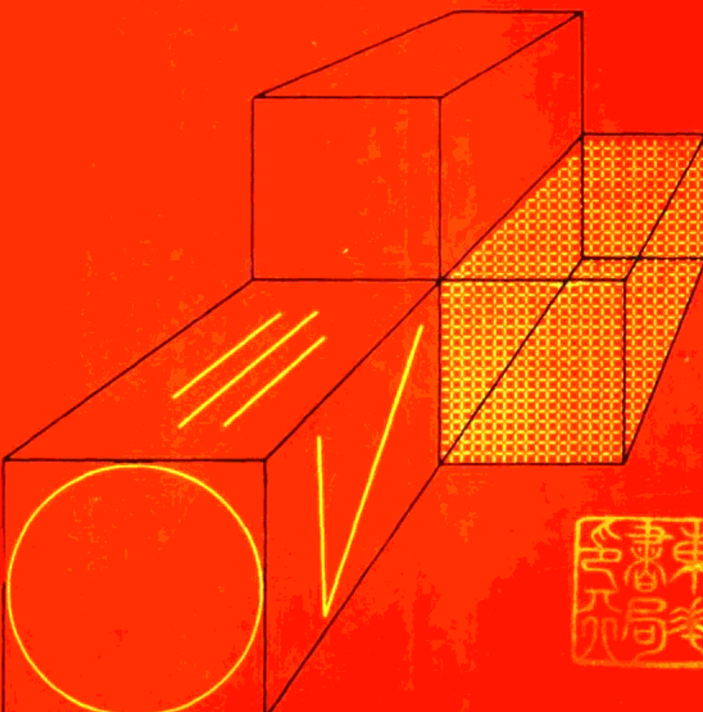
WYLIE AND BARRETT / FIFTH EDITION

高等工程數學精要

下冊

于思禮
張義芳 編



WYLIE 第五版

高等工程數學精要

下册

于思禮
張義芳 編

東華書局印行

中華民國七十五年十一月 初 版

高等工程數學精要（全二冊）

下冊　定價新臺幣壹佰捌拾元整

（外埠酌加運費滙費）

編 著 者　于 思 禮　張 義 芳

發 行 人　卓 鑫 淼

出 版 者　臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
郵撥：00064813

印 刷 者　合 興 印 刷 廠

行政院新聞局登記證　局版臺業字第零柒貳伍號

(75097)

編輯大意

一、本書係根據美國C.RAY WYLIE Furman University及 LOUIS C.BARRETT Montana state University 二位教授原著「高等工程數學」(ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS)第五版(1982)編輯而成。本書包括原著之精要大綱及全部習題詳解。

二、本書原著由於內容豐富實用，國內外各大學普遍採用爲教學課本。在國內已由國立成功大學袁定培、朱越生教授譯成中文由東華書局出版。

三、爲了便讀者在演習本書習題時需要參考公式及重要觀念的方便，我們以精簡扼要的方式整理出每章的大綱，然後詳解每一章的習題。這樣對於正在研讀這門課的讀者、或者在考前需要複習這門課程的讀者，一定會提供不少幫助。

四、爲了節省篇幅，本書未包括原書之題目。有此需要之讀者可參考由東華書局出版之中文本。

五、本書在排校過程中曾接獲大批讀者來信及電話。催促本書儘快出版，在趕工付印情況下疏漏之處在所難免，尚祈方家讀者發現錯誤時不吝指正，俾於再版時修正。

目　次

綱要部份

題解部份

第十章　貝賽爾函數及賴勤特多項式

10-1　初步理論

$x = x_0$ 附近之級數如下列形式

(1)　$y = |x - x_0|^r [a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots]$,

$a_0 \neq 0$

二階線性常微分方程式如下

(2)　$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$

其中 $p(x)$ 及 $Q(x)$ 甚至在 x_0 可不連續者，此項解法常稱作弗勞勃納斯方法

$$(1a)\qquad y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r},\quad a_0 \neq 0$$

現設 $x = 0$ 爲(2)式之一個正則奇點，意指 $xP(x)$ 及 $x^2Q(x)$ 在原點均爲可析，故可寫成下列形式

$$xP(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots\cdots$$

$$x^2 Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots\cdots\cdots$$

故將(2)式乘以 x^2，並代入上列 $xp(x)$ 及 $x^2Q(x)$ 之級數，可得

$$x^2 y'' + x(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots) y' + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots\cdots) y = 0$$

並用 $x_0 = 0$，得

$$y = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots),\ a_0 \neq 0$$

代入方程式(2)，而得

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0$$

即爲微分方程對其展開點之指數方程式其根 r_1 及 r_2 即稱作該正則奇點（$x = 0$）之指數。對每個指數值，即有方程式(2)之級數解，若指數方程式具重根，第二解解答爲。

$$y_2 = C y_1(x) \ln|x| + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

10-2 貝塞爾方程式之級數解

變係數微分方程式中，最爲重要之一種，如

(1) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$$

稱作 ν 階，參數 λ 之貝賽爾方程式。應用問題之牽涉偏微分方程，如波動方程式，熱方程式等，

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-\nu^2)y=0$$

簡稱作 ν 階貝賽爾方程式

對每一 ν 值，函數 y_ν 則稱作第一種 ν 階之貝賽爾函數，常用符號 $J_\nu(t)$ 示：

$$J_\nu(t)=t^\nu\left[\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}-\frac{t^2}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+2)}+\frac{t^4}{2^{\nu+4}2!\,\Gamma(\nu+3)}-\cdots\cdots\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{\nu+2m}}{2^{\nu+2m}m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

而當 ν 並非爲一整數時

$$J_{-\nu}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{-\nu+2m}}{2^{-\nu+2m}m!\,\Gamma(-\nu+m+1)}$$

即爲 ν 階貝賽爾方程式之第二個特解，貝賽爾方程式之一個全解爲：

$$y(t)=c_1J_\nu(t)+c_2J_{-\nu}(t)$$

常不用 $J_{-\nu}(t)$ 而改用線性組合如

$$y_\nu(t)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(t)-J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi}$$

作爲貝賽爾方程式之第二個線性無關之解，此種函數 $y_\nu(t)$ 稱作第二種 ν 階之貝賽爾函數，將貝賽爾方程式之一個全解，寫成另一交替形式

$$y_\nu(t)=c_1J_\nu(t)+c_2y_\nu(t),\ \nu \text{ 非一整數}$$

$$H_\nu^{(1)}(t)=J_\nu(t)+iy_\nu(t)$$

$$H_\nu^{(2)}(t)=J_\nu(t)-iy_\nu(t)$$

即所謂韓克爾函數或第三種 ν 階之貝賽爾函數，用此類函數寫出方程式(3)之一個全解，即爲

$$y(t)=c_1H_\nu^{(1)}(t)+c_2H_\nu^{(2)}(t),\ \nu \text{ 非一整數}$$

10-3 修正型貝塞爾函數

(1) $$x^2y'' + xy' - (x^2 - \nu^2)y = 0$$

即 ν 階之修正型貝賽爾方程式，若 ν 並非整數，故其全解可寫成

$$y = c_1 I_\nu(x) + c_2 I_{-\nu}(x)$$

修正型貝賽爾方程式，亦常出現具有參數 λ 者，如：

(2) $$x^2y'' + xy' - (\lambda^2x^2 + \nu^2)y = 0$$

一個全解

$$y = c_1 I_\nu(\lambda x) + c_2 K_\nu(\lambda x)$$

若 ν 並非整數

$$y = c_1 I_\nu(\lambda x) + c_2 I_{-\nu}(\lambda x)$$

10-4 用貝塞爾函數可解之方程式

微分方程

$$x^2y'' + x(a+2bx^p)y' + [c+dx^{2q} + b(a+p-1) \cdot x^p + b^2x^{2p}]y = 0$$

若 $(1-a)^2 \geq 4c$，且若 d，p，q 均非爲零，則除能顯然化成歐拉方程式之特殊情況外，有一全解爲

$$y = x^\alpha e^{-\beta x^p}[c_1 J_\nu(\lambda x^q) + c_2 y_\nu(\lambda x^q)]$$

其中，$\alpha = \dfrac{1-a}{2}$　$\beta = \dfrac{b}{p}$　$\lambda = \dfrac{\sqrt{|d|}}{q}$

$$\nu = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{2q}$$

若 $d < 0$，則式中 J_ν 及 y_ν 應分別改成 I_ν 及 K_ν；而若 ν 並非整數，則 y_ν 及 K_ν 可視需要而換成 $J_{-\nu}$ 及 $I_{-\nu}$。

10-5 貝塞爾函數之恒等式

定理 1：$\dfrac{d[x^\nu J_\nu(x)]}{dx} = x^\nu J_{\nu-1}(x)$

定理 2：$\dfrac{d[x^{-\nu} J_\nu(x)]}{dx} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$

定理 3： $$\frac{d[x^{\nu}I_{\nu}(x)]}{dx}=x^{\nu}I_{\nu-1}(x)$$

定理 4： $$\frac{d[x^{-\nu}I_{\nu}(x)]}{dx}=x^{-\nu}I_{\nu+1}(x)$$

定理 5： $$\frac{d[x^{\nu}K(x)]}{dx}=-x^{\nu}K_{\nu-1}(x)$$

定理 6： $$\frac{d[x^{-\nu}K_{\nu}(x)]}{dx}=-x^{-\nu}K_{\nu+1}(x)$$

10-6 貝塞爾函數之正交性

定理 1

方程式 $(x^r y')'+(bx^{r-2}+\lambda^2 x^s)y=0$，$r$，$s>0$ 之解且滿足邊界條件如下者：

$$A_i y(x_i)-B_i y'(x_i)=0,\qquad i=1,2;\ 0<x_1<x_2$$

則在區域（ x_1 ， x_2 ），對權函數 x^s 呈正交。若 $x_1=0$ 而其中一解在 $x=0$ 成無窮大時，則條件 $A_1 y(x_1)-B_1 y'(x_1)=0$，應改成在原點附近，y 需要具有界值者爲條件。

定理 2 ：

若 y_n 爲下列方程式中，$\lambda=\lambda_n$ 時之一解

$$\frac{d}{dx}\left(x^r\frac{dy}{dx}\right)+(bx^{r-2}+\lambda^2x^s)y=0,\qquad r,\ s\geq 0$$

則 $$\int x^s y_n^2 dx=\frac{x^r}{2\nu\lambda_n^2}\left[x\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2+(r-1)y_n\frac{dy_n}{dx}+\left(\frac{b}{x}+\lambda_n^2 x^{1-r+s}\right)y_n^2\right]$$

其中 $$\nu=\frac{2-r+s}{2}$$

10-7 貝塞爾函數之應用

甚多實際問題中，常出現貝賽爾函數，原則上，當利用偏微分方程，研究具圓形對稱性分佈形狀之問題時，恒有出現，另一方面，即使並無圓形對稱性，又並無偏微分方程之衆多應用問題，亦常牽涉貝賽爾函數。

10-8 賴勤特多項式

$$\sin^2\theta\,\Theta''+\sin\theta\cos\theta\,\Theta'+[n(n+1)\sin^2\theta-m^2]\Theta=0$$

則常稱作賴勤特附屬方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2\frac{d\Theta}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0$$

即所謂代數型賴勤特附屬方程式，若取$m=0$，即原方程之解與經度角ϕ無關時，

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+n(n+1)\Theta=0$$

通當稱作賴勤特方程式

其解為 $$\Theta(x)=a_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}\cdot x^4-\cdots\cdots\right]+a_1\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\cdots\cdots\right]$$

其中級數之化成有限項數之和者，即稱作賴勤特多項式，或n階球帶調和函數。

有一種稱作羅德里格公式

定理 1:

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

定理 2:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=P_0(x)+P_1(x)z+P_2(x)z^2+\cdots\cdots+P_n(x)z^n+\cdots$$

$$P_0(\cos\theta)=1,\quad P_1(\cos\theta)=\cos\theta$$

定理 3:

代數型之賴勤特多項式，滿足下列正交關係

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\left\{\begin{array}{l}0,\ m\neq n\\ 2/(2n+1),\ m=n\end{array}\right\}$$

第十章　貝塞爾函數及賴勤特多項式

10-1　初步理論

1. 解：若 $a_0=0$

$Eq(8)$ 可寫成 $x^r(a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots)$

$$=x^{r+1}(a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots)$$

$$=x^{r_1}(a_0'+a_1'x+a_2'x+\cdots\cdots\cdots)$$

與原 $Eq(8)$ 同型式，故 $a_0\neq0$ 爲非限制性假設。

2. 解：因 x_0 爲普通點

故 $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1}=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots$$

若 $p_0=0$，　同理 $Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$

$$x^2Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^{n+2}=q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots\cdots$$

若 $q_0=0$，　$q_1=0$

由(11)表示 eq : $z^2+(p_0-1)z+q_0=0$

可簡化成 $z^2-z=0$，　故 $z=0$　或　$z=1$

3. 解：微分方程式 $y''+p(x)y'+Q(x)y=0$

(a) $p(x)=x$，　$Q(x)=1$　在任何點皆解析沒有奇異點

(b) $p(x)=\dfrac{2}{e^x}$　$Q(x)=\dfrac{x}{e^x}$　在任何點皆解析沒有奇異點

(c) $p(x)=0$，　$Q(x)=\dfrac{-\lambda^2}{x^2}$　$\Rightarrow x=0$　爲奇異點

$\therefore xp(x)=0$，　$x^2\ell(x)=-\lambda^2$

$x^2\theta(x)$ 在 $x=0$ 處爲解析，　$\therefore x=0$ 爲一規則奇異點

(d) $p(x)=\dfrac{1}{x^2}$，　$Q(x)=\dfrac{1}{x^2}$　$\Rightarrow x=0$ 爲奇異點

$xp(x)=\dfrac{1}{x}$，　$x^2Q(x)=1$　在 $x=0$ 處不爲解析

$\therefore x=0$ 為不規則奇異點

(e) $p(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, $Q(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ $\Rightarrow x=\pm 1$ 爲奇異點

(1) $x=1$ 時

$(x-1)p(x)=-\dfrac{1}{x+1}$, $(x-1)^2Q(x)=\dfrac{-(x-1)}{x+1}$, 爲解析

(2) $x=-1$ 時

$(x+1)p(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $(x+1)^2Q(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, 爲

$\Rightarrow x=\pm 1$ 爲規則奇異點

(f) $p(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x=0$, $x=1$

$Q(x)=\dfrac{1}{x^2(1-x)}$ 爲奇異點

(1) $x=0$ 爲不規則奇異點

(2) $x=1$

$(x-1)p(x)=\dfrac{(x-1)}{x^2}$

$(x-1)^2Q(x)=\dfrac{-(x-1)}{x^2}$ 是解析

故 $x=1$ 爲規則奇異點

4. 略：指標方程式是對規則奇異點而言，$x=0$ 爲規則奇異點，故

$y(x)=x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$xp(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots+b_0=xp(x)\mid x=0$

$x^2Q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_0=x^2Q(x)\mid x=0$

由課本知指標方程式爲 $r^2+(b_0-1)r+c_0=0$

(c) $x=0$ 時 $xp(x)=0$, $b_0=0$

$x^2Q(x)=-\lambda^2$, $c_0=-\lambda^2$

5-10 題：找出兩個在原點附近的獨立解：

5. 略：因 $x=0$ 爲普通點，

故可假設 $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 代入微分方程

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}-3\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

化簡可得

$$\sum_{n=2}^{\infty}[a_n n(n-1)-3a_{n-1}(n-1)+2a_{n-2}]x^{n-2}=0\ , \quad n\geq 2$$

$$\therefore a_n=\frac{-2}{n(n-1)}\ a_{n-2}+\frac{3}{n}a_{n-1} \qquad a_0=a_0\ ,\ a_1=a_1$$

$$a_2=\frac{-2}{2\times1}a_0+\frac{3}{2}a_1=-a_0+\frac{3}{2}a_1$$

$$a_3=\frac{-2}{3\times2}a_1+\frac{3}{3}a_2=-a_0+\frac{7}{6}a_1$$

$$a_4=\frac{-2}{4\times3}a_2+\frac{3}{4}a_3=-\frac{7}{12}a_0+\frac{5}{8}a_1$$

$$\therefore y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=a_0+a_1x+\left(-a_0+\frac{3}{2}a_1\right)x^2+\left(-a_0+\frac{7}{6}a_1\right)x^3$$

$$+\left(-\frac{7}{12}a_0+\frac{5}{8}a_1\right)x^4$$

$$=a_0\left(1-x^2-x^3-\frac{7}{12}x^4+\cdots\cdots\right)+a_1x\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{7}{6}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{5}{8}x^3+\cdots\cdots\cdots\right)$$

設 $y_1(x)=1-x^2-x^3-\frac{7}{12}x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$y_2(x)=x+\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{6}x^3+\frac{5}{8}x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$

則 $y=a_0y_1+a_1y_2$ ，　　又因 y_1 與 y_2 爲二獨立解

故 $y=c_1(y_1+y_2)+c_2(y_1+2y_2)$

$$=c_1\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots\right)$$

$$+c_2\left(1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^3x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

6. 解：令 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

故 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n(n-1)nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}2a_nnx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

化簡得 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n(n-1)n+2a_{n-1}(n-1)+a_{n-2}\right]x^{n-2}=0$

故進推關係為：

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}\ a_{n-2}-\frac{2}{n}a_{n-1}\quad,\ n>2$$

$$a_0=a_0\ ,\ a_1=a_1$$

$$a_3=-\frac{1}{6}a_1-\frac{2}{3}a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_0$$

$$a_4=-\frac{1}{12}a_2-\frac{1}{2}a_3=-\frac{1}{6}a_1-\frac{1}{8}a_0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=a_0+a_1x\left(-\frac{1}{2}a_0-a_1\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_0\right)x^3$$

$$+\left(-\frac{1}{6}a_1-\frac{1}{8}a_0\right)x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{8}x^4+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$+a_1\left(x-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^4+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=a_0y_1+a_1y_2$$

因 y_1 與 y_2 為獨立解

故 $y=c_1(y_1-y_2)+c_2y_2=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

7. 解：$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 代入 $\Rightarrow$

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}+3x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+3}(n+3)(n+2)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n)x^{n+1}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$
$$=0$$

$$\therefore a_{n+3}=\frac{-(n+3)}{(n+2)(n+3)}\ a_n=\frac{-1}{n+2}a_n$$

$$a_3=-\frac{1}{2}a_0\ ,\qquad a_4=-\frac{1}{3}a_1\ ,\qquad a_5=-\frac{1}{4}a_2=0$$

$$a_6=-\frac{1}{5}a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}a_0\ ,\qquad a_7=-\frac{1}{6}a_4=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}a_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow a_{3n}=\frac{(-1)^n}{(3n-1)(3n-4)\cdots\cdots 2}\quad a_0$$

$$a_{3n+1}=\frac{(-1)^n}{3n\cdot(3n-3)\cdots\cdots 3}\quad a_1$$

$$a_{3n+1}=0$$

$$y_1=1-\frac{1}{2}x^3+\frac{x^6}{2\cdot 5}-\frac{x^9}{2\cdot 5\cdot 8}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_2=x-\frac{1}{3}x^4+\frac{x^7}{3\cdot 6}-\frac{x^{10}}{3\cdot 6\cdot 9}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

8. 解：令 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ ，則原式可寫成：

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}=0$$

$$2a_2+(6a_3+a_0)x+\sum_{n=2}^{\infty}[\,a_{n+2}\ (n+1)(n+2)+a_{n-1}n\,]x^n=0$$

故 $a_0=a_0$ ， $a_1=a_1$ ， $2a_2=0\Rightarrow a_2=0$

$$6a_3+a_0=0\Rightarrow a_3=-\frac{1}{6}a_0$$

$$a_{n+2}=-\frac{n}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}\ ,\quad n\geq 2$$

或 $a_n=-\dfrac{(n-2)}{(n-1)^n}a_{n-3}$ ， $n\geq 4$

故 $a_4=-\dfrac{1}{6}a_1$ ， $a_5=-\dfrac{3}{20}a_2=0$

$$a_6=-\frac{2}{15}a_3=\frac{1}{45}a_0\ ,\qquad a_7=-\frac{5}{42}a_4=\frac{5}{252}a_1$$

$$a_8=-\frac{3}{28}a_5=0$$

$$\begin{aligned}\therefore y&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\\&=a_0+a_1x-\frac{1}{6}a_0x^3-\frac{1}{6}a_1x^4+\frac{1}{45}a_0x^6+\frac{5}{252}a_1x^7+\cdots\cdots\\&=a_0\left(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{45}x^6+\cdots\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{6}x^4+\frac{5}{252}x^7+\cdots\right)\\&=a_0y_1+a_1y_2\end{aligned}$$

9. 解：設 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 代入

$$\Rightarrow (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)na_{n+1} + a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{-n}{n+2}a_{n+1} - \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

$$\therefore a_2 = -\frac{a_0}{2}\ , \quad a_3 = -\frac{1}{3}a_2 - \frac{a_1}{3\cdot 2} = \frac{a_0}{3!} - \frac{a_1}{3!}$$

$$a_4 = -\frac{2}{4}a_3 - \frac{a_2}{4\cdot 3}$$

$$= -\frac{2}{4}\left(\frac{a_0}{3!} - \frac{a_1}{3!}\right) - \frac{1}{4\cdot 3}\left(-\frac{1}{2}a_0\right)$$

$$= -\frac{1}{4!}a_0 + \frac{2}{4!}a_1$$

$$a_5 = -\frac{3}{5}a_4 - \frac{a_3}{5\cdot 4}$$

$$= -\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4!}a_0 + \frac{2}{4}a_1\right) - \frac{1}{5\cdot 4}\left(\frac{a_0}{3!} - \frac{a_1}{3!}\right)$$

$$= \frac{2}{5!}a_0 - \frac{5}{5!}a_1$$

$$\therefore y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots\cdots$$

$$= a_0 + a_1x + \left(\frac{-a_0}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a_0}{3!} - \frac{a_1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{-1}{4!}a_0 + \frac{2}{4!}a_1\right)x^4$$

$$+ \left(\frac{2}{5!}a_0 - \frac{5}{5!}a_1\right)x^5 + \cdots\cdots$$

$$= a_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{60} + \cdots\cdots\right)$$

$$+ a_1\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{24} + \cdots\cdots\right)$$

$$\therefore y_1 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{60} - \frac{7x^6}{720} + \cdots\cdots$$

$$y_2 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{24} + \frac{x^6}{40} - \cdots\cdots$$

***10*.** 解：設 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ 代入原式， $(1+x^2)y'' - 2y = 0$

$$\sum n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum n(n-1)a_nx^n-2\sum a_nx^n=0$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum n(n-1)a_nx^n-2\sum a_nx^n=0$$

$$\therefore a_{n+2}=\frac{2-n(n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$a_2=\frac{2-0}{(2)\times(1)}\times a_0=a_0\ ,\qquad a_4=\frac{2-2(1)}{(2+2)(2+1)}a_2=0$$

$$a_{2n+2}=0\ ,\ n\in N,\qquad a_3=\frac{2-1(0)}{3\times 2}a_1=\frac{2}{3!}a_1$$

$$a_5=\frac{2-3(3-1)}{5\times 4}a_3=\frac{(2-3\times 2)}{5!}(2a_1)$$

$$=-\frac{2}{5!}a_1(4)=-\frac{8a_1}{5!}$$

$$a_7=\frac{2-5(4)}{7\times 6}a_5=\frac{(2-5\times 4)}{7!}(-8a_1)=\frac{144}{7!}a_1$$

$$\therefore y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$$
$$+a_7x^7+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=a_0+a_1x+a_0x^2+\left(\frac{2}{3!}\right)a_1x^3+0\cdot x^4-\frac{8a_1}{5!}\cdot x^5+0$$
$$+\frac{144}{7!}a_1x^7+\cdots\cdots\cdots$$
$$=a_0(1+x^2)+a_1\left(x+\frac{2}{3!}x^3-\frac{8}{5!}x^5+\frac{144}{7!}x^7+\cdots\cdots\right)$$

$$\therefore y_1=1+x^2$$
$$y_2=x+\frac{2}{3!}x^3-\frac{8}{5!}x^5+\frac{144}{7!}x^7+\cdots\cdots\cdots$$

11. 解：$y''+y'+[1/(1-x)]y=0$

$x=0$ 爲一普通點

故令 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 代入上式得

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}+\frac{1}{1-x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

化簡 $(1-x)\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}+(1-x)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$