高等学校教材

数学方法论与解题研究

张　雄　李得虎　编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论与解题研究/ 北京：
高等教育出版社，2003 重印
ISBN 7-04-011919-6

Ⅰ.数… Ⅱ.①张…② -数
学方法②高等数学-解题

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037784 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京市南方印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2003 年 8 月第 1 版
印　　张	13.25	印　　次	2003 年 9 月第 2 次印刷
字　　数	330 000	定　　价	18.30 元

内容提要

本书从数学的创造性思维本质出发，论述了数学发现和数学解题的一般性规律、原理和方法.全书分为上、下篇，上篇阐述了观察、联想、尝试、实验、归纳猜测、类比推广、模拟、化归、几何变换等数学发现的基本方法，数学的论证方法，数学与物理方法，数学智力的开发与创新意识的培养等内容；下篇为数学解题方法论研究，着重阐述了数学解题观、数学解题的思维过程、解题策略、解题思想等，着力在“元方法”即追寻解题思路、解题方法上进行研究，在探求解题思路的微观研究和解题理论上有一定的创新.

全书既有理论原理，又有大量典型的例题、例证分析，内容丰富，文笔流畅，富有启发性，可读性较强.本书可作为高等师范院校数学系本、专科教材，高等师范数学与应用数学专业自学考试教材，以及中学数学教师继续教育和骨干教师培训的教材，也可供数学教研人员和数学教师参考.

郑重声明

策　　划　王　瑜
责任编辑　薛春玲
封面设计　于　涛
责任绘图　黄建英
版式设计　胡志萍
责任校对　刘　莉
责任印制　孔　源

目 录

上篇 数学方法论

下篇 数学解题研究

上　篇

数学方法论

第一章 数学方法的源头

任何一门科学都有其方法论基础,如同其他科学技术一样,在数学的产生与发展过程中,理论与方法始终是相生相伴.“工欲善其事,必先利其器”,数学方法论就是关于数学活动中的“工具”的创造、产生和发展研究的理论性学科,是研究和讨论数学的发展规律,数学思想方法以及数学发现的一般性原理和方法的学问.

§1 数的产生与数进制的创生及分类

人类社会有记载的历史大约有 5 000 年左右,数学的历史可能比 5 000 年更长.可以说数学是随着人类的产生而产生的,更确切地说数学产生于人类的生产实践,产生于劳动成果的剩余,与此同时,数学方法也就随之产生与发展.我们提一个既简单而又耐人寻味的问题,来探讨数学方法的产生和发展,那就是:为什么我们现在常用的记数和计数都采用十进制?

记数是一种最基本的数学方法,也是产生最早的数学方法之一,在日常生活、文化和科学技术活动中,还用到其他的进制,比如角进制是六十进制,这是因为$\frac{1}{60}$是$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{10}$,$\frac{1}{12}$,$\frac{1}{15}$,$\frac{1}{30}$等的最大公约分数.另外还有四进制、八进制、十二进制、十六进制等等,特别是计算机中要用到二进制.那么为什么大都采用十进制呢?

这还得从数的产生谈起,我们知道,“远古时期,饮血茹毛”,类人猿的生活环境和生存条件是非常残酷的,赤手空拳,或最多拿根树 枝跟野兽搏斗,但残酷的环境和条件,不但锻炼了人的肢体,更

10 进制记数法和其他进制记数法对照表

其他进制 / 十进制	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	11	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	100	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	101	12	11	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	110	20	12	11	10	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	111	21	13	12	11	10	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	1 000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8	8	8	8	8

9	1 001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9	9	9	9	9
10	1 010	101	22	20	14	13	12	11	x(代表 10)	x	x	x	x	x	x
11	1 011	102	23	21	15	14	13	12	10	y(代表 11)	y	y	y	y	y
12	1 100	110	30	22	20	15	14	13	11	10	z(代表 12)	z	z	z	z
13	1 101	111	31	23	21	16	15	14	12	11	10	e(代表 13)	e	e	e
14	1 110	112	32	24	22	20	16	15	13	12	11	10	f(代表 14)	f	f
15	1 111	120	33	30	23	21	17	16	14	13	12	11	10	g(代表 15)	g
16	10 000	121	100	31	24	22	20	17	15	14	13	12	11	10	h(代表 16)
17	10 001	122	101	32	25	23	21	18	16	15	14	13	12	11	10
18	10 010	200	102	33	30	24	22	20	17	16	15	14	13	12	11

重要的是锻炼了人的大脑,使人们逐渐地聪明起来,石刀、石斧、石箭等工具的产生,使人们的“生产力”大大提高,生存能力大大增强,有了剩余的劳动产品,需要记录下来,这就产生了数.

数的产生也是一种由实践到理论的“映射”或对应.哲学家罗素曾说过:“不知道经过了多少年,人类才发现一对锦鸡与两天同是数字二的例子.”

一个猎物与一个手指对应,两个猎物与两个手指对应,……,十个指头对应完了,就用一根大树枝或大石头“记录”下来,这样就产生了“十进制”.可见,十进制源于人的双手有 10 个手指头.

除了十进制之外的其他进制都有它的由来和发展历史.这里,我们把各种进制列一张表,并用一个统一的公式表示一下.

各种进制用一个简单的公式表示为

$$(x)_p = \sum_{i=n}^{m} a_i p^i,$$

其中$(x)_p$表示以 p 为基数(即几进位制中的“n”)的数;a_i 为 0,1,2,…,$p-1$ 中的一个,n、m 为正整数,p 为大于或等于 2 的正整数.

在自然数的十进制中,任意一个自然数可表示为

$$N = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + \cdots + 10a_{n-1} + a_o,$$

其中 n 为自然数,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$为 0,1,2,…,9 中的一个.

推而广之,在十进制中 1 347.076 可表示为(基数 $p=10$)

$$\begin{aligned}(1\ 347.076)_{10} = {} & 1\times10^3 + 3\times10^2 + 4\times10 + 7\times10^0 + 0\times10^{-1} + \\ & 7\times10^{-2} + 6\times10^{-3}.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}(1\ 712)_8 &= (1\times8^3 + 7\times8^2 + 1\times8 + 2\times8^0)_{10} \\ &= (1\times512 + 7\times64 + 8 + 2)_{10} = (970)_{10}.\end{aligned}$$

特别应提到的是小数——也叫十进分数，它的发明无疑是一项十分伟大的发明创造. 小数发明之后，数 1 174.07 应记为：

…0 0 0 1 1 7 4. 0 7 0 0 0…

百十万千百十个 十百

…万万　　　　　分分…

位位位位位位位 位位

§2　自然数的四则运算

自然数的加减乘除四则运算，是在十进制记数法和计数法的基础上发展起来的伟大创举，它使数真正应用于生产劳动和产品分配的社会实践中. 而运算法则的产生，无疑是由于人们发现了四则运算的规律，也就是说运算法则依赖于运算规律，而运算规律的产生又是在长期的劳动实践中发现的.

利用竖式进行加减乘除四则运算，是自然数四则运算的主要内容. 本节将用代数方法，来表述自然数的竖式运算的原理，从而使我们明白其中的道理，从中受到启迪.

自然数的四则运算，遵从如下规律：

(1) 加法交换律：

$$a+b=b+a.$$

(2) 加法结合律：

$$a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c.$$

(3) 乘法交换律：

$$ab=ba.$$

(4) 乘法结合律：

$$abc=(ab)c=a(bc).$$

(5) 乘法对于加法的分配律：

$$a(b+c)=ab+ac.$$

竖式加法原理：

$$
\begin{array}{r}
a_1 a_2 \cdots a_{n-m+1} a_{n-m+2} \cdots a_{n-1} a_n \\
+)\qquad\qquad b_1 \qquad b_2 \qquad \cdots b_{m-1} b_m \\
\hline
c_0 c_1 c_2 \cdots c_{n-m} c_{n-m+1} c_{n-m+2} \cdots c_{n-1} c_n
\end{array}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + \cdots + 10^{m-1}a_{n-m+1} + 10^{m-2}a_{n-m+2} + \cdots \\
&+ 10a_{n-1} + a_n + 10^{m-1}b_1 + 10^{m-2}b_2 + \cdots + 10b_{m-1} + b_m \ (n \geqslant m) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 10^{n-i}a_i + \sum_{j=1}^{m} 10^{m-j}b_j \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} 10^{n-i}a_i + \sum_{j=1}^{m-1} 10^{m-j}b_j + (a_n + b_m) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} 10^{n-i}a_i + \sum_{j=1}^{m-1} 10^{m-j}b_j + 10k_1 + c_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} 10^{n-i}a_i + \sum_{j=1}^{m-2} 10^{m-j}b_j + 10(a_{n-1} + b_{m-1} + k_1) + c_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} 10^{n-i}a_i + \sum_{j=1}^{m-2} 10^{m-j}b_j + 10(10k_2 + c_{n-1}) + c_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} 10^{n-i}a_i + \sum_{j=1}^{m-2} 10^{m-j} + 10^2k_2 + 10c_{n-1} + c_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-m} 10^{n-i}a_i + 10^{m-1}(a_{n-m+1} + b_1) + 10^{m-2}(a_{n-m+2} \\
&\quad + b_2 + k_{m-2}) + \sum_{j=n-m+3}^{n} 10^{n-j}c_j \\
&= \sum_{i=1}^{n-m} 10^{n-i}a_i + 10^{m-1}(a_{n-m+1} + b_1) + 10^{m-2}(10k_{m-1} + \\
&\quad c_{n-m+2}) + \sum_{j=n-m+3}^{n} 10^{n-j}c_j \\
&= \sum_{i=1}^{n-m} 10^{n-i}a_i + 10^{m-1}(a_{n-m+1} + b_1)
\end{aligned}
$$

$$+10^{m-1}k_{m-1}+\sum_{j=n-m+2}^{n}10^{n-j}c_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n-m}10^{n-i}a_i+10^{m-1}(a_{n-m+1}+b_1+k_{m-1})+\sum_{j=n-m+2}^{n}10^{n-j}c_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n-m}10^{n-i}a_i+10^{m-1}(10k_m+c_{n-m+1})+\sum_{j=n-m+2}^{n}10^{n-j}c_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n-m}10^{n-i}a_i+10^{m}k_m+\sum_{j=n-m+1}^{n}10^{n-j}c_j$$

$$=10^{n-1}a_1+10^{n-2}(a_2+k_{n-2})+\sum_{j=3}^{n}10^{n-j}c_j$$

$$=10^{n-1}a_1+10^{n-2}(10k_{n-1}+c_2)+\sum_{j=3}^{n}10^{n-j}c_j$$

$$=10^{n-1}a_1+10^{n-1}k_{n-1}+\sum_{j=2}^{n}10^{n-j}c_j$$

$$=10^{n-1}(a_1+k_{n-1})+\sum_{j=2}^{n}10^{n-j}c_j$$

$$=10^{n-1}(10k_n+c_1)+\sum_{j=2}^{n}10^{n-j}c_j$$

$$=10^{n}k_n+\sum_{j=1}^{n}10^{n-j}c_j=\sum_{j=0}^{n}10^{n-j}c_j$$

$(k_i=0,1;i=1,2,3,\cdots,n;c_j=0,1,2,\cdots,9;j=0,1,2,\cdots,n)$

显然 $k_i=0$ 时为不进位加法，$k_i=1$ 时为进位加法.

竖式减法原理：

$$\begin{array}{r}
a_1a_2\cdots a_{n-m+1}a_{n-m+2}\cdots a_{n-1}a_n \\
-)\qquad b_1\qquad b_2\qquad \cdots b_{m-1}b_m \\
\hline
d_1d_2\cdots d_{n-m+1}d_{n-m+2}\cdots d_{n-1}d_n
\end{array}$$

即

设

$$\sum_{i=1}^{n}10^{n-i}a_i\geqslant\sum_{j=1}^{m}10^{m-j}b_j(n\geqslant m),$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} 10^{n-i}a_i - \sum_{j=1}^{m} 10^{n-j}b_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} 10^{n-i}a_i - \sum_{j=1}^{m-1} 10^{m-j}b_j + (a_n - b_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2} 10^{n-i}a_i - \sum_{j=1}^{m-2} 10^{m-j}b_j$$

$$+ 10(a_{n-1} - k_1 - b_{m-1}) + (10k_1 + a_n - b_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-3} 10^{n-i}a_i - \sum_{j=1}^{m-3} 10^{m-j}b_j + 10^2(a_{n-2} - k_2 - b_{m-2})$$

$$+ 10(10k_2 + a_{n-1} - k_1 - b_{m-1}) + d_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m} 10^{n-i}a_i + 10^{m-1}(a_{n-m+1} - k_{m-1} - b_1)$$

$$+ 10^{m-2}(10k_{m-1} + a_{n-m+2} - b_2 - k_{m-2}) + \sum_{j=n-m+3}^{n} 10^{n-j}d_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m+1} 10^{n-i}a_i + 10^{m}(a_{n-m} - k_m)$$

$$+ 10^{m-1}(10k_m + a_{n-m+1} - k_{m-1} - b_1) + \sum_{j=n-m+2}^{n} 10^{n-j}d_j$$

$$= 10^{n-1}(a_1 - k_{n-1}) + 10^{n-2}(10k_{n-1} + a_2 - k_{n-2}) + \sum_{j=3}^{n} 10^{n-j}d_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j}d_j$$

$(k_i = 0,1; i = 1,2,\cdots,n-1; d_j = 0,1,2,\cdots,9; j = 1,2,\cdots,n)$

显然 $k_i = 0$ 时为不退位减法，$k_i = 1$ 时为退位减法.

多位数乘一位数竖式原理：

$$\begin{array}{cccccc}
 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
\times) & & & & & b \\
\hline
e_0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} & e_n
\end{array}$$