成人高校学习参考书

高等数学学习指导

张令松　吴兰芳　林上珍　编

上海科学技术出版社

成人高校学习参考书

高等数学学习指导

张令松　吴兰芳　林上珍　编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书内容包括 元微积分，常微分方程，矢量代数与空间解析几何，多元微积分和无穷级数等十章。每章按内容提要与基本要求，学习指导，例题选解与复习检查题的顺序编写。说理清楚，例题丰富，并有方法归纳。可供大专程度的各类成人高校以及函授、自学的读者使用，也可供其他读者学习高等数学时参考。

成人高校学习参考书

高等数学学习指导

张令松 吴兰芳 林上珍 编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 17.5 字数 388,000

1989年1月第1版 1989年1月第1次印刷

印数 1—4,700

ISBN 7-5323-0586-4/O·55

定价：7.10元

前　言

本书主要是配合大专程度的各类成人高校以及函授、自学的读者学习高等数学而编写的。内容包括：一元微积分，常微分方程，矢量代数与空间解析几何，多元微积分和无穷级数等共十章。每章均按如下安排编写：

内容提要与基本要求　参照原教育部1983年11月审订的职工高等工业专科学校高等数学教学大纲(草案)，说明每章的内容提要，基本教学要求和重点、难点，使读者在一开始就了解每章的全貌和要求。

学习指导　选择需进一步弄清的内容和学生容易混淆的概念，或作补充阐释，或辅以典型例题，帮助读者加深理解，达到正确掌握的目的。并通过适当例题，介绍解题步骤，归纳解题方法，帮助读者掌握解题思路，提高解题能力。

例题选解与复习检查题　供读者参考，使用。

上海市职工大学统一命题试卷选　作为读者衡量自己已有水平的一个尺度。

编者希望本书能对读者加深理解教材内容，正确掌握基本概念，使用合适的解题方法等方面起到一定的辅导作用。

本书由张令松、吴兰芳、林上珍编写。朱学炎教授审阅了书稿，谨致谢意。限于编者水平，书中错误及不当之处在所难免，恳请读者指正。

编者　1987年8月

目　录

第一章 函数与极限

内容提要与基本要求

本章内容大体可分为三部分：函数、极限与函数的连续性。

函数是高等数学的主要研究对象，函数概念的基本要点有两个：定义域与对应法则。研究函数主要是讨论函数的性质，对于函数的性质，除了借助几何直观来掌握以外，要会用数学语言(即定义)来表达。弄清函数的性质，可以使函数作图过程简化。

我们遇到的大都是初等函数，是由五种基本初等函数构成的，故应当十分熟悉基本初等函数的性质和图形，要善于将一个较复杂的函数分解成几个简单的函数。

极限方法是高等数学中的基本方法。极限的定义是用两个不等式来描述的，只要把定义中的 ε、N 或 ε、δ 这两个数的含意及其作用弄清楚，就能体会到两个不等式的作用，在这个基础上就易于理解极限的定义。

建立在极限的运算法则上的极限运算是本章的重要计算。在两个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 的基础上，使极限的计算范围扩大了。

连续性是函数的一种重要性态，连续函数是高等数学的主要研究对象。要掌握用极限运算表示的函数在一点处连续

的两个定义，根据定义得到函数在一点处连续需满足的三个条件，并由此了解间断的各种情况，把函数的间断与连续联系起来看，会使连续的概念更清楚。

函数在一点处连续，必有极限；但函数在一点处有极限却不一定连续。

闭区间上连续函数的性质可结合几何直观地理解。

重点 函数的概念 极限的概念 连续函数的概念 基本初等函数的定义与性质 初等函数的连续区间 极限的运算 两个重要极限

难点 建立函数关系式 极限的概念

学 习 指 导

§1. 函数的定义与记号

一个函数的确定主要有两个因素，即对应法则与定义域。如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那末它们是同一函数；如果对应法则不同，或定义域不同，或两者都不同，则不是同一函数。

例1 判断下列各对函数是否是同一函数：

(1) $\dfrac{x}{x(x+1)}$ 与 $\dfrac{1}{x+1}$； (2) $\sqrt{x^2}$ 与 x；(3) $\operatorname{arc\,tg} x$ 与 $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$； (4) $\arccos x$ 与 $\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$。

解 (1) $\dfrac{x}{x(x+1)}$ 与 $\dfrac{1}{x+1}$ 不是同一函数。因为前者的定义域是 $(-\infty, -1)$、$(-1, 0)$ 与 $(0, +\infty)$；后者的定义域是 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$。由于当 $x\neq 0$ 时两个函数的对

应法则相同，如果把两者的定义域限制在$(-\infty, -1)$、$(-1, 0)$与$(0, +\infty)$，那末两者表示同一函数。

(2) $\sqrt{x^2}$与x虽有相同的定义域$(-\infty, +\infty)$，但当$x<0$时，两者对应法则不同，前者取$-x$，后者取x. 故在$(-\infty, +\infty)$内$\sqrt{x^2}$与x不是同一函数。在区间$(0, +\infty)$内，它们是同一函数。

(3) $\operatorname{arc\,tg} x$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$的定义域是$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$，除了$x=\pm 1$外，两者的对应法则也不同，故$\operatorname{arc\,tg} x$与$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$不是同一函数

(3) $\arccos x$与$\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$的定义域都是$[-1, 1]$，且由恒等式$\arccos x+\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}$知：两者具有相同的对应法则，故它们是同一函数。

函数的记号$y=f(x)$应理解为变量y通过对应法则f与变量x对应。

例 2 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$，求$f(-x)$和$f(x+\Delta x)-f(x)$。

解 这里f表示这样的对应法则：将x平方的倒数减去x的倒数，就得到对应的y值。

$f(-x)$就是在$f(x)$的解析式中用$-x$代x，即

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}-\frac{1}{-x}=\frac{1+x}{x^2}.$$

同理，$f(x+\Delta x)=\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}-\dfrac{1}{x+\Delta x}=\dfrac{1-x-\Delta x}{(x+\Delta x)^2}$；

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1-x-\Delta x}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1-x}{x^2}$$

$$=\frac{(x^2-2x)\Delta x+(x-1)\Delta x^2}{x^2(x+\Delta x)^2}.$$

例 3 若 $F(z)=a^z$，验证：

(1) $F(z)\cdot F(-z)=1$； (2) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$ $(a>0)$。

解 根据指数函数的性质 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$，即得：

(1) $F(z)\cdot F(-z)=a^z\cdot a^{-z}=1$；

(2) $F(x)\cdot F(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=F(x+y)$。

例 4 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x(\sqrt{x^2+1}+1)$，$x>0$，求 $f(x)$。

解 令 $\frac{1}{x}=z$，则由 $x>0$ 得 $z>0$，且

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}+1\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{|z|}+1\right)$$

$$=\frac{\sqrt{1+z^2}+z}{z^2}\quad(z>0).$$

函数的对应法则与自变量采用的字母无关，故

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{x^2}\quad(x>0).$$

§2. 函数的性质

函数的主要性质有周期性，奇、偶性，单调性与有界性。

1. 周期性 如果存在常数 $T\neq 0$，使 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 f 的一个周期。通常指的是最小正周期。

例 5 在下列函数中，哪些是周期函数？对于周期函数，指出其最小正周期：

(1) $y=\sin 2x$;　　(2) $y=\sin\frac{x}{2}$;　　(3) $y=\sin 2x+\sin\frac{x}{2}$.

解　(1) 熟知 $y=\sin z$ 是以 2π 为周期的周期函数，故对 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意 z，有 $\sin(z+2\pi)=\sin z$. 令 $2x=z$，则 x 的变域仍为 $(-\infty, +\infty)$，且上式可写为

$$\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi)=\sin 2x.$$

最后一个等式表明 $\sin 2x$ 是以 π 为周期的周期函数。

(2) 由 $\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\sin\frac{x+4\pi}{2}$ 知，$\sin\frac{x}{2}$ 是以 4π 为周期的周期函数。

注　$\sin nx$ 是以 $\frac{2\pi}{n}$ 为周期的周期函数。

(3) 显然 $\sin 2x+\sin\frac{x}{2}$ 是以 4π 为周期的周期函数，因为对任何 $x\in(-\infty, +\infty)$，有

$$\sin 2(x+4\pi)+\sin\frac{x+4\pi}{2}=\sin 2x+\sin\frac{x}{2}.$$

且易知不能有更小的正周期。

周期 T 的求法　若 T 是 $f(x)$ 的周期，则对定义域内的任何 x，都有 $f(x)=f(x+T)$，即

$$f(x)-f(x+T)=0 \text{ 或 } f(x+T)-f(x)=0. \qquad (1\text{-}1)$$

把 T 视作未知量，对(1-1)式作恒等变换，若能由此求得非零常数 T，其中最小的正数即为所求周期。

例 6　问 $f(x)=\sin^2 x$ 是否是周期函数？

解　$f(x+T)-f(x)=\sin^2(x+T)-\sin^2 x$

$$=[\sin(x+T)+\sin x][\sin(x+T)-\sin x].$$

若 $f(x)$ 为周期函数，则应有

$$\sin(x+T)+\sin x=0,\ \text{即}\ \sin(x+T)=-\sin x \tag{1-2}$$

或

$$\sin(x+T)-\sin x=0,\ \text{即}\ \sin(x+T)=\sin x. \tag{1-3}$$

若取 $T=\pi$ (不依赖于 x)，则(1-2)式成立，并且不能有更小的正数 T 使(1-1)或(1-2)成立(取 $T=2\pi$ 时(1-3) 成立)，故 $f(x)=\sin^2 x$ 是以 π 为周期的周期函数。

对于非周期函数，还可根据 (1-1) 式运用反证法加以验证。

例 7 验证 $f(x)=\cos x^2$ 不是周期函数。

证 用反证法：假设存在与 x 无关的正常数 T，使$\cos x^2=\cos(x+T)^2$，则当 $x=0$ 时有 $\cos T^2=1$，即 $T^2=2n\pi$ 或 $T=\sqrt{2n\pi}$ (n 为正整数)，从而

$$\cos x^2=\cos(x+\sqrt{2n\pi})^2=\cos(x^2+2x\sqrt{2n\pi}+2n\pi);$$

当 $2x\sqrt{2n\pi}+2n\pi\neq 2k\pi$，即 $x\neq\dfrac{(k-n)\pi}{\sqrt{2n\pi}}$ (k 为不等于 n 的正整数或零)时，

$$\cos x^2\neq\cos(x^2+2x\sqrt{2n\pi}+2n\pi),$$

与假设矛盾，故知 $f(x)=\cos x^2$ 不是周期函数。

2. 奇、偶性 设函数 $y=f(x)$ 的定义区间X关于原点对称，如果对于X的任何值，恒有 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$为偶函数或奇函数。

例 8 讨论下列函数的奇、偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$, $(a>0)$;

(2) $g(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$; (3) $f(x)=\sin x+\cos x$.

解 (1) 因 $f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{a^{-x}(1+a^{x})}{a^{-x}(1-a^{x})}=-\frac{1+a^{x}}{a^{x}-1}$ $=-f(x)$，故 $f(x)$是奇函数。

(2) 因 $g(-x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ 0, & x=0\\ x, & x>0\end{cases}=g(x)$，故 $g(x)$是偶函数。

(3) 因 $f(-x)=\cos x-\sin x$ 既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，故 $f(x)$是非奇非偶函数。

例 9 证明 (1)两个偶函数之和是偶函数，两个奇函数之和是奇函数；(2) 两个偶函数之积是偶函数，两个奇函数之积是偶函数，偶函数与奇函数之积是奇函数；(3) 对于任何定义在 $(-l, l)$ 内的函数 $f(x)$，$f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$是奇函数。

证 证明 (2)：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是偶函数，现证 $f(x)\cdot g(x)$是偶函数。由题设，$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$，从而 $f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)$。如果记 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$，则有 $h(-x)=h(x)$。按定义，$h(x)$ 是偶函数，故 $f(x)\cdot g(x)$ 是偶函数。

同理，若 $f(x)$与 $g(x)$都是奇函数，显然 $f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)$，即 $f(x)\cdot g(x)$是偶函数。

又设 $f(x)$是奇函数，则$f(-x)=-f(x)$；$g(x)$是偶函数，即 $g(-x)=g(x)$，则 $f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot g(x)$。故 $f(x)\cdot g(x)$是奇函数。

3．单调性 若对于定义域内的任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$时，有

$$f(x_1)<f(x_2) \text{ 或 } f(x_1)>f(x_2)。\tag{1-4}$$

则称函数 $f(x)$ 为单调增加函数或单调减少函数。

例 10 验证 $f(x)=x^3+x(-\infty<x<+\infty)$ 是单调增加函数。

证 在$(-\infty, +\infty)$内任取两点 x_1 与 x_2，设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$，则

$$
\begin{aligned}
&f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3+(x_2-x_1)\\
&=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2+1)\\
&=(x_2-x_1)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+1\right]>0,
\end{aligned}
$$

即 $f(x_2)-f(x_1)>0$，故 $f(x)$ 是区间$(-\infty, +\infty)$内的单调增加函数。

4. 有界性 若存在正数 M，对于某区间 X 内的所有 x 值，都有

$$|f(x)|\leqslant M. \tag{1-5}$$

则称 $f(x)$ 在 X 内有界。

例 11 验证 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在$(-\infty, +\infty)$内有界。

证 因 $x^2\pm 2x+1=(x\pm 1)^2\geqslant 0$，故 $x^2+1\geqslant\mp 2x$。从而当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{x^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$；当 $x<0$ 时，$\dfrac{x}{x^2+1}\geqslant-\dfrac{1}{2}$。这就是

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

所以函数在$(-\infty, +\infty)$内是有界的。

§3. 初等函数

1. 复合函数

在复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义中，只有当 $u=\varphi(x)$ 的值