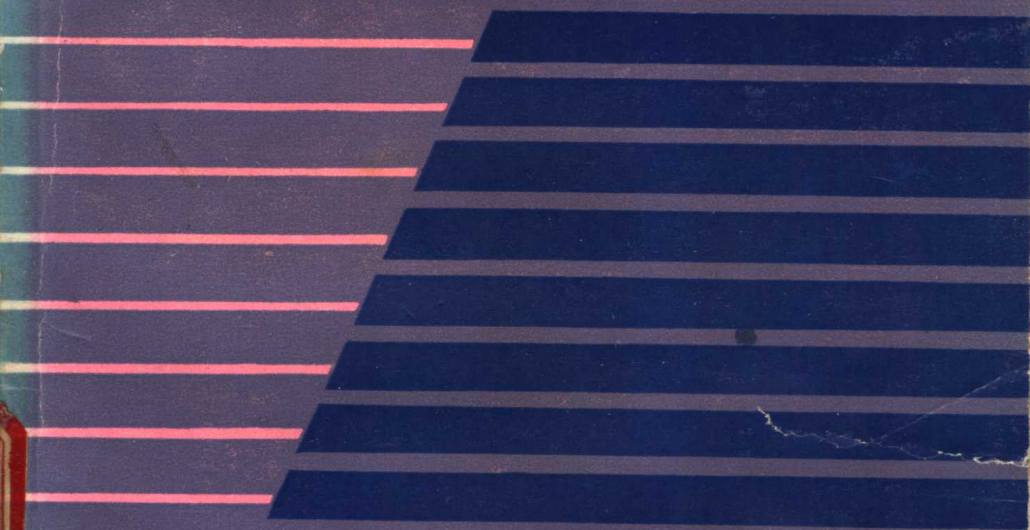


成人高校学习参考书

高等数学学习指导

张令松 吴兰芳 林上珍 编

上海科学技术出版社



成人高校学习参考书

高等数学学习指导

张令松 吴兰芳 林上珍 编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书内容包括 元微积分,常微分方程,矢量代数与空间解析几何,多元微积分和无穷级数等十章。每章按内容提要与基本要求,学习指导,例题选解与复习检查题的顺序编写。说理清楚,例题丰富,并有方法归纳。可供大专程度的各类成人高校以及函授、自学的读者使用,也可供其他读者学习高等数学时参考。

成人高校学习参考书

高等数学学习指导

张令松 吴兰芳 林上珍 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 17.5 字数 338,000

1989年1月第1版 1989年1月第1次印刷

印数 1—4,100

ISBN 7-5323-0586-4/O·55

定价: 7.10 元

前 言

本书主要是配合大专程度的各类成人高校以及函授、自学的读者学习高等数学而编写的。内容包括：一元微积分，常微分方程，矢量代数与空间解析几何，多元微积分和无穷级数等共十章。每章均按如下安排编写：

内容提要与基本要求 参照原教育部 1983 年 11 月审订的职工高等工业专科学校高等数学教学大纲(草案)，说明每章的内容提要，基本教学要求和重点、难点，使读者在一开始就了解每章的全貌和要求。

学习指导 选择需进一步弄清的内容和学生容易混淆的概念，或作补充阐释，或辅以典型例题，帮助读者加深理解，达到正确掌握的目的。并通过适当例题，介绍解题步骤，归纳解题方法，帮助读者掌握解题思路，提高解题能力。

例题选解与复习检查题 供读者参考，使用。

上海市职工大学统一命题试卷选 作为读者衡量自己已有水平的一个尺度。

编者希望本书能对读者加深理解教材内容，正确掌握基本概念，使用合适的解题方法等方面起到一定的辅导作用。

本书由张令松、吴兰芳、林上珍编写。朱学炎教授审阅了书稿，谨致谢意。限于编者水平，书中错误及不当之处在所难免，恳请读者指正。

编者 1987 年 8 月

目 录

第一章 函数与极限..... 1

内容提要与基本要求 1

学习指导 2

§ 1. 函数的定义与记号..... 2

§ 2. 函数的性质..... 4

§ 3. 初等函数..... 8

§ 4. 定义域的求法.....13

§ 5. 函数作图法.....16

§ 6. 极限的概念.....19

§ 7. 极限的求法.....24

§ 8. 函数的连续性.....30

例题选解35

复习检查题50

第二章 导数与微分.....53

内容提要与基本要求53

学习指导53

§ 1. 导数的概念.....53

§ 2. 导数的几何意义.....55

§ 3. 微分的概念.....58

§ 4. 微分法.....60

§ 5. 导数与微分的初步应用.....75

例题选解82

复习检查题	106
第三章 微分中值定理与导数的应用	109
内容提要与基本要求	109
学习指导	109
§ 1. 微分中值定理	109
§ 2. 罗必塔法则	114
§ 3. 用导数研究函数	120
§ 4. 最大值及最小值问题	127
例题选解	131
复习检查题	154
第四章 不定积分	157
内容提要与基本要求	157
学习指导	157
§ 1. 不定积分的概念	157
§ 2. 直接积分法	160
§ 3. 第一种换元积分法	163
§ 4. 第二种换元积分法	168
§ 5. 分部积分法	172
§ 6. 有理函数的积分	181
§ 7. 三角函数有理式的积分	190
§ 8. 简单无理函数的积分	192
例题选解	198
复习检查题	208
第五章 定积分及其应用	212
内容提要与基本要求	212
学习指导	213

§ 1. 定积分的概念	213
§ 2. 定积分的性质	215
§ 3. 积分学基本定理	218
§ 4. 定积分的计算	221
§ 5. 广义积分的求法	235
§ 6. 定积分的几何应用	240
§ 7. 定积分的物理应用	248
例题选解	254
复习检查题	267

第六章 常微分方程271

内容提要与基本要求	271
学习指导	271
§ 1. 微分方程的一般概念	271
§ 2. 一阶微分方程	272
§ 3. 可降阶的高阶微分方程	275
§ 4. 线性微分方程的解的结构	279
§ 5. 二阶常系数线性微分方程	280
§ 6. 微分方程的应用	283
例题选解	286
复习检查题	303

第七章 向量代数与空间解析几何306

内容提要与基本要求	306
学习指导	307
§ 1. 向量	307
§ 2. 平面及其方程	315
§ 3. 空间直线及其方程	321
§ 4. 平面间、直线间、平面与直线间的相对位置	323

§ 5. 空间曲线与二次曲面	330
§ 6. 空间区域简图	336
例题选解	342
复习检查题	351
第八章 多元函数的微分学	355
内容提要与基本要求	355
学习指导	355
§ 1. 二元函数的概念	355
§ 2. 二元函数的极限、连续、可导及其相互间的关系	358
§ 3. 全微分概念	361
§ 4. 多元复合函数求导步骤的分析	367
§ 5. 偏导数的应用	377
例题选解	392
复习检查题	414
第九章 多元函数的积分学	417
内容提要与基本要求	417
学习指导	417
§ 1. 二重积分的概念	417
§ 2. 确定二重积分的积分限的方法	421
§ 3. 三重积分的计算公式	427
§ 4. 曲线积分的计算方法	431
§ 5. 曲面积分的计算方法	442
§ 6. 多元函数积分的应用	447
例题选解	450
复习检查题	479
第十章 无穷级数	483
内容提要与基本要求	483

学习指导	484
§ 1. 常数项级数	484
§ 2. 幂级数	492
§ 3. 函数的幂级数展开式	498
§ 4. 傅立叶级数	500
例题选解	505
复习检查题	519
复习检查题答案或提示	523
附录 上海市职工大学统一命题试卷选	535
上海市职工大学统一命题试卷选的参考答案或 提示	543

第一章 函数与极限

内容提要与基本要求

本章内容大体可分为三部分：函数、极限与函数的连续性。

函数是高等数学的主要研究对象，函数概念的基本要点有两个：定义域与对应法则。研究函数主要是讨论函数的性质，对于函数的性质，除了借助几何直观来掌握以外，要会用数学语言（即定义）来表达。弄清函数的性质，可以使函数作图过程简化。

我们遇到的大都是初等函数，是由五种基本初等函数构成的，故应当十分熟悉基本初等函数的性质和图形，要善于将一个较复杂的函数分解成几个简单的函数。

极限方法是高等数学中的基本方法。极限的定义是用两个不等式来描述的，只要把定义中的 ε 、 N 或 ε 、 δ 这两个数的含意及其作用弄清楚，就能体会到两个不等式的作用，在这个基础上就易于理解极限的定义。

建立在极限的运算法则上的极限运算是本章的重要计算。在两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的基础上，使极限的计算范围扩大了。

连续性是函数的一种重要性态，连续函数是高等数学的主要研究对象。要掌握用极限运算表示的函数在一点处连续

的两个定义, 根据定义得到函数在一点处连续需满足的三个条件, 并由此了解间断的各种情况, 把函数的间断与连续联系起来看, 会使连续的概念更清楚。

函数在一点处连续, 必有极限; 但函数在一点处有极限却不一定连续。

闭区间上连续函数的性质可结合几何直观地理解。

重点 函数的概念 极限的概念 连续函数的概念 基本初等函数的定义与性质 初等函数的连续区间 极限的运算 两个重要极限

难点 建立函数关系式 极限的概念

学 习 指 导

§ 1. 函数的定义与记号

一个函数的确定主要有两个因素, 即对应法则与定义域。如果两个函数的对应法则和定义域都相同, 那末它们是同一函数; 如果对应法则不同, 或定义域不同, 或两者都不同, 则不是同一函数。

例 1 判断下列各对函数是否是同一函数:

(1) $\frac{x}{x(x+1)}$ 与 $\frac{1}{x+1}$; (2) $\sqrt{x^2}$ 与 x ; (3) $\arctg x$ 与 $\arctg \frac{1}{x}$; (4) $\arccos x$ 与 $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ 。

解 (1) $\frac{x}{x(x+1)}$ 与 $\frac{1}{x+1}$ 不是同一函数。因为前者的定义域是 $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$; 后者的定义域是 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 。由于当 $x \neq 0$ 时两个函数的对

应法则相同,如果把两者的定义域限制在 $(-\infty, -1)$ 、 $(-1, 0)$ 与 $(0, +\infty)$,那末两者表示同一函数。

(2) $\sqrt{x^2}$ 与 x 虽有相同的定义域 $(-\infty, +\infty)$,但当 $x < 0$ 时,两者对应法则不同,前者取 $-x$,后者取 x 。故在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $\sqrt{x^2}$ 与 x 不是同一函数。在区间 $(0, +\infty)$ 内,它们是同一函数。

(3) $\arctg x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, $\arctg \frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$,除了 $x = \pm 1$ 外,两者的对应法则也不同,故 $\arctg x$ 与 $\arctg \frac{1}{x}$ 不是同一函数

(3) $\arccos x$ 与 $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ 的定义域都是 $[-1, 1]$,且由恒等式 $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ 知,两者具有相同的对应法则,故它们是同一函数。

函数的记号 $y = f(x)$ 应理解为变量 y 通过对应法则 f 与变量 x 对应。

例2 设 $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, 求 $f(-x)$ 和 $f(x+\Delta x) - f(x)$ 。

解 这里 f 表示这样的对应法则:将 x 平方的倒数减去 x 的倒数,就得到对应的 y 值。

$f(-x)$ 就是在 $f(x)$ 的解析式中用 $-x$ 代 x ,即

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} - \frac{1}{-x} = \frac{1+x}{x^2}.$$

$$\text{同理, } f(x+\Delta x) = \frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x+\Delta x} = \frac{1-x-\Delta x}{(x+\Delta x)^2},$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1-x-\Delta x}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1-x}{x^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 2x) \Delta x + (x-1) \Delta x^2}{x^2(x + \Delta x)^2}.$$

例 3 若 $F(z) = a^z$, 验证:

(1) $F(z) \cdot F(-z) = 1$; (2) $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$ ($x > 0$).

解 根据指数函数的性质 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, 即得:

$$(1) F(z) \cdot F(-z) = a^z \cdot a^{-z} = 1,$$

$$(2) F(x) \cdot F(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = F(x+y).$$

例 4 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x(\sqrt{x^2+1}+1)$, $x > 0$, 求 $f(x)$.

解 令 $\frac{1}{x} = z$, 则由 $x > 0$ 得 $z > 0$, 且

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left(\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} + 1 \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{|z|} + 1 \right) \\ &= \frac{\sqrt{1+z^2} + z}{z^2} \quad (z > 0). \end{aligned}$$

函数的对应法则与自变量采用的字母无关, 故

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{x^2} \quad (x > 0).$$

§ 2. 函数的性质

函数的主要性质有周期性, 奇、偶性, 单调性与有界性.

1. 周期性 如果存在常数 $T \neq 0$, 使 $f(x+T) = f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, T 称为函数 f 的一个周期. 通常指的是最小正周期.

例 5 在下列函数中, 哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其最小正周期.

$$(1) y = \sin 2x; \quad (2) y = \sin \frac{x}{2}; \quad (3) y = \sin 2x + \sin \frac{x}{2}.$$

解 (1) 熟知 $y = \sin z$ 是以 2π 为周期的周期函数, 故对 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意 z , 有 $\sin(z + 2\pi) = \sin z$. 令 $2x = z$, 则 x 的变域仍为 $(-\infty, +\infty)$, 且上式可写为

$$\sin(2x + 2\pi) = \sin 2(x + \pi) = \sin 2x.$$

最后一个等式表明 $\sin 2x$ 是以 π 为周期的周期函数.

$$(2) \text{ 由 } \sin \frac{x}{2} = \sin \left(\frac{x}{2} + 2\pi \right) = \sin \frac{x + 4\pi}{2} \text{ 知, } \sin \frac{x}{2}$$

是以 4π 为周期的周期函数.

注 $\sin nx$ 是以 $\frac{2\pi}{n}$ 为周期的周期函数.

(3) 显然 $\sin 2x + \sin \frac{x}{2}$ 是以 4π 为周期的周期函数, 因为对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\sin 2(x + 4\pi) + \sin \frac{x + 4\pi}{2} = \sin 2x + \sin \frac{x}{2}.$$

且易知不能有更小的正周期.

周期 T 的求法 若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则对定义域内的任何 x , 都有 $f(x) = f(x + T)$, 即

$$f(x) - f(x + T) = 0 \text{ 或 } f(x + T) - f(x) = 0. \quad (1-1)$$

把 T 视作未知量, 对 (1-1) 式作恒等变换, 若能由此求得非零常数 T , 其中最小的正数即为所求周期.

例 6 问 $f(x) = \sin^2 x$ 是否是周期函数?

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x + T) - f(x) &= \sin^2(x + T) - \sin^2 x \\ &= [\sin(x + T) + \sin x][\sin(x + T) - \sin x]. \end{aligned}$$

若 $f(x)$ 为周期函数, 则应有

$$\sin(x+T) + \sin x = 0, \text{ 即 } \sin(x+T) = -\sin x \quad (1-2)$$

或

$$\sin(x+T) - \sin x = 0, \text{ 即 } \sin(x+T) = \sin x. \quad (1-3)$$

若取 $T = \pi$ (不依赖于 x)，则 (1-2) 式成立，并且不能有更小的正数 T 使 (1-1) 或 (1-2) 成立 (取 $T = 2\pi$ 时 (1-3) 成立)，故 $f(x) = \sin^2 x$ 是以 π 为周期的周期函数。

对于非周期函数，还可根据 (1-1) 式运用反证法加以验证。

例 7 验证 $f(x) = \cos x^2$ 不是周期函数。

证 用反证法：假设存在与 x 无关的正常数 T ，使 $\cos x^2 = \cos(x+T)^2$ ，则当 $x=0$ 时有 $\cos T^2 = 1$ ，即 $T^2 = 2n\pi$ 或 $T = \sqrt{2n\pi}$ (n 为正整数)，从而

$$\cos x^2 = \cos(x + \sqrt{2n\pi})^2 = \cos(x^2 + 2x\sqrt{2n\pi} + 2n\pi);$$

当 $2x\sqrt{2n\pi} + 2n\pi \neq 2k\pi$ ，即 $x \neq \frac{(k-n)\pi}{\sqrt{2n\pi}}$ (k 为不等于 n 的正整数或零) 时，

$$\cos x^2 \neq \cos(x^2 + 2x\sqrt{2n\pi} + 2n\pi),$$

与假设矛盾，故知 $f(x) = \cos x^2$ 不是周期函数。

2. 奇、偶性 设函数 $y = f(x)$ 的定义区间 X 关于原点对称，如果对于 X 的任何值，恒有 $f(-x) = f(x)$ 或 $f(-x) = -f(x)$ ，则称函数 $y = f(x)$ 为偶函数或奇函数。

例 8 讨论下列函数的奇、偶性：

$$(1) f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}, \quad (a > 0);$$

$$(2) g(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}; \quad (3) f(x) = \sin x + \cos x,$$

$$\text{解 (1) 因 } f(-x) = \frac{a^{-x} + 1}{a^{-x} - 1} = \frac{a^{-x}(1 + a^x)}{a^{-x}(1 - a^x)} = -\frac{1 + a^x}{a^x - 1}$$

$= -f(x)$, 故 $f(x)$ 是奇函数.

$$(2) \text{ 因 } g(-x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} = g(x), \text{ 故 } g(x) \text{ 是偶函数.}$$

数.

(3) 因 $f(-x) = \cos x - \sin x$ 既不等于 $f(x)$, 也不等于 $-f(x)$, 故 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

例 9 证明 (1) 两个偶函数之和是偶函数, 两个奇函数之和是奇函数; (2) 两个偶函数之积是偶函数, 两个奇函数之积是偶函数, 偶函数与奇函数之积是奇函数; (3) 对于任何定义在 $(-l, l)$ 内的函数 $f(x)$, $f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

证 证明 (2): 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是偶函数, 现证 $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数. 由题设, $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = g(x)$, 从而 $f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x)$. 如果记 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, 则有 $h(-x) = h(x)$. 按定义, $h(x)$ 是偶函数, 故 $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数.

同理, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是奇函数, 显然 $f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x)$, 即 $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数.

又设 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$; $g(x)$ 是偶函数, 即 $g(-x) = g(x)$, 则 $f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$. 故 $f(x) \cdot g(x)$ 是奇函数.

3. 单调性 若对于定义域内的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ 或 } f(x_1) > f(x_2). \quad (1-4)$$

则称函数 $f(x)$ 为单调增加函数或单调减少函数。

例 10 验证 $f(x) = x^3 + x$ ($-\infty < x < +\infty$) 是单调增加函数。

证 在 $(-\infty, +\infty)$ 内任取两点 x_1 与 x_2 , 设 $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$, 则

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 + (x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + 1) \\ &= (x_2 - x_1) \left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 1 \right] > 0, \end{aligned}$$

即 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 故 $f(x)$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调增加函数。

4. 有界性 若存在正数 M , 对于某区间 X 内的所有 x 值, 都有

$$|f(x)| \leq M. \quad (1-5)$$

则称 $f(x)$ 在 X 内有界。

例 11 验证 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

证 因 $x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2 \geq 0$, 故 $x^2 + 1 \geq \mp 2x$ 。

从而当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$; 当 $x < 0$ 时, $\frac{x}{x^2 + 1} \geq -\frac{1}{2}$ 。这就是

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

所以函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的。

§ 3. 初等函数

1. 复合函数

在复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义中, 只有当 $u = \varphi(x)$ 的值