中等职业教育国家规划教材
全国中等职业教育教材审定委员会审定

专业计算

章世祎 主编

化学工业出版社
教材出版中心

中等职业教育国家规划教材
全国中等职业教育教材审定委员会审定

专 业 计 算

主　　编　章世祎
责任主审　戴猷元
审　　稿　秦　炜　戴猷元

化 学 工 业 出 版 社
教 材 出 版 中 心
北 京

（京）新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

专业计算/章世祎主编 .—北京：化学工业出版社，
2002.6
中等职业教育国家规划教材
ISBN 7-5025-3888-7

Ⅰ.专… Ⅱ.章… Ⅲ.计算数学-专业学校-教材 Ⅳ.024

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 040376 号

中等职业教育国家规划教材
全国中等职业教育教材审定委员会审定
专 业 计 算
主 编 章世祎
责任主审 戴猷元
审 稿 秦 炜 戴猷元
责任编辑：王文峡 唐旭华
责任校对：李 丽 王素芹
封面设计：于 兵
*
化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）
发行电话（FAX）64982530
http://www.cip[redacted]cn

新华书店北京发行所经销
化学工业出版[redacted]印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 787×1092 毫米 1/16 印张 6¾ 字数 154 千字
2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-3888-7/G·1042
定 价：9.00 元

中等职业教育国家规划教材出版说明

为了贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》精神，落实《面向21世纪教育振兴行动计划》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划，根据教育部关于《中等职业教育国家规划教材申报、立项及管理意见》（教职成［2001］1号）的精神，我们组织力量对实现中等职业教育培养目标和保证基本教学规格起保障作用的德育课程、文化基础课程、专业技术基础课程和80个重点建设专业主干课程的教材进行了规划和编写，从2001年秋季开学起，国家规划教材将陆续提供给各类中等职业学校选用。

国家规划教材是根据教育部最新颁布的德育课程、文化基础课程、专业技术基础课程和80个重点建设专业主干课程的教学大纲（课程教学基本要求）编写，并经全国中等职业教育教材审定委员会审定。新教材全面贯彻素质教育思想，从社会发展对高素质劳动者和中初级专门人才需要的实际出发，注重对学生的创新精神和实践能力的培养。新教材在理论体系、组织结构和阐述方法等方面均作了一些新的尝试。新教材实行一纲多本，努力为教材选用提供比较和选择，满足不同学制、不同专业和不同办学条件的教学需要。

希望各地、各部门积极推广和选用国家规划教材，并在使用过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高。

教育部职业教育与成人教育司

2001年10月

前　言

在2000年6月制定的《工业分析与检验专业》CBE模式教学改革的教学计划中，将误差与数据处理的内容与微积分基本知识及应用合并为一门课程，取名为“专业计算”。显然这是一门专业必修课。这项教学改革有两层含意：一是要求学生对实验数据的处理方法不仅停留在会操作的水平上，还要知其然，尽可能懂其数学原理。二是高等数学内容的取舍必须为上述应用服务，不宜过多过深，多则无用，够用为止。当然，作为数学理论，又有其相对的独立性与完整性，不能搞成需要什么只讲什么，这样做学生是不能真正学会的。

在本课程的教学计划中，数据处理技术部分规定了11个专项能力，其中有些可在实验室训练时完成，有些必须在课堂教学中完成。本教材第二部分（定量分析中的误差和数据处理）的选材就以此为依据。据编者教学中的经验，感到这部分内容的数学知识关键点是概率积分与高斯曲线。例如，数据评价中置信区间与置信度这两个概念可以说就是上述知识点的一种应用。笔者认为，在学习微积分基本知识的基础上，通过比喻与实例，学生完全能够领会概率是什么，而不必再专门学习概率和统计。本教材第一部分（微积分基本知识）除了一般书上必有的选材外，还介绍了偏导数概念及泰勒展开。作为化工类专业学生，在物理化学课中遇到的各种状态函数大多以偏导数形式出现；用泰勒展开方法来估算各种概率积分及e值，可让学生体会数学的用处，并增强计算能力。

尽管第一部分属高等数学，但处理上不注重推导的严密性，强调直观、实用。在初等水平上，这部分内容具有完整性与独立性，也适合于其他专业学生参考。

笔者编写这类教材尚属首次，在内容取舍及安排上定有不当之处，谬误之处也难免存在，希望读者指正。

本书由上海信息技术学校章世祎任主编。11.4至16.3各章节由陈兴利撰写。本书通过了全国中等职业教育教材审定委员会的审核。清华大学戴猷元教授、秦炜副教授，复旦大学吴信良教授审阅了全书，并提出了宝贵意见和建议，化学工业出版社对本书的出版提供了许多帮助，编者在此一并致以深切的谢意。

编者

2002年4月

内容提要

本书是根据工业分析与检验专业的必修课程专业计算教学大纲（2001年12月）编写的，内容分为两部分：微积分基本知识及定量分析中的误差和数据处理。数学部分介绍导数及积分的基本知识及运算规则，并较多引用化学上的例子及介绍误差曲线、概率和加权平均，为数据处理部分作铺垫。数学部分的撰写重直观，实用而不求严密推导，本部分在初等水平上有完整性与独立性。数据处理部分的取材围绕大纲中规定的专项能力，撰写时又保持教学的系统性。依次介绍：误差处理中的基本概念与术语，随机误差的正态分布，有限次测量数据的统计处理及测定数据的评价，有效数字及运算规则，回归分析法，定量分析中的作图法，计算机在数据处理中的应用等。

本书适用于工业分析与检验专业的初、中级工作人员。

目　　录

第一部分　微积分基本知识

第二部分 定量分析中的误差和数据处理

第一部分　微积分基本知识

学习指南

数学是一切科学技术的基础，工业分析与检验工作也不例外。除了高中数学外，本书第一部分介绍的微积分基础知识更是分析工作者必须掌握的。尽管这部分内容已划归高等数学范畴，但本书仅在初等水平上介绍，而且选择了不少化学、化工分析上的范例以加深同学对数学的亲近感。对于爱好数学的同学，学懂这部分内容后，已有能力自学较深的高等数学教材。

学习过程中要注意以下几点。

(1) 循序渐进　切忌前面尚未学懂就学后面内容，更忌死记硬背导数或积分公式。事实上，数学道理搞清楚后，要背的公式没有几个。

(2) 勤学多问　听完课后，应逐字逐句阅读全书。不懂就问，只有在勤学多问的基础上才能真正学好数学。

(3) 独立做习题　习题要自己做，做习题过程中可以反映出哪些概念已掌握，哪些还不清楚。能独立做出全部习题，就达到了本部分内容的教学要求。

学习本书时，必须备有带科学计算功能的计算器。

第 3 章中的高阶导数与偏导数及 4.3 节泰勒展开是选学内容，宜泛学而不求精。

1　导数基本概念

1.1　极　　限

极限概念是微积分的基础。先看下面一个普通的例子，当 x 的一系列数值接近于 3 而且不等于 3 时，求 $y=x^2$ 的值。

x	2.9	2.95	2.99	2.999	3.001	3.01	3.05	3.1
y	8.41	8.70	8.94	8.994	9.006	9.06	9.30	9.61

从这些数字可以看出，当 x 趋近于 3 时，x^2 趋近于 9，而且可以推测：总能找到使 x^2 足够地接近于 9 时的 x 值。即当 x 趋近 3 时，x^2 以 9 为极限，并写做：

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9 \tag{1.1}$$

另一个稍不普通的例子是在 $x=1$ 的区域内的函数

$$y = \frac{x^2-1}{x-1} \tag{1.2}$$

当 $x=1$ 时，$y=0/0$，为不定值。但是，对于 x 接近于 1 的一系列数值，可以计算 y 的值如下

x	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.001	1.005	1.01	1.1
y	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999	2.001	2.005	2.01	2.1

考察一下这些数字就可看到，当 x 趋近于 1 时，y 趋近于 2。所以，虽然 $x=1$ 时，y 是不定的，但当 $x\to 1$ 时，y 的极限是存在的，且

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2 \tag{1.3}$$

极限的形式定义是，只要 x 无限接近于 a 而又不等于 a 时，函数 $f(x)$ 与 L 之差的绝对值可以任意地小，则 x 趋近于 a 时 $f(x)$ 趋近于极限 L。

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \tag{1.4}$$

工程应用中常用到的一个较难的极限是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \tag{1.5}$$

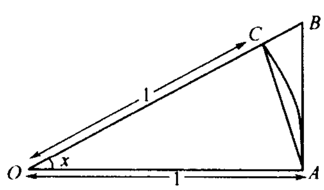

图 1.1

可以用几何方法来求这个极限。设角度 x 由单位半径的弧长 AC(图 1.1) 来定义。

扇形 OAC 的面积为

$$\pi\times 1^2\times\frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

再计算 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OAC$ 的面积

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan x$$

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin x$$

由图 1.1 看出
$$\triangle OAB \geqslant 扇形\ OAC \geqslant \triangle OAC \tag{1.6}$$

亦即 $\tan x \geqslant x \geqslant \sin x$。

可以改写为

$$\frac{1}{\cos x} \geqslant \frac{x}{\sin x} \geqslant 1 \quad 或 \quad \cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

当 x 趋近于 0,$\cos x$ 趋近于 1，所以$\frac{\sin x}{x}$夹在 1 和趋近 1 的一个函数之间,因此可以说

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1.7}$$

由图还可以证明
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

以后将要常用的另一个较难而又实用的例子是

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \tag{1.8}$$

这里不对它严格证明，但可以用两种方法来计算 e 值。

方法一　用计算器计算当 $x = 10, 10^2, 10^3, \cdots, 10^6, 10^7, \cdots$ 时 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的数值，计算表明，当 $x > 10^6$ 后，e 的前 5 位小数不再变化，即 $\mathrm{e} \approx 2.71828$。e 是一个无理数，它的前 10 位小数为 2.7182818285。

方法二　取 x 为正整数 N，用二项式展开公式 $(1+a)^N = \sum\limits_{M=0}^{N} C_N^M a^M$，得 $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = 1 + N \times \frac{1}{N} + \frac{1}{2} N(N-1)N^{-2} + \frac{1}{3!} N(N-1)(N-2)N^{-3} + \cdots + N \times N^{-N}$

容易看出，当 $N \to \infty$ 时，有

$$\lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} = \mathrm{e} \tag{1.9}$$

计算表明，此级数的和的极限也是 2.71828…。

以无理数 e 为底的指数函数 e^x 在误差的分布规律中有重要的应用。除（1.8）式外，e 的定义还可写做

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$

至此所讨论过的例子中，当 x 趋近于 a 时，不论 x 是从大于 a 值方面趋近还是从小于 a 值方面趋近，均得到同样的极限。有时却不是这样。假如考虑的是“阶梯函数”，如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 如果\ x \geqslant 0 \\ 0, & 如果\ x < 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

可以看出，当 x 从负的一边趋近于 0 时，$f(x)$ 趋近于 0；如果 x 从正值方向趋近于 0，极限是 1（图 1.2）。严格地说，这种函数在 $x \to 0$ 时，其极限不存在，但是可以写为

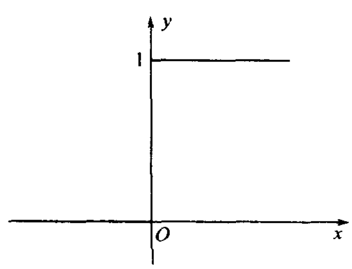

图 1.2

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0; \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \tag{1.11}$$

用以指明有两个不同方向的极限存在。

最后，引用下文有用的三个有关极限的定理。设有两个函数$f(x)$和$g(x)$，且

$$\lim_{x \to a} f(x) = m \quad 和 \quad \lim_{x \to a} g(x) = n$$

那么下面的定理是正确的。

定理 1
$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = m + n \tag{1.12}$$

定理 2
$$\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = mn \tag{1.13}$$

定理 3
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{m}{n} \tag{1.14}$$

假定
$$\lim_{x \to a} g(x) = n \neq 0$$

1.2 连 续 性

在上面的第一个例子中，$y = x^2$，这个函数对于x的任意值（如$x = 3$）都是有定义的，而对$y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$在$x = 1$时，或对$\dfrac{\sin x}{x}$在$x = 0$时，$y$是无定义的。事实上，当$x = 3$时，$x^2$就等于9，即

$$\lim_{x \to 3} x^2 = (x^2)_{x=3}$$

可以说这个函数在$x = 3$时是连续的。连续性的定义是：如果极限$\lim\limits_{x \to a} f(x)$存在且等于$f(a)$，函数$f(x)$在$x = a$点处是连续的。

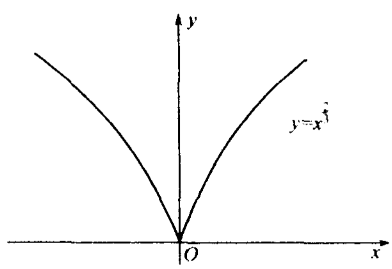

图 1.3

另外一些例子，(1.3) 式在$x = 1$点处，(1.5) 式和 (1.11) 式在$x = 0$点处都是不连续的。形象地说，在纸上可以一笔连续画出一个函数的图形，那么这个函数是连续的。即使一个函数有一个尖点，例如$y = x^{\frac{2}{3}}$（图 1.3），这个函数也是连续的，因为当$x = 0$时，$\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{2}{3}} = 0$和$y = 0$。另一类例子，$y = \sin x$对所有的$x$都是连续的，但是$y = \tan x$对$x = n\pi/2$是不连续的，此处$n$为整数。

1.3 导　　数

在初等数学中，曾用关系式

$$斜率 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1.15}$$

定义了一条直线的斜率，此处(x_1, y_1)和(x_2, y_2)是直线上的两个点。很明显，这对曲线是不适用的。一条曲线的斜率是以给定点的切线的斜率来表示的。虽然可以画出切线并量出斜率，但这是一种繁琐而且不精确的方法。然而，可以用极限定量地确定斜率。

假定在曲线$y = f(x)$上P点（图 1.4）的坐标为(x_1, y_1)，求P点的切线的斜率。如果在曲线上靠近P点另取一点Q (x_2, y_2)，可以很容易地算出割线PQ的斜率为

$$PQ\text{ 的斜率}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

对于如图中所选择的 Q 点，PQ 的斜率比 P 点的切线的斜率大。如果在 P 和 Q 之间另取一点 $Q'(x_3, y_3)$，PQ' 的斜率将比 PQ 的斜率更接近 P 点的切线的斜率。若 Q' 点逐渐接近 P 点，将得到逐渐接近于 P 点斜率的近似值。如果取一点 $(x_1+h, f(x_1+h))$，则割线的斜率为

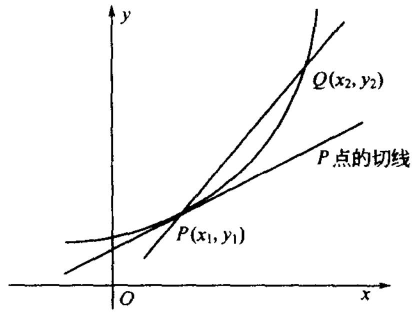

图 1.4

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{(x_1+h)-x_1}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \quad (1.16)$$

斜率的形式定义是：给定曲线 $y=f(x)$，P 是该曲线上的一点，当曲线上另一点 Q 趋近于 P 时，割线 PQ 的斜率的极限就是曲线在 P 点的斜率。

曲线 $y=f(x)$ 的斜率是当 x 改变时 y 的变化率，即 y 相对于 x 的变化率。显然这是一个很重要的量，它就是通常所说的函数 y 对 x 的导数。其符号是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \quad \text{或} \quad f'(x)$$

$y=f(x)$ 的导数的定义为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \quad (1.17)$$

此处 x 是自变量的某一个特定值。

如果此极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 具有导数，或函数 $y=f(x)$ 是可导的，如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点存在导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则说函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点是可导的。

1.4 增量和微分、微商

和导数概念有密切关系的是增量、微分和微商的概念，在图 1.5 中，曲线上 P 点处切线的斜率，为 $f'(x)$ 或 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。Q 为曲线上靠近 P 的另一点，Q 点的坐标为 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$，称 Δx 与 Δy 分别是函数 y 在 x 处坐标的增量和函数的增量。微分的定义是：若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处有导数 y'，则自变量的增量 Δx 与导数的乘积 $y'\Delta x$ 称做 $f(x)$ 在该点 x 处的微分，即 $\mathrm{d}y=y'\Delta x$。如果取函数 y 等于 x，则 $\mathrm{d}x=x'\Delta x=\Delta x$。于是 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$，这正是 (1.17) 式所示将导数 y' 记为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的理由。从图上很容易理解这些关系，以 P 点的切线为斜边，作一直角三角形，底边取 Δx，直角边显然就是 $\mathrm{d}y$，上文已证明，$\Delta x=\mathrm{d}x$，称为 x 的微分，很显然，$f'(x)=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，所以导数也称为微商，即两个微分的商值。增量 Δy 不等于微分 $\mathrm{d}y$，在实际应用中，常常要求算出函数的增量。例如，半径为 r 的球，当 r 增加 Δr，体积的增量为

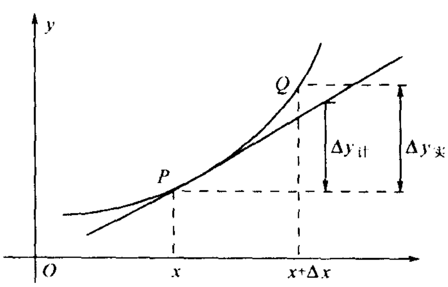

图 1.5

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \Delta r + 4\pi r(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3 \tag{1.18}$$

增量有确定的数值大小，但微分 dx 与 dy 则没有数值大小的规定，实际上，它们只是计算过程中的一个过渡量，最终是以微商 dy/dx 出现。当然 dx 和 dy 总是一个很微小的量，在 Δx 趋于零时，Δy 趋于 dy。在误差理论中，测量值 x 的误差被看成它的增量 Δx。误差在传递过程中运算时，就将 Δx 近似成 dx 按微分法则处理。

2 求导法则

这一节逐步介绍各类函数的求导方法。

2.1 x 的幂的导数

为了说明怎样用式（1.17）求导数，先讨论一些简单的例子。

（1）常数的导数是0

若 $y \equiv c$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0 \tag{2.1}$$

（2）$y=x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=\lim_{h\to0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to0}=1 \tag{2.2}$$

（3）$y=x^2$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x \tag{2.3}$$

（4）$y=x^3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to0}\left[\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\right]=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2 \tag{2.4}$$

（5）$y=x^n$（n 为正整数）

在前面三个导数的基础上，可预计$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n)$将是 nx^{n-1}。导数由下式得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to0}\left[\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right]$$

用二项式定理展开（$x+h)^n$，代入上式后得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\text{含 } h^2,h^3 \text{ 等项}\right]=nx^{n-1} \tag{2.5}$$

前面已求出 n 是正整数时$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x^n)=nx^{n-1}$，这个结果对所有的实数 n 都是有效的。例如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

2.2 和的导数

如果$y=f(x)+g(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\right] \tag{2.6}$$

利用定理（1.12），可以改写为

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$$

因此，函数和的导数等于各函数导数的和。例如，如果 $y=x^4+x^2$，则

$$\frac{dy}{dx}=4x^3+2x$$

2.3 积的导数

如果$y=f(x)g(x)$，应用方程（1.17)，得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right]\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\right]\end{aligned}$$

利用定理(1.12)和定理(1.13)得到

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}g(x)\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\\&=f(x)\frac{dg(x)}{dx}+g(x)\frac{df(x)}{dx}\end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f(x)\frac{dg(x)}{dx}+g(x)\frac{df(x)}{dx}\tag{2.7}$$

可以看出，如果函数$f(x)$乘以常数 c，则$[cf(x)]$的导数就是$c\,\frac{df(x)}{dx}$，因为常数导数是0。例如

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}[(x^6+x^{-\frac{1}{2}})(4x^2+3x+1)]\\&=(x^6+x^{-\frac{1}{2}})(4\times 2x+3)+\left(6x^5-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)(4x^2+3x+1)\end{aligned}$$

关系式（2.7）可以推广为几个函数的乘积。例如，如果$y=f(x)g(x)h(x)$，则

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(x)\frac{dh(x)}{dx}+f(x)h(x)\frac{dg(x)}{dx}+g(x)h(x)\frac{df(x)}{dx}\tag{2.8}$$

2.4 商的导数

商$y=f(x)/g(x)$(规定 $g(x)\neq 0$)的导数是

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}\left\{\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]\Big/h\right\}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}\right]\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}\right]\end{aligned}$$

利用定理(1.12)、定理(1.13)和式(2.7)得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}g(x)\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]-\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\lim\limits_{h\to 0}f(x)}{\lim\limits_{h\to 0}g(x)g(x+h)}$$

即