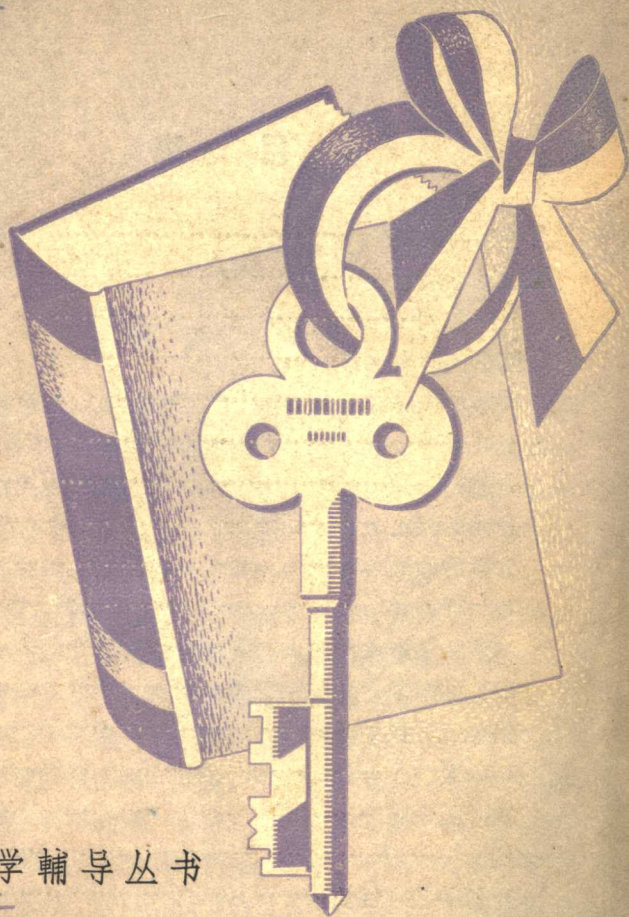




自学辅导丛书

学 术 的 鑰 匙

(初中組)

上海市中学教师进修学院科普工作组

上海科学普及出版社

13.1311/24

內 容 提 要

本書是一本通俗數學讀物，目的在幫助初中文化水平的青年自學算術，使讀者通過本書解決自學算術的一些關鍵問題。

全書包括初中算術的主要內容，採用很多實際生產與日常生活的例子，使讀者較易得到概念，而且便於應用。在解決問題過程中，培養讀者認識數學歸納和演繹的思維法則，從而提高算術方面分析與綜合的能力。

總號：041

自學算術的鑰匙(初中組)

組 稿：上海市中學教師進修學院科普工作組

著 者：楊 榮 祥

繪圖者：陳 正 貴

封面設計：蔡 振 華

出版者：上海科學普及出版社
(上海市南昌路47號)

上海市書刊出版業營業許可證出字第085號

發行者：新華書店上海發行所

印刷者：上海市印刷五廠
上海江寧路1110號

開本：787×1092 1/32 印張：3 3/4

字數：81,000 印數：70,000

1957年10月第一版 1957年10月第一次印刷

統一書號：T 70128·7 定價：4 角

目 次

怎样学习算术.....	1
整数的性质.....	4
自然数列.....	4
整数的四则运算.....	8
整数的整除性.....	36
分数.....	49
分数的意义.....	49
分数的变化.....	53
分数的四则运算.....	60
小数与百分数.....	78
小数的基本性质.....	78
小数的四则运算.....	81
化普通分数为小数.....	88
百分数.....	92
统计图表.....	98
比例.....	103
比例的基本性质.....	103
量的比例关系.....	106
比例分配.....	116

怎样学习算术

什么叫做算术？算术这一个名称是从希腊文译过来的，它原来意义是“数”。正如这个字本身的涵意，算术是研究数的性质和数的运算的学科。所以学习算术的主要目的是研究数的理论，发展数的概念，以及讨论数与数之间的关系和它的运算规律。关于数的理论，范围是很广泛的，它包括算术、代数、数论等等。现在我们要学习的算术，它仅仅是叙述整数和分数以及它的计算方法。显然，学习中学算术是研究数的理论的第一步。

我们学习中学算术是在小学算术的基础上进行的。在小学算术里已经学会了任意大小整数的四则运算（加、减、乘、除），名数和不名数的计算方法，度量的知识，并能利用它们到实际测量问题上去。关于分数、小数和百分数的知识，也初步学过一些。这些内容也是中学算术所要研究的，但是为了进一步讨论分数的四则运算。所以必须要将自然数论知识、数的整除性理论作比较详细的说明。有关算术各方面的应用问题，如长度、面积、体积、重量、时间等的应用题，也给予较多的注意和研究；有关综合技术教育的算术问题，例如百分数的应用、统计图表制作等应当重视。简单和特别重要的量与量之间的

相互关系——正比例和反比例，为学习代数作好初步准备。

現在讓我們来談談学习算术的方法，特别是自学算术应当注意的地方，提出几点来供同志們参考。

1. 对于数的概念要求有系統、彻底、全面。必須通过实例，探求它的特征进行归納，得出一般的結論，然后再应用一般的結論来解决特殊問題。这种从特殊到一般的思維方法，叫做归納法，是最基本的一种思維方法。运用这种方法解决算术問題特别多，例如討論加法交換律这个性質，就应从实例出发。假定有两組学生，第一組有 5 人，第二組有 6 人，把两組学生合并为一組，共有多少人？我們可以先数第一組的学生，再繼續数第二組的学生，得和 $5+6=11$ ，或者我們先数第二組的学生，再繼續数第一組的学生，得和 $6+5=11$ ，因为不論用哪种数法，它們的总数都合成一組的人数，所以 $5+6=6+5$ 。本例是从特殊的例子引向一般的推理过程，然后得出任何两个加数可以交換的道理。

2. 掌握一切运算法則，养成数字計算的技能与熟練技巧。要做到这一点，在計算題目的时候，就不应当滿足于会做題目、能求出正确答案；还必须用最合理的方法做到既迅速又正确的結果来，特別是要注意心算和簡算的方法。例如某一个中学里的算术教师，在教完加法以后，曾佈置一个課外作业題，“把 1 到 100 以內所有的整数加起来”，就是算出 $1+2+3+\cdots+99+100$ 的和，在当时有些学生觉得这問題太繁了，沒有什么意思，后来在下一堂課檢查家庭作业的时候，发觉大部分学生都只会用直接加法（依次相加的方法），这种做法，工作就显得特別繁重，但也有少数学生的做法与他們不同，做法是这样的：

$$(1) \quad 1+2+3+\cdots+99+100=(1+100)+(2+99)+\cdots+$$

$$(50+51) \cdot 50 = 5050。$$

$$(2) \quad 1+2+3+\cdots+99+100=(1+99)+(2+98)+\cdots+(49+51)+50+100=100 \cdot 49+50+100=5050。$$

当教师把这两种做法介绍完毕以后，很多学生恍然大悟，给他们留下了不可磨灭的印象。事实上用上面做法的学生，也没有什么秘诀，如果我们要说他们有秘诀的话，那末他们的秘诀应当是“思索再思索”。这个例子告诉我们，“单单会做题是不够的，还应当用最简单的方法来做”。

3. 重视理论联系实际，特别是有关综合技术教育方面的问题。综合技术教育有关算术方面的知识是很多的：如用心算、珠算或用表格进行各种数学计算的方法，制作简单的统计图表和使用简单的测量仪器的技能。这些技能都应当通过实习作业，不断的在实际练习中得到锻炼。至于日常生活中所碰到的一些具体问题，我们都应当根据问题的条件、量与量之间的关系，以及题目的要求，进行分析研究，有时还要画一些图表来帮助思索。这样做的好处，可以培养对问题的分析能力。例如，某城市去年的人口是25万人，今年的人口是26万人，如果人口按照这个速度增长，问明年的人口是多少？解决问题的关键在于城市人口的增长率。人口的增长率为 $26 \div 25 - 1 = 0.04 = 4\%$ ，所以明年的人口数应为 $260,000 (1+4\%) = 270,400$ (人)，如果有人认为今年的人口数比去年增多10,000人，则明年的人口一定也增多10,000人，这样，就得出270,000人的错误答案。象这样只看问题的表面，不去探求问题的实质，这是解答应用题时不能容许的，我们应当随时注意。

整数的性质

1. 自然数列

我們在小学算术里，已經学过整数的四則运算，就是整数的加、減、乘、除，但是我們从来没有研究过整数的性质。現在的中学算术要进一步研究整数的性质。小学算术里的整数，除 0 外就是我們要学习的自然数。現在先简单的談一下自然数产生的经过。

自然数是自然現象的反映，例如一头牛、一棵树、一座山等等，这些东西的一个的“一”，就是自然数的单位。在古时候还不知道用自然数来计算物件的个数，例如牧童放羊群出去吃草，每走出一只羊，拿进一塊石头，等到傍晚赶羊群回来的时候，每走进一只羊，就拿出一塊石头，牧童就这样拿一塊石头对应一只羊来计算只数的，这种計数的方法，是不方便的。后来想出一个办法，把一个物体加上一个物体成为二个物体，二个物体加上一个物体成为三个物体，这样的一个一个地依次加上去，就成为

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ……,

象上面这样依次一个比一个大单位一的这一列数，我們叫它們自然数列。

你們想一想，照上面这样一个加上一个，是不是可以永远加下去呢？是的，是永远加不完的，因此我們写自然数列的时

候，通常在数列的后面，用虚点‘…’来表示它写不完的意思。

自然数列 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$ ，它有那些特别的地方呢？这些特别的地方，在算术里称它为“基本性质”。现在我们来看看，它究竟有哪些性质。

1. 我们发现单位‘1’是自然数列中最小的一个数，也是开始的一个数。在数列中凡是右面的数总比它左面的数大，反过来，凡是左面的数总比它右面的数小。例如：

$5 > 4, 5 > 2, \dots$ 等。（符号‘ $>$ ’读‘大于’。）

$3 < 4, 3 < 8, \dots$ 等。（符号‘ $<$ ’读‘小于’。）

2. 自然数列只有头（单位1）而没有尾的。因此就不可能有最大的自然数。

譬如我们说8最大，这显然是不对的，因为 $8+1=9$ ，9就比8要大，如果你说自然数N最大，也是不对的，因为

$$N+1 > N, \quad (N \text{ 表示任意的自然数})$$

所以我们说自然数是沒有最大的。

3. 我们再看看自然数列中有没有相等的数，因为自然数列里的数，是有顺序的，从单位1起，它后面跟的那个数，总比它前面的数大1，很清楚的可以看出，这一列数是一个比一个大1，就这样大上去的，所以它们中间是不会有相等的数。

上面的三条，就是自然数列特别的地方，我们叫它做性质，以后遇到“性质”这个词儿，就是这个意思。

我们已学过计数的方法，十进制制只要用九个阿拉伯数字同着“0”，就可以写出任何一个自然数。算术课本上已经把数位、数的分等、数的写法和读法，讲得很详细了，这里不预备重复。但是对于一个自然数（十进制）如下面用 $10, 10^2, 10^3, \dots$

等以及用和的形式来表示的方法，是比较难懂的。又因为它与各种进位制有关系，因此提出来讨论一下，是必要的。

例如 $2359 = 9 + 5 \times 10 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^3$ ，
它的一般形式是这样的，用 N 表示自然数， $a, b, c, d, \dots$ 等表示 $0, 1, 2, \dots, 8, 9$ 这十个数字中的任一个，因此得

$$N = a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3 + \dots,$$

上面这个式子很清楚地把十进位制（十为基数）表示出来了。其中 a 表示个位数字， b 表示十位数字， $b \times 10$ 也就是 b 个 10 的意思， c 是百位数字， $c \times 100$ 就是 c 个 100 的意思，以下类推。

十进位制记数法，现在世界各国差不多都采用了；但是进位制的方法很多，除了十进位制外，还有五进位制、六十进位制、二进位制等等。

例如 $60 \text{ 秒} = 1 \text{ 分}$ ， $60 \text{ 分} = 1 \text{ 时}$ ，就是 60 进位。

我们可以依照十进位制的方法，用 $1, 2, 3, 4, 0$ 这五个数字，就可得出五进位制记数法，表示任何一个数。

例如，把自然数 96 用五进位制表示出来。

因为五进位制是数满 5 个就进一位，满 5 个 5 再进一位，以此类推下去。也就是说它的进位是：满 5 个进一位，满 $25 = 5^2$ 个再进一位，满 $125 = 5^3$ 个再进一位……等，所以它的一般式子，可以用下式表示。

$$N = a + b \times 5 + c \times 5^2 + d \times 5^3 + \dots,$$

式中 N 表示自然数， $a, b, c, d, \dots$ ，都是小于 5 的自然数或 0，所以用五进位制所表示的数应是： $\dots dcba_5$ 。

因为 $96 = 1 + 4 \times 5 + 3 \times 5^2$,

所以 96 表成五进位制的数是 341。

如果我們要把一个五进位制的数 40321, 用自然数表示它, 也是容易的。只要根据上面的公式, 就可得出

$$\begin{aligned} N &= 1 + 2 \times 5 + 3 \times 5^2 + 0 \times 5^3 + 4 \times 5^4 \\ &= 1 + 10 + 75 + 0 + 2500 \\ &= 2586. \end{aligned}$$

就是說五进位制数 40321 与自然数 2586 相等。

近代发明的电子计算机, 由于电子的相斥和相吸两个信号, 就可以用电子来进行计算, 它的计算速度非常之快, 我們是很难想象得到的。电子计算机是十进位制么? 不是的, 因为电子只能有两个信号。

如 1, 0 两个信号, 就可以想象得出 1, 0 两个数字構成二进位制了。二进位制的一般式子是:

$N = a + b \times 2 + c \times 2^2 + d \times 2^3 + \dots$, 其中 $a, b, c, d, \dots$, 都表示 0 或 1。

例如 自然数 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 我們用二进位制表示如下: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010。

我們从上面的例子, 可以了解到各种进位制, 都有它自己的特点, 不能說只有十进位制最好, 二进位制用在电子计算机上, 就是很好的例子。

我們在自然数列的前面, 添上一个“0”, 就成为扩大的自然数列, 如 0, 1, 2, 3, 4, $\dots$, 在这个数列中的任何一个数, 都叫做整数。其中符号“0”表示沒有东西, 但 0 也是数, 而不是自然数。

至于扩大自然数列的性质如何，学者可以参照自然数列的性质，并以0替代单位1的位置，进行观察。

本节讨论了两个问题，一个是自然数列的性质，另一个是各种进位制的记数法。这两个问题都是进一步学习算术的理论基础，希望学者要彻底了解。

2. 整数的四则运算

整数的四则运算，也叫做整数的加、减、乘、除，这些在小学算术里都学过了，但是学得不透，有些道理还不很清楚，有必要提出来作进一步的研究。

初中算术课本中加法的定义是这样的：把若干个已知数合併起来，求它们的和的运算方法叫做加法。

例如 $5+4=9$ ，或 $5+4+3=12$ 。

如上式左边的数5, 4, 3都叫做加数，等号右边的数(如9或12)叫做和。初看上去好像没有什么要讨论的了，实际这里面还有一些问题是没有解决的，现在提出来如下：

1. 如果两个或两个以上的数相加，把加数的次序交换后，会不会得出不同的和来？
2. 如果有三个或多于三个已知数相加时，是否可把其中两个、两个合併，一直到合併成一个和为止？
3. 整数的加法是不是一定可以实行，它们的和是不是独一无二的？

上述这三个问题，是研究整数加法的重要问题。我们可以根据数数的原则，只要不重复不遗漏，与数的次序先后是无关的。

例如 $4+5=9$, $5+4=9$ 。

我們可以直觀的看出：如

$$\begin{array}{c} \underbrace{4 \text{ 个}} + \underbrace{5 \text{ 个}} \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots \\ \underbrace{5 \text{ 个}} + \underbrace{4 \text{ 个}} \end{array}$$

它們合併後的結果都是等於 9。所以我們說交換加數，它們的和是不變的，這個性質叫做加法的交換律。我們用文字表成下式：

$$a+b=b+a. \quad (a, b \text{ 表示自然數或 } 0)$$

設有三個加數 5、6、7，求它們的和。

我們可先合併其中任意兩個數，再與余下的這個數合併成一個數。例如：

$(5+6)+7=5+(6+7)$ 。這裡括號 () 表示先合併括號內的數。

我們可以直觀的看出，如：

$$\begin{array}{c} \underbrace{(5+6)} + \underbrace{7} \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 11, 12, 13, 14, \dots, 18, \dots \\ \underbrace{(6+7)} + \underbrace{5} \end{array}$$

它們的結果，顯然都是 18，因此我們知道，幾個數相加，先將其中的兩個數或幾個數結合成一個數，再將它們的和同其他的數相加，結果是不變的。這個性質叫做加法的結合律。我們用文字表成下式：

就是 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 。這裡 a, b, c 表示自然數或 0。

从上面的說明中，我們可以知道两个自然数（或两个以上的）相加，是一定可以实行的，而且它們的和是唯一的。

現在我們来研究多位数的加法是怎样进行的。

例如：今有甲、乙、丙三运输队，甲队运米25,456斤，乙队运米40,321斤，丙队运米6,732斤。問三队共运米多少斤？

解：已知三个数，求它們合併所成的数，这是加法。

$$25,456 \text{ 斤} + 40,321 \text{ 斤} + 6,732 \text{ 斤} = 72,509 \text{ 斤}$$

我們把它們写成直式如下：

$$\begin{array}{r} 25,456 \\ 40,321 \\ + 6,732 \\ \hline 72,509 \end{array}$$

在写直式的时候，先写下一个数，第二个数要与第一个数的位置上下对齐，就是个位与个位对齐，十位与十位对齐，以此类推。第三个数与第二个数一样要与第一个数对齐。然后合併同一个位数上的数字，先合併个位上的数字，依次合併十位、百位、千位、万位……等。如果合併的数字不滿10，就把这个数字写在这位的横綫下面，如果合併后的数超过10，則把10进到它的上一位去，就是上一位里加上1，把余下的数写在这位的横綫下面，如果合併后的数超过20，則在它上一位里加上2，仍旧把余下的数写在这位的横綫下面，余类推。照这样的加法把各个位数上的数都合併以后，最后在横綫下面的这个数，就是它們的和。如本例的加法过程，可分开写出如下式：

个位数字的和 $6+1+2=9$,

余下是9；

十位数字的和 $5+2+3=10$ ， 这里在百位加上1，余下是0；

百位数字的和 $1+4+3+7=15$, 这里在千位加上1,
余下是5;

千位数字的和 $1+5+0+6=12$, 这里在万位加上1,
余下是2;

万位数字的和 $1+2+4=7$, 余下是7。

所以它们的和是 72,509。

这种做法的根据是什么? 我们用下面的式子来说明:

$$\begin{aligned} 25,456+40,321+6,732 &= 6+5\times 10+4\times 10^2+5\times 10^3+2 \\ &\quad \times 10^4+1+2\times 10+3\times 10^2+0 \\ &\quad \times 10^3+4\times 10^4+2+3\times 10+7 \\ &\quad \times 10^2+6\times 10^1 \end{aligned}$$

我们根据加法的交换律和结合律, 又可等于下式:

$$\begin{aligned} 25,456+40,321+6,732 &= (6+1+2)+(5+2+3)\times 10 \\ &\quad + (4+3+7)\times 10^2+(5+0+6) \\ &\quad \times 10^3+(2+4)\times 10^4 \end{aligned}$$

上式的右边括号内的数就是同位数的数字之和, 直式加法与它取得完全一致。因为用直式进行加法比较简捷, 所以我们常常用这个算式求许多加数的和。

现在来讨论加数的变化所引起的和的变化。

1. 任何一个加数增加或减少一个数, 其余加数不变, 那末它们的和也增加或减少同一个数。

我们举例来说明。

设有两组学生, 第一组8人, 第二组10人, 共有18人。如果第一组增加或减少2人, 则它们的和也增加或减少2人, 用式表示如下:

$$8+10=18,$$

$$(8+2)+10=(8+10)+2=18+2,$$

$$\text{又 } (8-2)+10=(8+10)-2=18-2.$$

2. 任何一个加数增加一个数，另一个加数减少同一个数，則它們的和不变。

設有甲乙两船，在沿河两地相向而行，甲船每时行16里，乙船每时行14里，假如不考虑水流速度，則它們每小时接近
 $16\text{里}+14\text{里}=30\text{里}。$

如果水的流速每时3里，并設甲船是順流，則乙船必是逆流。則甲乙两船每小时接近

$$(16+3)\text{里}+(14-3)\text{里}=19\text{里}+11\text{里}=30\text{里}。$$

这样已可說明这个变化是正确的。如果我們利用这个性质来计算下題，是比較簡便的。

例如 $98+197+299+548$

$$=(98+2)+(197+3)+(299+1)+(548-6)$$

$$=100+200+300+542$$

$$=1,142. \quad (\text{这个加法可以用心算得到答案})$$

減法的定义，一般是从加法与減法有逆运算的关系来定义的。已知两个加数的和及其中一个加数，求另一个加数的方法叫做減法。設 x 是要求的加数，則可表示为

$$a+x=b,$$

式中 a, x 都是加数， b 是它們的和，如果改写为減法的式子：

$$x=b-a,$$

式中 b 叫做被減数（原来的和）， a 叫做減数（已知加数）， x 叫做它們的差（未知的加数）。我們从这个关系，又可得出下

述的关系式:

即 減数 + 差 = 被減数, 或 $a + x = b$,

減数 = 被減数 - 差, 或 $a = b - x$ 。

我們知道, 已知数的加法是永远可能的。两个已知数的減法, 是否永远可能呢? 現在可用实例來說明:

例如 $8 - 5 = 3$, $8 - 8 = 0$, $8 - 9$ 就不可能了。因此我們說, 如果要減法可以实行, 一定要被減数大于或等于減数时, 才能实行減法。如果被減数小于減数时就不可能实行減法。

这里必須注意, 整数加法的交換律, 是否也适用于減法的问题。例如 $8 - 5$ 就可說明不能交換被減数(8)与減数(5)的位置, 所以減法是沒有交換律的。但是在下面这些題目里, 我們可以看出交換律在減法运算中, 也可以得到应用。

$$1. 28 - (15 + 8) = (28 - 15) - 8 = (28 - 8) - 15 = 5.$$

$$2. 28 - (15 - 8) = (28 - 15) + 8 = (28 + 8) - 15 = 21.$$

$$3. 28 + (15 - 8) = (28 + 15) - 8 = (28 - 8) + 15 = 35.$$

从这三个例题可以看出, 只要被減数不变动位置, 其余的数还是可以利用交換律的。但是必須注意它們的加号或減号, 要根据实际意义来决定。如例1中28減去15与8的和, 它和28減去15后再減去8, 具有相同的意义。又如

$$28 - (32 - 12) \text{ 就必須}$$

$$(28 + 12) - 32, \text{ 如果写成}$$

$(28 - 32) + 12$, 就不能进行运算了, 因为 $28 - 32$ 是不可能的。从本例可以看出, 适当的結合还是有用处的。

关于两个已知数的減法, 可用下式来演算。

$$\text{例如 } 5678 - 996 = 4682.$$

$$\begin{array}{r}
 \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} 7 8 \\
 -) \quad 9 9 6 \\
 \hline
 4 6 8 2
 \end{array}$$

做减法的时候，先把被减数写下来，再把减数写在它的下面，要依照个位、十位、……等上下对齐，然后进行同位数字相减，先从个位做起，把所得的差写在这位的横线下面，如果同位数字的被减数比减数小，则可在被减数的上一位借1个，就是这一位上加10个再进行减法。但必须特别注意，如果借掉过1，不要忘记扣除1，依次从个位、十位、百位、……，照样做下去，最后在横线下面的这个数，就是所求的差。本例被减数5 6 7 8的5和6的上面加一个黑点，是表示借去1的意思，这样就不会忘记扣除1了。

关于已知数的变化所引起差的变化，讨论如下。

1. 被减数增加或减少一个数，而减数不变，则它们的差也增加或减少同一个数。当然是指减法可能实行的情形。我们用式子表示如下：

即 $18 - 8 = 10$ ，如果被减数加上5，则它们的差也加上5，即 $(18 + 5) - 8 = (18 - 8) + 5 = 10 + 5$ 。

如果被减数减去5，则它们的差也减少5。

$$(18 - 5) - 8 = (18 - 8) - 5 = 10 - 5。$$

2. 减数增加或减少一个数，被减数不变，则它们的差就减少或增加同一个数。

例如 $18 - 8 = 10$ ，如果减数加上5，则它们的差要减少5，即 $18 - (8 + 5) = (18 - 8) - 5 = 10 - 5$ 。