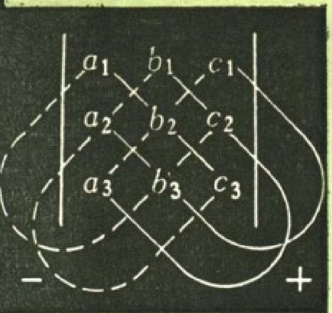

中学数学辅导丛书

行列式

戴再平 编

黑龙江科学技术出版社

书号：13217·100
定价：　0.41元

行　　列　　式

Hanglieshi

戴再平 编

黑龙江科学技术出版社

一九八四年·哈尔滨

责任编辑：张宪臣
封面设计：仁　之

行　列　式

戴再平　编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
黑龙江新华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张3.125·字数60千
1984年8月第一版·1984年8月第一次印刷
印数：1—47,000

书号：13217·100　　　定价：0.41元

前　言

根据《全日制重点中学数学教学大纲（草案）》规定，中学数学教材增加了行列式、矩阵、向量、集合、逻辑代数、概率和微积分等内容，为了帮助广大中学师生正确理解和掌握这些新内容，我们组织写了这套《中学数学辅导丛书》。它包括行列式、矩阵和线性方程组、向量、集合、逻辑代数、极限与连续、复合函数的导数、导数的应用、不定积分、定积分的应用、随机变量等。

这套丛书密切结合现行全日制六年制重点中学数学课本，全面地介绍了课本中增加的新内容，并适当地做了拓宽和加深，以利于教学使用。

由于我们编写丛书的经验不足和水平有限，不妥之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见，以便今后改进，使本丛书成为广大中学师生有益的参考书。

葛　棠　戴再平　韩殿发

一九八二年十月

目　　录

一、二阶行列式

（一）二阶行列式的概念

解二元线性方程组

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & ① \\ a_2x+b_2y=c_2 & ② \end{cases}$$

①$\times b_2-$②$\times b_1$，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \qquad ③$$

假设 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，用 $a_1b_2-a_2b_1$ 除上式得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad ④$$

类似地可得

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad ⑤$$

④、⑤两式的分母都是 $a_1b_2-a_2b_1$， ⑥

它用 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ⑦

表示。⑦式中的 a_1、b_1、a_2、b_2 的位置，恰如它们在方程组(I) 中的位置。⑥式和⑦式的关系是，⑥式等于⑦式中每条对角线上两个数的乘积之差（在图 1 中实线上两个数的积减去虚线上两个数的积），即

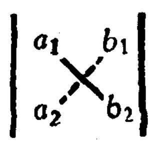

图 1

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

我们把⑦式叫做**二阶行列式**。a_1、a_2、b_1、b_2 叫做二阶行列式的**元素**，这四个元素排成二**行**（横排）二**列**（竖排）。⑥式叫做二阶行列式的**展开式**。当 a_1、a_2、b_1、b_2 有确定的数值时，行列式也有确定的数值。

用行列式表示二元线性方程组（I）的解是

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

这里，行列式 D 是由方程组（I）中未知数的系数组成的，叫做这个方程组的**系数行列式**；D 中的元素 a_1、a_2 分别换成 c_1、c_2，就得到行列式 D_x；D 中元素 b_1、b_2 分别换成 c_1、c_2，就得到行列式 D_y。

例 1 试计算 $\begin{vmatrix} 2a & a^2 \\ a^3 & a^4 \end{vmatrix}$

解 $\begin{vmatrix} 2a & a^2 \\ a^3 & a^4 \end{vmatrix} = 2a \cdot a^4 - a^3 \cdot a^2 = 2a^5 - a^5 = a^5$

例 2 用行列式解方程组

$$\begin{cases} x - \dfrac{4}{5}y - \dfrac{1}{5} = 0 \\ 4x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

解 第一个方程两边同乘以 5，然后再将方程组化为一般形式

$$\begin{cases} 5x-4y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$$

计算 $D=\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=5\cdot(-3)-4\cdot(-4)$

$=-15+16=1$

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-2\cdot(-4)$

$=-3+8=5$

$D_y=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=5\cdot2-4\cdot1=10-4=6$

$\therefore\quad x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{5}{1}=5,\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{6}{1}=6$

即方程组的解是

$$\begin{cases} x=5, \\ y=6. \end{cases}$$

（二）二阶行列式的性质

定理 1.1　把行列式的行变为例，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

证明　计算左、右两边都得到同样的数：$a_1b_2-a_2b_1$。

定理 1.2　把行列式的行（或列）对调，所得行列式的值与原行列式的值的绝对值相等，符号相反。

证明　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

的值，得到数 $(a_1b_2 - a_2b_1)$ 和 $(b_1a_2 - b_2a_1)$. 这两个数绝对值相等，符号相反。

定理 1.3 行列式的值等于零的充要条件是行列式的行（或列）的对应元素成比例.

证明 (1) 充分性。当行列式的行的对应元素成比例，即 $a_1 = ka_2$，$b_1 = kb_2$ 时，

1）如果 $k=0$，有 $a_1 = 0$，$b_1 = 0$；

2）如果 $k\neq 0$，因为 $a_1\cdot kb_2 = ka_2\cdot b_1$，两边同除以 k.

在这两种情况下都有 $a_1b_2 = a_2b_1$，所以

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

(2) 必要性。当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$，即 $a_1b_2 = a_2b_1$ ①

时，

若行列式中至少有一个元素不为零，不妨假设 $a_1\neq 0$，令 $\dfrac{a_2}{a_1} = k$，即 $a_2 = a_1k$，代入①式得 $a_1b_2 = (a_1k)\cdot b_1 = a_1kb_1$，因为 $a_1\neq 0$，所以 $b_2 = kb_1$，因此

$$a_2 = ka_1,\quad b_2 = kb_1$$

若行列式中所有元素都是零，上面的关系同样是成立的（对于任意的 k）。

例 1 已知 $\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ g(x) & \psi(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix}$，求证：

$$f(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x).$$

证明　考虑右边的行列式，由定理1.1得

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(x) & f(x) \\ \psi(x) & g(x) \end{vmatrix}$$

又由定理1.2，有

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & f(x) \\ \psi(x) & g(x) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ g(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$$

于是

$$\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ g(x) & \psi(x) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ g(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$$

移项得

$$2\cdot\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ g(x) & \psi(x) \end{vmatrix} = 0$$

所以

$$\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ g(x) & \psi(x) \end{vmatrix} = f(x)\psi(x) - g(x)\varphi(x) = 0$$

这就证明了 $f(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x)$。

（三）二元线性方程组的讨论

这里，我们将利用行列式讨论包含两个方程的二元线性方程组

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & ① \\ a_2x + b_2y = c_2 & ② \end{cases}$$

的解。首先我们指出方程组（I）中未知数 x、y 的系数应该满足：

(1) a_1、b_1 不同时为零，且 a_2、b_2 不同时为零；

(2) a_1、a_2 不同时为零，且 b_1、b_2 不同时为零，因为只有满足（1），①、②两式才包含未知数，才是线性方程；也只有满足(2)，组（I）才包含两个未知数，才是二元方程组。

注意到课本中讨论组（I）时以 a_1、b_1、a_2、b_2 不同时为零为条件，我们认为这是较弱地运用（1）、（2）这两条前提的结果。但是，下面我们对组（I）进行讨论时，将不遵守（1）、（2），也就是说包括 a_1、b_1、a_2、b_2 中有若干个为零，甚至同时为零的情形，因为在实际中，许多情况下人们只是形式地给出组（I），而并不严格地限定它是“二元线性方程组”。同时，我们这样做也是为了讨论时较为方便，避免了常常需要附加的说明。以后在三元线性方程组的讨论中，对于未知数的系数，我们也作类似的理解和处理。

前面已经得到

$$Dx = D_x \quad \text{(见第 1 页③式)} \tag{③}$$

类似地，有

$$Dy = D_y \tag{④}$$

于是方程组（I）的解可分为以下几种情形：

1. 当 $D \neq 0$ 时，用 D 除③、④两式的两边，就得到方程组（I）的唯一解

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\[2ex] y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$$

2. 当 $D = 0$ 时，

（1）D_x、D_y 中至少有一个不等于零。不妨假设 $D_x \neq 0$，此时 x 无论取什么值，③式都不能成立，故方程组（I）无解。

（2）$D_x = D_y = 0$。分两种情形：

i）D 的元素不全为零。不妨假设 $a_1 \neq 0$，由于

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

于是有

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad c_1 b_2 = c_2 b_1 \quad a_1 c_2 = a_2 c_1 \qquad ⑤$$

以 a_1 乘②式两边，得

$$a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \qquad ⑥$$

考虑到⑤式，⑥式可化为

$$a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1$$

即

$$a_2(a_1 x + b_1 y) = a_2 c_1$$

由此知方程①的解就是方程②的解，因为方程①有无穷多解，所以方程组（I）有无穷多解，表为

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b_1}{a_1} \cdot t + \dfrac{c_1}{a_1} \\ y = t \end{cases}$$

上式中 t 可取任意值。

ii）D 的元素全为零。进一步我们考虑：

（i）D_x（或 D_y）的元素不全为零，即 c_1、c_2 不全为零。不妨假设 $c_1 \neq 0$，此时方程①无解，所以方程组（I）无解。

（ii）D_x（或 D_y）的元素全为零。此时未知数 x、y 都可

独立地取任意值，所以方程组（I）有无穷多解。

以上情形1、2（1）和2(2)(i)，在方程①的未知数系数不全为零且方程②的系数也不全为零的约定下，可以作下面的几何解释：在平面直角坐标系中，情形1表示两条直线相交；情形2（1）表示两条直线平行；情形2（2）i表示两条直线重合。这一几何解释正好是课本复习题一第2题：

已知方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

（a_1, b_1 不同时为零，a_2, b_2 不同时为零）

中的两个方程分别表示两条直线 l_1 与 l_2，求证：

（1）l_1，l_2 相交的充要条件是 $D\neq 0$；

（2）l_1，l_2 平行而不重合的充要条件是 $D=0$，但 D_x，D_y 中至少有一个不等于零；

（3）l_1，l_2 重合的充要条件是 $D=D_x=D_y=0$。

证明（1）充分性　若 $D\neq 0$，则方程组有唯一解，也就是说 l_1，l_2 有唯一公共点，故 l_1，l_2 相交；

必要性　若 l_1，l_2 相交，则 l_1，l_2 有唯一公共点，即方程组有唯一解，必有 $D\neq 0$，因为若不然，即 $D=0$，无论其它情况怎样，方程组无解或有无穷多解，也就是说 l_1，l_2 无公共点或有无穷多个公共点，与 l_1，l_2 相交相矛盾。

（2）充分性　若 $D=0$，D_x, D_y 中至少有一个不等于零，此时方程组无解，也就是说 l_1, l_2 无公共点，故 l_1，l_2 平行；

必要性　若 l_1，l_2 平行，分两种情况：

（i）l_1，l_2 均与 y 轴平行，此时 $b_1=b_2=0$，故 $D=0$。

由已知 a_1，b_1 不同时为零，a_2，b_2 不同时为零，故 $a_1\neq 0$，$a_2\neq 0$，于是 l_1，l_2 的方程可分别写为：$x=\frac{c_1}{a_1}$，$x=\frac{c_2}{a_2}$，因为 l_1，l_2 不重合，故 $\frac{c_1}{a_1}\neq\frac{c_2}{a_2}$，于是有 $D_y\neq 0$；

(ii) l_1，l_2 均不与 y 轴平行。此时 b_1，b_2 均不为零，由 l_1，l_2 的斜率相等得 $-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}$ 即 $a_1b_2-a_2b_1=0$，故 $D=0$。又因为 l_1，l_2 平行，从而 l_1，l_2 在 y 轴上的截距不相等，即 $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$，故 $D_x\neq 0$。

综合 (i)，(ii)，就证明了 $D=0$，D_x，D_y 至少有一个不等于零。

(3) 充分性　若 $D=D_x=D_y=0$，则

$$a_1b_2-a_2b_1=c_1b_2-c_2b_1=a_1c_2-a_2c_1=0$$

由已知 a_1，b_1 不同时为零，不妨假设 $b_1\neq 0$，由

$$a_1b_2-a_2b_1=0$$

得

$$a_2=\frac{a_1b_2}{b_1}$$

若 $a_1=0$，则 $a_2=0$，$b_2\neq 0$，此时 l_1 的方程是 $y=\frac{c_1}{b_1}$，l_2 的方程是 $y=\frac{c_2}{b_2}$，由 $c_1b_2-c_2b_1=0$，知 $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$，故 l_1，l_2 重合；若 $a_1\neq 0$，则有 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$。此时如果 $c_1=0$，必有 $c_2=0$，则 l_1，l_2 重合。如果 $c_1\neq 0$，则

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}，\text{故}\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}$$

l_1，l_2 也重合。

必要性　若 l_1，l_2 重合，由 a_1，b_1 不同时为零，不妨假设 $b_1\neq 0$，必有 $b_2\neq 0$，因为若不然，就与 l_1，l_2 重合相矛盾。于是 l_1，l_2 的方程可分别写为

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1},\ y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}$$

从而

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \quad ①$$

$$\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2} \quad ②$$

由①得 $D=0$，由②得 $D_x=0$。若 $a_1=a_2=0$，则有 $D_y=0$；若 a_1，a_2 均不为零，由②÷①得 $\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}$，也有 $D_y=0$。

例 解关于 x，y 的方程组

$$\begin{cases} ax-(3a-2)y=2(a+2), \\ (a+1)x-(a+4)y=5a+2. \end{cases}$$

解 计算：

$$D=\begin{vmatrix} a & -(3a-2) \\ a+1 & -(a+4) \end{vmatrix}$$

$$=-a(a+4)+(3a-2)(a+1)=2a^2-3a-2$$

$$=(a-2)(2a+1)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 2(a+2) & -(3a-2) \\ 5a+2 & -(a+4) \end{vmatrix}$$

$$=13a^2-16a-20=(a-2)(13a+10)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & 2(a+2) \\ a+1 & 5a+2 \end{vmatrix}$$

$$=3a^2-4a-4=(a-2)(3a+2)$$

(1) 当 $a\neq 2$ 且 $a\neq-\frac{1}{2}$ 时，$D\neq 0$，方程组有唯一解；

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{13a+10}{2a+1} \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{2a+2}{3a+1} \end{cases}$$

（2）当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$D=0$

$$D_x=\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{13}{2}+10\right)\neq 0$$

方程组无解。

（3）当 $a=2$ 时，$D=D_x=D_y=0$，D 中有一个元素 $a\neq 0$，这时第一个方程的解就是第二个方程的解，而第一个方程可化为：$x-2y=3$，故方程组的解为

$$\begin{cases} x=3+2t, \\ y=t \end{cases} \quad (t\text{ 可取任意值})。$$

练 习 一

1. 将二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有等根的充要条件用行列式表示出来。

2. 化简：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos y \\ \cos x & \sin y \end{vmatrix}$。

3. 利用行列式解下列各方程组：

(1) $\begin{cases} 2x-y=4, \\ x+3y=-5； \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=1, \\ \dfrac{2}{2x}+\dfrac{2}{y}=1； \end{cases}$