高等工程力学系列规划教材

线性与非线性有限元及其应用

郭乙木　陶伟明　庄　茁　编著
丁皓江　姚振汉　主审

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等工程力学系列规划教材

线性与非线性有限元及其应用

郭乙木　陶伟明　庄　茁　编著
丁皓江　姚振汉　主审

机械工业出版社

本书主要介绍线性与非线性有限元法的基本概念、力学模型和数值方法及其在工程中的应用。主要内容包括线性弹性力学问题，材料非线性问题，几何非线性问题，接触、摩擦等边界非线性问题，由几何非线性引起的结构稳定性问题，非力学的场问题以及随机有限元问题。同时，还介绍有限元分析中影响到解的收敛性、可靠性和精度的几个必须注意的问题。最后，对最常用的有限元商用软件作了简单的介绍。

本书可作为机械工程、土木工程、水利工程、材料工程和动力工程等专业研究生和力学专业高年级本科生的教材，也可作为应用有限元软件进行分析、设计的工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性与非线性有限元及其应用/郭乙木等编著. —北京：机械工业出版社，2003.10
高等工程力学系列规划教材
ISBN 7-111-13096-0

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 郭…　Ⅲ. ①线性-有限元法-高等学校-教材②高等工程力学-有限元法-高等学校-教材
Ⅳ. TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 083946 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：季顺利
责任编辑：季顺利　版式设计：张世琴　责任校对：魏俊云
封面设计：姚　毅　责任印制：闫　焱
北京京丰印刷厂印刷・新华书店北京发行所发行
2004 年 1 月第 1 版・第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5・10.875 印张・423 千字
定价：29.00 元

高等工程力学系列教材编委会

前 言

20世纪90年代初，作者在从事多年有限元教学和工程应用的基础上，曾参与编著了《非线性有限元及程序设计》（浙江大学出版社，1993年）。十多年来，有限元法的理论，特别是数值方法以及在工程中的应用都有了长足的发展，同时，作者通过长期从事研究生的非线性有限元教学实践，积累了一些经验，认识到有必要对原书进行重新编写。正值此时，机械工业出版社组织了高等工程力学系列教材研讨会，为本书的编写和出版提供了良好的契机。这样，不仅能将作者多年从事有限元研究、教学和工程应用的心得编入本书，而且更重要的是通过高等工程力学系列教材编委会，将国内著名大学从事有限元理论、软件研究和教学的众多专家、学者组织在一起，集思广益，优化整合，使本书从内容的取舍到编写的深入浅出，力求确保适用和适度方面受益匪浅。为此，在本书出版之际，作者向编委会全体同行和对本书出版给予有益建议和热情鼓励的专家们表示诚挚的谢意，向机械工业出版社的领导和同行表示衷心的感谢。

本书的重点是线性和非线性有限元的基本概念，单元和形函数的构造方法以及不同单元特性的分析，有限元表达格式的建立和描述，各种数值方法的原理、分析比较以及有限元的工程应用。

按高等工程力学系列教材编委会要求，本书能适合机械工程、土木工程、动力工程、材料科学的研究生和力学专业的高年级本科生阅读，教材的编写充分体现以学生为本、以教师为本，内容深度充分考虑学科发展和读者的实际水平，并结合工程实际。

本书共15章：

第1章综合阐述有限元形成、发展的简要历史和有关重要著作以及有限元的应用，向读者展示有限元的轮廓和前景。

第2、3章通过平面3节点三角形常应变单元的实例，系统介绍线性有限元法的一般原理和基本方程，介绍弹性力学平面、空间和轴对称问题有限元。

第4章讨论等参元的构造方法和表达格式，简要介绍数值积分方法和积分阶次的选择。

第5章介绍工程结构中广泛应用的板壳、杆系有限元，并对板梁结构系统的处理及中厚板、壳体也作了简要说明。

第6章讨论结构动力学问题有限元，包括结构固有频率、振型分析、结构动

力响应及计算方法。

以上六章内容基本属于线性有限元范畴。

第7章讨论非线性有限元的分类及它们的数值计算方法，为后继的各类非线性问题讨论奠定数学基础。

第8～11章分别讨论材料非线性、几何非线性、接触、摩擦的边界非线性和结构稳定性及后屈曲路径分析，这是本书的另一个重点——非线性有限元，也是本书的一个特色。

第12章简要介绍有限元的其他应用领域——非线性场问题。

第13章讨论不确定性模型的有限元法——随机有限元，它有别于前12章，这里仅提出一些离散化处理和随机有限元方法，为进一步深入研究和探索提供一种思路。

第14章进一步介绍有限元分析中影响到解的收敛性、可靠性和精度的几个必须注意的问题。

第15章对几种最常见有限元商用软件作了简单介绍，并进一步展望有限元的发展前景。

本书在部分章后面附有算例和习题，可供读者阅读和练习。

本书的第1、15章由清华大学庄茁教授编写，第3、4、10、11章由浙江大学陶伟明和郭乙木教授编写，其余各章由郭乙木教授编写。本书由郭乙木教授统稿。第1至6章由浙江大学丁皓江教授主审，第7至15章由清华大学姚振汉教授主审。

在编写过程中，浙江大学黄丹博士、王双连博士、楼铁炯博士和汪小芳硕士、姚永琪硕士等为本书的部分算例、习题的选择、计算和书稿的打印、绘图花费了大量精力和时间，作者向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，本书肯定还存在诸多不妥和需要改进之处，敬请读者批评指正。

作　　者

2003年5月

符 号 表

$\boldsymbol{A}$	矩阵运算中的过渡矩阵
$\boldsymbol{B}$	应变矩阵
$\boldsymbol{B}_{\mathrm{st}}$	应变矩阵子矩阵
$\boldsymbol{B}^{\mathrm{e}}$	单元应变矩阵
$\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}$	几何非线性问题的大位移应变矩阵
$\boldsymbol{C}$	结构阻尼矩阵
$\boldsymbol{c}$	单元阻尼矩阵
$\boldsymbol{D}$	本构方程中的系数矩阵
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}$	弹性矩阵
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{p}}$	塑性矩阵
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{ep}}$	弹塑性矩阵
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}$	切线矩阵
$\boldsymbol{E}$	格林应变张量
$\boldsymbol{E}_{ij}$	格林应变张量分量(其他同)
$\dot{\boldsymbol{E}}_{ij}$	格林应变速率,即格林应变张量对时间求物质导数。本书在符号上方加点均表示为对时间求物质导数。
E	弹性模量
$\boldsymbol{e}$	阿尔曼西应变张量
$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{e}}$	阿尔曼西应变本构速率
$\boldsymbol{F}$	本构等效节点力矢量
$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$	单元等效节点力矢量
f	屈服函数
G	切变模量
$\boldsymbol{G}$	计算中过渡矩阵
$\boldsymbol{H}$	计算中过渡矩阵
h	平面与板壳厚度
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
I_1,I_2,I_3	应力第一、第二、第三不变量
$\boldsymbol{J}$	雅可比矩阵
J_1,J_2,J_3	应力偏量的第一、第二、第三不变量
$\boldsymbol{K}$	结构刚度矩阵
$\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}}$	单元刚度矩阵
$\boldsymbol{k}_i^{\mathrm{e}}$	单元刚度矩阵子矩阵
k_{ij}^{e}	单元刚度矩阵元素
k	体积模量
$\boldsymbol{L}$	算子
L_1,L_2,L_3	面积坐标
$\boldsymbol{M}$	结构质量矩阵
$\boldsymbol{m}$	单元质量矩阵
M_x,M_y,M_z	在 xz,xy,yz 平面内的弯矩
N	轴向力
$\boldsymbol{N}$	单元形函数
$\boldsymbol{p}$	集中力
$\boldsymbol{p}_{\mathrm{s}}$	面力
$\boldsymbol{p}_{\mathrm{v}}$	体力
Q	水平集中力,剪力;流动法则中表示为塑性势
$\boldsymbol{S}$	线性有限元中为应变矩阵;材料非线性中表示为应力偏量。几何非线性中表示为克希霍夫应力张量
$\boldsymbol{s}_i$	应变子矩阵
s_1,s_2,s_3	材料非线性中的应力偏量分量
s_{ij}	几何非线性中的克希霍夫应力张量
$\boldsymbol{T}$	坐标转换矩阵
T	温度
U	应变能
$\boldsymbol{u}$	结构节点位移列阵
$\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}}$	单元节点位移列阵
$\boldsymbol{V}$	变形率张量
V	体积
v	速度
$\boldsymbol{W}$	外力功

u,v,w	连用 x,y,z 坐标方向的位移
$X,x;Y,y;Z,z$	坐标分量，在几何大变形中分别表示物质坐标和空间坐标分量
θ	转角；夹角
ψ	函数
δ_{ij}	克里斯托弗符号
$\boldsymbol{\varepsilon}$	柯西应变张量
ε_{ij}	柯西应变分量
κ	高斯曲率；塑性应变硬化参数
λ	特征值
μ	泊松比
ρ	密度
$\boldsymbol{\sigma}$	应力张量
$\boldsymbol{\tau}$	切应力
τ_{ij}	几何大变形中的欧拉应力张量分量
$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\tau}}$	焦曼应力速率张量
$\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}}$	屈斯德尔应力速率张量
ω	角速度
ξ,η,ζ	局部坐标分量
Δ	三角形单元面积
Π	应变能泛函
Π_{p}	势能泛函
$\boldsymbol{\Sigma}$	拉格朗日应力张量
Ω_{ij}	旋度张量分量
Ω_k	旋度矢量分量

目　　录

第1章　绪　论

1.1　有限元及其应用

在工程技术领域中，对于许多力学问题和场问题，人们已经得到了它们应遵循的基本方程和定解条件，但是能用解析方法求解的只是它们当中极少数，即方程比较简单，且几何形状相当规则、边界约束理想化的问题。而绝大多数工程技术问题往往由于某些特征是非线性的，或由于求解区域的几何形状复杂，则不可能得到解析的答案。这类问题的解决通常采用两种途径，一是引入简化假设，将方程、结构几何形状和边界条件简化，使达到能用解析法求解的地步。例如材料力学、结构力学和应用弹性力学介绍的内容就属于这一类，但是这种方法的应用只是在有限的情况下是可行的，因为过多的简化可能导致很大的误差。另一种途径是采用数值计算方法求得复杂工程实际问题的近似解，特别是近50年来，随着电子计算机的飞速发展和广泛应用，数值分析方法已成为求解科学技术和工程问题的主要工具。

数值分析方法发展至今基本上可以分为两类。一类是以有限差分法为代表，其特点是直接求解基本方程和相应定解条件的近似解，即首先将求解区域划分为网格，然后在网格的节点上用差分方程近似替代微分方程，进而求得网格节点上的近似解。如果网格节点较多时，近似解的精度可以得到改善。有限差分法能够求解某些相当复杂的问题，特别是流体流动问题，在流体力学领域它至今仍占支配地位。但必须看到有限差分法有很大的局限性，特别是用于几何形状复杂的问题，它的精度将会降低，甚至发生困难。

另一类数值分析方法是首先建立和原问题基本方程及相应定解条件相等效的积分方法，然后据此建立近似解法。例如加权残值法、最小二乘法、迦辽金（Galerkin）法、里兹法、力矩法等都属于这一类近似方法。如果原问题的方程具有某些特定的性质，则它的等效积分可以归结为某个泛函的变分。相应的近似解法实际上是求解泛函的极值或驻值问题。上述不同方法在不同的领域中有得到成功应用的实例，但由于它是在整个求解领域上假设近似函数，因此对几何形状复杂的问题仍然不可能给出具有相当精度要求的近似解。只有当有限元法的出现，才使这类数值分析方法获得重大突破，逐步发展成为一种独立的、新颖的且又十分有效的数值方法。

有限元法与上述数值近似解法的不同之处在于将求解区域看成由有限个力学单元互相连结而组成的集合体，并对力学单元给出假设的近似函数，这样表征单元力学特性的刚度矩阵可以比喻作建筑物中的砖瓦，装配在一起就能提供整个求解区域的力学特性。

有限元法作为处理固体力学问题的方法提出，可以追溯到 Courant[31]在 1943 年的工作，他第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小势能原理相结合来求解圣维南扭转问题。此后，一些应用数学家、物理学家和工程师源于各自工作的需要，都涉及过有限元概念的应用。有限元法第一个成功应用于弹性力学平面问题的是 Turner 和 Clough[44]等人 1956 年在分析飞机结构时所获得的成果，他们的研究为利用电子计算机求解复杂平面问题开创了新局面，几乎与此同时，中国科学院的冯康教授也独立地提出了类似的方法。1960 年 Clough[30]进一步处理了弹性力学平面问题，并第一次提出了“有限单元法”的名称，从此人们开始认识了有限单元法的功效。

40 多年来，有限元法的理论臻趋完善，应用得到迅速发展，几乎遍及所有的工程技术领域。有限元法能够迅速发展成为现代工业与工程技术密不可分的一个组成部分，除了依赖于现代工业化技术发展需要的大环境之外，有限元法本身具有的许多优点也吸引了大量的理论研究人员和应用工程技术人员。

它的主要优点有：

(1) 概念浅显，容易掌握，可以在不同理论层面上建立起对有限元法的理解，既可以通过非常直观的物理解释来理解，也可以建立基于严格的数学理论分析。

(2) 有很强的适用性，应用范围极其广泛。它不仅能成功地处理线性弹性力学问题、非均质材料、各向异性材料、非线性应力－应变关系、大变形问题、动力学问题以及复杂非线性边界条件等问题，而且随着其基本理论和方法的逐步完善和改进，能成功地用来求解如热传导、流体力学、电磁场等领域的各类线性、非线性问题。它几乎适用于求解所有的连续介质和场问题，以至于目前开始向纳米量级的分子动力学渗透。

(3) 有限元法采用矩阵形式表达，便于编制计算机软件。这样，不仅可以充分利用高速计算机所提供的方便，使问题得以快速求解，而且可以使求解问题的方法规范化、软件商业化，为有限元法推广和应用奠定了良好的基础。

虽然有限元法具有上述优点，但是对于有限元分析的初学者，以及应用和开发有限元软件的工程技术人员来说，必须了解和掌握有限元的基本概念和它的分析步骤。否则，有限元软件只是给你提供一个数值分析的黑匣子，使你面对软件中的许多选择或参数确定而感到束手无策、无所适从，甚至会使数值分析结果完全偏离工程实际，给出错误结论。本书的目的就是全面介绍有限元的理论和方

法，并按习惯分类，以线性有限元、非线性有限元、场问题和随机有限元的次序加以系统地全面阐述，最后简要介绍当前工程界常用有限元商用软件，了解不同近似算法的优劣，能正确处理在应用有限元时可能遇到的困难。同时，本书也足够详细地给出了各种列式和算法的实施过程，以便读者能够编程。

应用有限元分析实际工程问题，大致包含下列主要步骤：

（1）建立模型。

（2）推导各类有限元方程的列式。

（3）求解有限元方程组。

（4）数值结果表述。

对于需要系统掌握有限元理论的初学者，必须全面掌握上述4方面内容。而对仅使用有限元商用软件解决实际工程问题的技术人员，其主要工作体现在第1和第4项，而第2、3项可作大致了解，具体均是由有限元软件本身来完成。

有限元建模是应用有限元法解决工程问题的关键，直到20世纪80年代以前，人们重点关注基本单元的力学性能，尽可能使这些单元能与考察对象的结构部件力学性能一致，诸如平面单元、轴对称单元、梁单元、板壳单元等等，至今已多达近百种。而现在，建模目标已发展成为建立一个某一种工业产品的详细的设计模型，使其能适用于检验其产品的所有工业准则或标准。必须指出，这种建模形式的改变是有限元应用的一大发展与提高。例如，我们需要建立一个便携式计算机的有限元模型，必须进行跌落仿真动力分析、线性静力分析、热应力分析和使用寿命分析等等。针对上述的每一种分析要求，要确定相应的单元模型，这样每种分析的单元选择可能会不一样，建模将会十分复杂，成本很高；而后者一旦建模完成，后继工作将很方便，推广潜力也很大。本书作为教材，仍以介绍基本单元力学性能为主。只有掌握了这些基本知识，才能向更高层次的建模发展。

随着有限元应用的发展，不久将来，有限元模型可能成为“虚拟”的样品原型，在产品没有出世之前，已经能够全面地预测其性能。为了达到这一极具诱惑力的目标，除了必须具备相应工程知识外，还必须对有限元的基本理论和方法有透彻的理解，也就是说必须建立与实物一致的有限元模型，这不仅是简单的外形一致，而是内在性质的一致。模型的内在性质又必须建立在大量的试验基础之上，它有涉及试验数据如何转换为输入文件和这些文件在有限元分析中的地位和敏感程度，同时还必须清楚地意识到产生数值分析误差的根源，以及评估各种算法的限制和误差的影响量。这一切将对有限元建模提出更高的要求。

完成建模以后，另一个重要问题是有限元方程求解的各种方法和技巧。线性有限元比较简单，可以选择的方法相对较少，结果也较为稳定，但非线性问题就复杂多了，可能对于同样一个有限元模型，选择不同算法、甚至不同步长，会给出完全不同的结果。

本书为适应教学需要，我们将紧密结合以后各章的讨论，对有限元分析的几个重要问题加以介绍。它们是：

(1) 如何构造各种类型的单元，以及它们的优劣。

(2) 对于要解决的问题，如何选择近似的方法。

(3) 对于给定的问题，如何选择合适的网格描述方式。

(4) 如何检验结果和求解过程的稳定性。

(5) 如何认识模型的平滑响应以及所隐含的求解质量和困难。

有限元法的基本理论经过40多年的发展，已基本趋于完善。但它在应用科学和工程技术领域中的应用还方兴未艾，随着推广和应用的深入有待于解决的问题会不断显现出来。因此有限元分析中尚存在许多极有兴趣的机遇和挑战。所有这些不可能在本书中一一阐述，只能给出一个轮廓，如接触-碰撞、随机有限元等，只起到抛砖引玉的作用。

1.2 非线性有限元的有关的著作作者和简要历史

有限元法自正式命名40多年以来，获得迅猛的发展，代表这些发展是一批具有影响力的论著。为了使读者能了解有限元的发展过程，便于参考阅读，这里将国际上著名的代表性著作简要列举。就非线性有限元分析的著作的作者而言，国际上有 Oden (1972)，Crisfield (1991)，Kleiber (1989) 和 Zhong (1993)。特别值得注意的是 Oden 的书，因为它是固体和结构非线性有限元分析的先驱著作。最近的著作的作者有 Simo 和 Hughes (1998)，Bonet 和 Wood (1997)。其他还有一些作者也对非线性分析作出了贡献，它们是 Belytschko 和 Hughes (1983)，Zienkiewicz 和 Taylor (1991)，Bathe (1996)，以及 Cook、Malkus 和 Plesha (1989)。对于非线性有限元分析，这些书提供了有益的入门指南。作为姐妹篇，线性有限元分析的论述更是不胜枚举，内容最全面的著作是 Hughes (1987)，Zienkiewicz 和 Taylor (1991)。

下面我们回顾有限元方法和相关软件的简单历史。在这个信息-计算机时代，像许多其他方面的进步一样，在有限元分析中，软件往往比文献更能代表其最新的进展。

有限元方法有多种溯源。通过美国波音研究组的工作和 Turner、Clough、Martin 和 Topp (1956) 的著名文章，使线性有限元分析得以闻名。这使许多工程师非常清楚地认识到有限元法提供了一种处理复杂形状真实问题的可能性，于是他们开始扩展有限元的功能。

20世纪60年代，美国 Ed Wilson 发布了第一个可供科学研究和工程应用的有限元程序。随后，更多的类似的程序开始在世界上不同的实验室里使用。它们

的共同特点是没有命名。第一个正式命名的线性有限元程序是由 Berkeley 开发的 SAP (Structural Analysis Program)，它也是最早引入我国的一个线性有限元程序，凡是我国早期从事有限元研究和应用的科技人员都对它比较熟悉，其中不少人还进行了深入研究，这对我国有限元技术的发展和工程应用曾经发挥了巨大的促进作用。此后，Berkeley 的工作进一步深入，完成了非线性有限元程序 NON-SAP，它主要采用隐式积分进行平衡叠代解和瞬时问题的求解。

第一批非线性有限元方法论文的主要贡献者有 Argyris (1965) 以及 Marcal 和 King (1967)。由于他们的引导，使国际上关于非线性有限元问题探索的论文激增，与其相伴的有限元软件也随之诞生。当时在 Brown 大学任教的 Pedro Marcal，为了使第一个非线性商业有限元程序进入市场，于 1969 年建立了一个公司，程序命名为 MARC，至今它仍然是国际上非线性有限元的主要软件。大约在同一时期，John Swanson 为了核能应用在 Westinghouse 开发了一个非线性有限元软件，后来被命名为 ANSYS。MARC 和 ANSYS 是目前国内进行非线性有限元分析的主流软件。

在早期的商用软件舞台上，另外两个主要人物是 David Hibbitt 和 Klaus-Jürgen Bathe。Hibbitt，Pedro Marcal 与人合作建立了 HKS 公司，使 ABAQUS 商用软件进入了市场。该程序增设了窗口平台，使软件用户能按需增加单元和材料的性能模块，这极大地扩充了软件的功能，它是具有这一功能的早期有限元程序之一，这对软件行业是一个实质性的冲击。Jürgen Bathe 是 Ed Wilson 指导下在 Berkeley 获得博士学位的，不久之后开始在 MIT 任教，这期间公布了他的程序，它是 NONSAP 软件的派生产品，称为 ADINA。ADINA 也是最早进入我国的非线性有限元程序，曾经在国内具有极大的影响力。

当代非线性软件的另一个分支是采用显式积分的非线性有限元程序，这方面 DOE 实验室是最早进行的。早在 1964 年，Wilkins 开发了命名为 hydro-codes 的显式积分非线性有限元软件。继后，Costantino 在芝加哥的 IIT 研究院实现了由带状刚度矩阵乘以节点位移计算内部的节点力的技术。1969 年，研究人员开发了著名的单元乘单元的技术，节点力的计算不必应用刚度矩阵，定名为 SAM-SON 的二维有限元程序也由此产生。到 1972 年，该程序功能扩展至结构的完全非线性三维瞬态分析，称为 WRECKER。这一工作使人们在 70 年代初期就预言汽车的碰撞试验可能被仿真所代替。而在 Argonne，由 Belytschko 发展的显式程序被移植应用在核安全工业上，其程序命名为 SADCAT 和 WHAMS。

1975 年，在 Sandia 的 Sam Key 完成了 HONDO，该程序采取具有单元乘单元功能的显式算法，可用于材料非线性和几何非线性问题分析。Northwestern 大学的 Dennis Flanagan 将该程序进一步充实、完善后，命名为 PRONTO。

显式有限元程序发展的里程碑来自于 Lawrence Livermore 实验室的 John