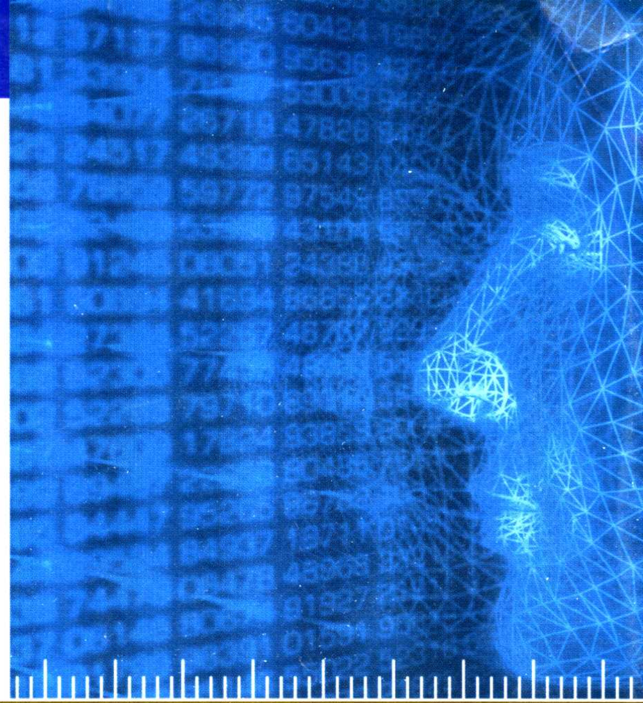
有限元技术丛书

FINITE ELEMENT

The finite element method is a numerical method for solving problems of engineering and mathematical physics. Typical problem areas of interest in engineering and mathematical physics that are solvable by use of the finite element method include structural analysis, heat transfer, fluid flow, mass transport, and electromagnetic potential.



有限元方法基础教程

（第三版）

A First Course in the Finite Element Method, Third Edition

[美] Daryl L. Logan 著

伍义生 吴永礼 等译

THOMSON

PHEI

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
http://www.phei.com.cn

有限元技术丛书

有限元方法基础教程
(第三版)

A First Course in the Finite Element Method
Third Edition

[美]Daryl L. Logan 著

伍义生　吴永礼　等译

電子工業出版社·
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

有限元方法是一种解决工程与数学物理问题的数值方法。本书提供了一种学习有限元的简单方法，使大学生和研究生能在无需通常所要求的前提条件下（如结构分析），就能学习有限元方法，而这些前提条件是该领域大多数教材所必需的。内容涉及了简单的弹簧和杆、梁的弯曲、平面应力/应变、轴对称、等参公式、三维应力、板的弯曲、热传导和流体质量传送、基本流体力学、热应力、与时间相关的应力和热传导等，并由此引出有限元分析的高级课题。此外，还讲解了直接刚度法、最小势能原理、伽辽金法等基本力学分析方法，以及矩阵代数、弹性基本理论和虚功原理等力学基本理论。特点是由浅入深，从基本课题到高级课题，概念清楚，明白易懂。

全书中示例多达70多个，并有丰富的练习，以加强读者对概念的理解。本书是为土木和机械工程专业的大学生及研究生写的一本教科书，也是一本学习应力分析和热传导的基本工具书。由于本书所讲的各种概念以非常简单的形式给出，对其他背景的学生和实际工程技术人员也大有帮助。

Daryl L. Logan
A First Course in the Finite Element Method, Third Edition
EISBN: 0-534-38517-6

981-243-955-2

版权合同登记号：图字：01-2002-5608号

图书在版编目（CIP）数据

有限元方法基础教程：第三版/（美）洛根（Logan, D. L.）著；伍义生等译. -北京：电子工业出版社，2003.8
（有限元技术丛书）
书名原文：A First Course in the Finite Element Method，Third Edition
ISBN 7-5053-9022-8
I. 有… II. ①洛… ②伍… III. 有限元法-教材 IV. O242.21

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第071495号

责任编辑：谭海平
印 刷 者：北京兴华印刷厂
出版发行：电子工业出版社 http://www.phei.com.cn
北京市海淀区万寿路173信箱 邮编：100036
经 销：各地新华书店
开 本：787 × 1092 1/16 印张：35.25 字数：880千字
版 次：2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷
定 价：55.00元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换；若书店售缺，请与本社发行部联系。联系电话：（010）68279077

译 者 序

自20世纪60年代末70年代初有限元方法引入中国以来,有限元方法的理论研究和实际应用在我国科学工作者和工程技术人员中得到了广泛关注。除了一大批理论成果外,有限元方法在航空航天工程、机械工程、建筑工程、海洋工程、地质工程、生物力学工程等诸多方面得到了广泛应用。除了我国科学技术工作者自己编写的一大批针对各自问题的专用有限元计算程序外,我国还引进了若干大型的通用有限元计算程序,如开始时的SAP5,后来又有ANSYS、NASTRAN、ABACUS等。有限元方法已成为解决工程实际问题必不可少的工具,且有限元方法已成为工科院校学生必修的课程。有限元方法虽然已很流行,但是对于初次接触有限元的大学生、研究生和广大的工程技术人员来说,有限元方法仍然有些神秘和高深莫测。

Daryl L. Logan的这本教程使有限元这一高深的课题变得通俗易懂。同时许多高深的力学原理,如最小势能原理、变分原理、虚功原理、功的互等原理、迦辽金残余法等,经过本书讲解后也变得通俗易懂,并能学会直接应用。本书还给出矩阵代数、联立方程求解、弹性理论方程、虚功原理等基本理论。因此我们认为这本书对工科学生、研究生和想了解有限元技术的工程技术人员会大有帮助。

本书前言、封底、第1章至第7章由伍义生研究员翻译,第8章至第16章及附录由吴永礼研究员翻译,此外郭拓荒、伍磊、栗彦、许秀珍、杨冬梅还参加了部分翻译、录入、排版、校对等工作。

前　言

本书第三版的目的仍是提供一个简单的、基本的学习有限元方法的方法，使大学生和研究生在无需通常所要求的前提条件下(如结构分析)就能学习有限元方法，而这些前提条件是该领域大多数教材所需要的。此书主要是为土木和机械工程的大学生写的，作为学习应力分析和热传导的基本学习工具。然而，由于各种概念是以非常简单的形式给出的，此书对其他背景的学生和实际工程人员也大有帮助。该书适合那些想把有限元应用于解决实际物理问题的各类人员。

每一个课题先给出一般原理，然后给出这些原理的传统应用，在适宜的地方再给出计算机应用。用这种方法说明大型问题计算机分析所使用的概念。

此书的叙述是从基本课题到高级课题，并适合于用在双课程教学。处理的基本课题包括：(1)简单的弹簧和杆，引向二维和三维桁架分析。(2)梁的弯曲，引向平面框架和格架分析及空间框架分析。(3)基本平面应力/应变单元，引向更高级的平面应力/应变单元。(4) 轴对称应力。(5)有限元方法的等参公式。(6)三维应力。(7)板的弯曲。(8)热传导和流体质量传送。(9)基本流体力学。(10)热应力。(11)与时间有关的应力和热传导。

此书的其他特点是，包括了如何处理倾斜支撑、有节点铰接的梁单元、空间任意位置的梁单元和子结构分析概念。

按照需要在不同阶段引入了直接刚度法、最小势能原理、伽辽金残余法，以建立分析所需要的方程。

附录包括：(1)在整书中所用的矩阵代数。(2)联立方程求解方法。(3)弹性基本理论。(4)平衡节点力。(5)虚功原理。

全书中有 70 多个例子。这些例子是用普通方法求解的，以便说明概念。每章后面给出 300 多个问题以增强概念。在书的后面给出了大多数问题的答案。每章后面计算机求解的问题用一个计算机符号标明。

此版的新特点包括：增加了关于板弯曲、建模附加信息、结果解释、有限元解与分析解比较的章节，在第 3 章、第 5 章、第 7 章、第 11 章和第 12 章增加了设计类型问题。这一版故意略去了特殊目的的计算机程序，建议教师选择他们熟悉的程序。

建议选择以下课题作为初级课程(大约 44 节课，每课 50 分钟)。

课题	课时数
附录 A	1
附录 B	1
第 1 章	2
第 2 章	3
第 3 章，3.1 节 ~ 3.11 节	5
例 1	1
第 4 章，4.1 节 ~ 4.6 节	4

（续表）

课题	课时数
第 5 章,5.1 节 ~ 5.3 节,5.7 节	4
第 6 章	4
第 7 章	3
例 2	1
第 9 章	3
第 10 章	3
第 11 章	3
第 13 章 ,13.1 节 ~ 13.6 节,13.9 节	5
例 3	1

此处概括的课题可用于土木工程和机械工程大学生和研究生第一学期的课程。如果需要强调总体应力分析,第 3 章的内容可以用第 8 章、第 12 章或第 15 章、第 16 章的部分内容代替。本书的其他内容可以在第二学期完成,在第二学期教师还可提供其他附加材料。

我非常感谢 Brooks/Cole 出版公司的职员,特别是 Bill Stenquist 和 Shelley Gesicki,还有 Merrill Peterson 在完成该书此版中所给与的帮助。

我非常感谢 Ted Belytschko 出色地教授有限元方法,给我写此书很大帮助。我还要感谢很多学生做的学习笔记,这些笔记写进了该书。我要特别感谢 Ron Cenfetelli、Barry Davignon、Konstantions Kariotis、Howard Koswora、Hidajat Harintho、Hari Salemganesan、Joe Keswari、Yanping Lu 和 Khailan Zhang 核对和解答本书前两版中的问题,并为我的大学学生提出建议,使本书的课题容易理解。

最后,我要特别感谢我的家人 Diane、Kathy、Daryl Jr. 和 Paul,感谢他们在我写作此书时所做出的牺牲。

符　　号

英语符号

a_i	广义坐标(表示一般形式位移所用的系数)
A	横截面积
$\underline{B}$	联系应变与节点位移的矩阵,或联系温度梯度与节点温度的矩阵
c	材料的比热
$\underline{C}'$	联系应力与节点位移的矩阵
C	二维中的方向余弦
C_x, C_y, C_z	三维中的方向余弦
$\underline{d}$	总体坐标中单元和结构的节点位移矩阵
$\underline{\hat{d}}$	局部坐标中单元的节点位移矩阵
D	板的弯曲刚度
$\underline{D}$	联系应力与应变的矩阵
e	指数函数
E	弹性模量
$\underline{f}$	总体坐标节点力矩阵
$\underline{\hat{f}}$	局部坐标单元节点力矩阵
$\underline{f}_b$	体力矩阵
$\underline{f}_h$	热传导力矩阵
$\underline{f}_q$	热流动力矩阵
$\underline{f}_Q$	热源力矩阵
$\underline{f}_s$	表面力矩阵
$\underline{F}$	总体坐标结构力矩阵
$\underline{F}_c$	凝聚力矩阵
$\underline{F}_i$	总体节点力
$\underline{F}_0$	等价力矩阵
$\underline{g}$	温度梯度矩阵或液压梯度矩阵
G	剪切模量
h	热传递(或对流)系数
i, j, m	三角单元节点

I	主惯性矩
$\underline{J}$	雅可比矩阵
k	弹簧刚度
$\underline{k}$	总体坐标单元刚度或传导矩阵
$\underline{k}_c$	凝聚刚度矩阵或热传递问题中刚度矩阵的传导部分
$\underline{\hat{k}}$	局部坐标单元刚度矩阵
$\underline{k}_h$	热传递问题中刚度矩阵的对流部分
$\underline{K}$	总体坐标结构刚度矩阵
K_{xx}, K_{yy}	在 x 方向和 y 方向各自的热传导性(或流体力学中的渗透性)
L	杆单元或梁单元长度
m	单元节点号的最大差别
$m(x)$	广义力矩表达式
m_x, m_y, m_{xy}	板中力距
$\underline{\hat{m}}$	局部质量矩阵
$\hat{m}_i$	局部节点弯矩
$\underline{M}$	总体质量矩阵
$\underline{M}^*$	用于联系线应变三角元公式中位移与广义坐标的矩阵
$\underline{M}'$	用于联系线应变三角元公式中应变与广义坐标的矩阵
n_b	结构带宽
n_d	每一节点的自由度数
$\underline{N}$	形(内推或基础)函数矩阵
N_i	形函数
p	表面压力(或流体力学中节点压力头)
p_r, p_z	分别为径向和轴向(纵向)压力
P	集中荷载
$\underline{\hat{P}}$	集中荷载力矩阵
q	单位面积的热流或板上的分布荷载
$\overline{q}$	热流率
q^*	在边界面上单位面积热流
Q	每单位体积产生的热源或内部热源
Q^*	线热源或点热源
Q_x, Q_y	在板上的横向剪切线荷载
r, θ, z	分别为径向、周向和轴向坐标
R	伽辽金积分中的残余
R_b	径向体力
R_{ix}, R_{iy}	分别为 x 方向和 y 方向的节点反力
s, t, z'	附在等参元上的自然坐标
s	表面面积

t	平面单元或平板单元的厚度
t_i, t_j, t_m	三角单元节点温度
T	温度函数
T_∞	无流温度
$\underline{T}$	位移、力和刚度转换矩阵
$\underline{T}_i$	方向的表面拉力矩阵
u, v, w	分别为 x、y 和 z 方向的位移函数
U	应变能
ΔU	存储能的改变
ν	流体流动速度
$\hat{V}$	梁中的剪力
w	作用在梁上的分布荷载,或沿平面单元边缘作用的分布荷载
W	功
x_i, y_i, z_i	分别为 x、y 和 z 方向的节点坐标
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	局部单元坐标轴
x, y, z	结构总体或参照坐标轴
$\underline{X}$	体力矩阵
X_b, Y_b	分别为 x 和 y 方向的体力
Z_b	纵向体力(轴对称情况)或 z 向体力(三维情况)

希腊符号

α	热膨胀系数
$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$	用于表达方程(6.2.10)和方程(11.2.5)~方程(11.2.8)定义的形状函数
δ	弹簧或杆的变形
ε	法向应变
$\underline{\varepsilon}_T$	热应变矩阵
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	板弯曲曲率
v	泊松比
ϕ_i	梁单元节点转动角度或斜率
π_p	总势能
π_h	热传导问题泛函
ρ	材料质量密度
ρ_w	材料重量密度
ω	角速度
Ω	力的势能
ϕ	流体压力头或势能
σ	法向应力

$\underline{\sigma}_T$	热应力矩阵
τ	剪切应力
θ	二维问题 x 轴与局部 $\hat{x}$ 轴之间的夹角
θ_P	主轴方向角
$\theta_x,\theta_y,\theta_z$	分别为总体 x、y、z 轴与 $\hat{x}$ 局部轴之间的夹角，或在一个平面内绕 x 和 y 轴的转动
$\underline{\Psi}$	广义位移函数矩阵

其他符号

$\dfrac{d()}{dx}$	一个变量对 x 取导数
dt	时间微分
$(\dot{\ })$	一个变量上方的点表示对时间取微分
[ ]	表示矩形或方形矩阵
{ }	表示列矩形
(_)	一个变量下面的横线表示一个矩阵
$(\hat{\ })$	一个变量上面加一个帽子表示该变量是在局部坐标中描述的
$[\ ]^{-1}$	表示矩阵求逆
$[\ ]^T$	表示矩阵转置
$\dfrac{\partial()}{\partial x}$	对 x 取偏微分
$\dfrac{\partial()}{\partial\{d\}}$	对 $\{d\}$ 中每一变量取偏微分
■	表示例题的求解结束

目　　录

第1章 序　　言

有限元方法是解决工程和数学物理问题的数值方法。可用有限元方法解决的有关工程和数学领域内的典型问题包括结构分析、热传导、流体流动、质量传输和电磁电位。

涉及复杂几何形状、荷载和材料特性的问题通常不能得到解析形式的数学解答。由数学表达给出的解析形式的解答得出物体内(此处为总体结构或有关的物理系统)任何位置所要求的未知量的数值,因此对于物理中的无限多个位置都是可靠的。这些解析解通常要求解常微分方程或偏微分方程,由于复杂的几何形状、荷载和材料特性通常得不到解析解,因此我们需要依靠数值方法,如有限元方法得出可以接受的解答。用有限元方法求解一个问题是要求解联立代数方程组,而不是解微分方程。这些数值解给出连续体中多个离散点的未知量的近似值。因此模拟物体的过程是将一个物体划分成由小的物体或单元(有限元)组成的等价系统,这些单元通常与两个或更多的单位(节点)相互连接,或与边界线或表面相互连接,这个过程叫做离散化。在有限元方法中,代替一次求解整个物体,建立每一个有限单元的方程,并组合这些方程得出整个物体的解答。

简言之,结构问题的求解通常是指确定每个节点的位移和构成承载结构的每个单元内的应力。在非结构问题中,节点未知量可以是热流或流体流动产生的温度或流体压力。

本章首先给出有限元方法发展的简短历史。从此历史叙述中可以看到,此方法仅在过去40年间才成为解决工程问题的实际方法(这与现代高速电子数字计算机的发展有关)。

在简短历史叙述过后,将介绍矩阵运算符号。然后将说明建立求解方程中为什么需要矩阵方法(由于现代数字计算机的发展使该方法变得实际可行)。这一节将说明数字计算机在解与复杂问题相关的大型联立代数方程中的作用,还将说明基于有限元方法的数值计算机程序的发展。然后给出求解问题所包含步骤的总体说明。该说明包括讨论用有限元方法求解所用的单元类型。然后给出各种典型的应用实例说明用这种方法求解问题的能力,如复杂的几何形状、几种不同的材料和不规则荷载等复杂问题。第1章还引出了用有限元方法求解工程和数学物理问题的某些优点。最后给出基于有限元方法的计算机程序的数值特征。

1.1 简短历史

本节给出有限元方法的简短历史,即按照它在结构和非结构的工程领域的应用,也按照它在数学物理中的应用加以叙述。此处引用的参考文献目的在于加强此简短的历史背景介绍,Hrennikoff[1]于1941年,McHenry[2]于1943年用线(一维)单元(杆和梁)网格求解连续体中的应力,从而在20世纪40年代开始了有限元方法的现代发展。Courant[3]1943年发表了一篇文章,提出设置变分形式的应力解,但很多年间没有得到广泛的承认。后来他在构成整个区域的三角形分区上引进分段插入函数或形函数,将此作为一种得到近似数值解的方法。Levy[4]1947年建立柔度法或力法,他在1953年的著作[5]中提出另一种方法(刚度法或位移位)可能是有前途的一种,可用来分析静不定飞机结构。然而,他们的方程太难处理了,无法手工求解,

因此只有随着高速数字计算机的发展,这种方法才变得普遍起来。

Argyris 和 Kelsey[6,7]1954 年利用能量原理建立了矩阵结构分析方法。此发展说明能量原理在有限元方法中起着重要的作用。

Turner 等人[8]1956 年首次处理二维单元。他们推导了杆单元、梁单元、平面应力二维三角单元和矩形单元的刚度矩阵,并概括了通常叫做直接刚度法的过程,以得出总体刚度矩阵的步骤。随着 20 世纪 50 年代早期高速数字计算机的发展,Turner 等人[8]的工作促进了用矩阵符号表示的有限元刚度方程的进一步发展。Clough[9]1960 年在用三角单元和矩形单元进行平面应力分析时引进了"有限元"习惯用语。

Melosh[10]1961 年建立了平面矩形板弯曲单元刚度矩阵。随后 Grafton 和 Strome[11]1963 年建立了轴对称壳和压力容器的曲面壳弯曲单元刚度矩阵。

Martin[12]于 1961 年,Gallagher 等人[13]于 1962 年,Melosh[14]于 1963 年用建立四面体刚度矩阵的方法将有限元方法延伸到三维问题。Argyris[15]1964 年研究了其他的三维单元。Clough 和 Rashid[16],Wilson[17]1965 年考虑了非轴对称固体的特例。

20 世纪 60 年代早期以前,大多数有限元工作是处理小应变、小位移、弹性材料和静荷载。然而,Turner 等人[18]1960 年考虑了大挠度和热应力分析,Gallagher 等人[13]1962 年考虑了材料非线性,Gallagher 和 Padlog[19]1963 年还首次处理了屈曲问题。Zienkiewicz 等人[20]1968 年将有限元方法扩充到粘弹性问题。

Archer[21]1965 年在建立一致质量矩阵中考虑了动力分析,用于分析分布质量系统,如结构分析中的杆和梁。

Melosh[14]1963 年认识到有限元方法可以借助变分公式建立,有限元方法开始用于解非结构应用问题。Zienkiewicz 和 Cheung[22]1965 年,Martin[23]1968 年,Wilson 和 Nickel[24]1966 年求解场问题,如确定轴的扭转、流体流动和热传导。

由于加权残余法的适应性使有限元方法得以进一步扩展,Szabo 和 Lee[25]1969 年首先推导了从前已知的用于结构分析的弹性方程,然后 Zienkiewicz 和 Parekh[26]1970 年推导了用于瞬态场问题的方程。就是从这时开始认识到,当直接公式和变分公式难以或不可能使用时,加权残余法常常是适当的。例如,Lyness 等人[27]1977 年将加权残余法用于确定磁场。

Belytschko[28,29]1976 年考虑了与大位移非线性动力特性有关的问题,并改进了求解得出的方程组的数值技术。

有限元方法一个相当新的应用领域是生物工程领域[30,31]。这个领域仍然被非线性材料、几何非线性和其他尚待发现的复杂问题等造成的困难所困扰。

从 20 世纪 50 年代早期到现在,应用有限元方法解决复杂的工程问题已取得了巨大的进展。工程师、应用数学家和其他科学家将毫无疑问会建立新的应用领域。有关有限元方法的广泛书目请参阅 Kardestuncer[32]、Clough[33]或 Noor[54]的著作。

1.2 矩阵符号介绍

矩阵法是有限元方法使用的必要工具,为的是简化单元刚度方程公式,笔算求解各种问题,更重要的是用于高速电子数字计算机的编程。因此矩阵符号代表了用于书写和求解联立代数方程组的简单和容易使用的记号。