

中學叢書

新解析幾何

錢 介 福 譯

龍門聯合書局出版

中學叢書

新解析幾何

錢介福譯

龍門聯合書局出版

本書從 Smith, Gale and Neelley 的 "New Analytic Geometry" 譯出。第一章列出參考公式與表,第二至十二章敘述笛卡兒坐標、直線、圓、二次曲線、坐標變換、切線和法線、極坐標、超越曲線、參數方程式、脈及經驗方程式等,第十三至十七章扼要說明立體解析幾何。本書可供高級中學作教本或參考書之用。

新 解 析 幾 何

Smith, Gale, Neelley 原著

錢 介 福 譯

★版權所有★

龍 門 聯 合 書 局 出 版

上海市書刊出版業營業許可證出 029 號

上海茂名北路 300 弄 3 號

新 華 書 店 總 經 售

信 大 印 刷 所 印 刷

上海淮安路 1 弄 14 號

開本: 787×1092 1/32 印數: 22,701-24,700 冊

印張: 10 1/2

1949 年 5 月第一版

字數: 207,000

1955 年 7 月第十三次印刷

定價: (9) 一元

原 序

於此修正版中著者曾企圖保持爲多數教師所稱許之特質且進而藉經驗以求其更形完善。本書之主旨無甚改變，添加之少數論題當可增加學者之興趣，而改變之處，均已重新編排，使本書有更一貫之發展，而於適當之時機引入較新奇及較困難之各論題。

著者敢請注意本書初版中之新材料今已成爲標準，而今之解析幾何學一課程已必然將超越曲線，參數方程式，脈 (graph)，及經驗方程式諸章列入。

多數教師主張立體解析幾何學之課程宜稍爲簡短，本篇係依照此一主張而編制者，但亦有教師欲令此一課程較爲詳盡，以作爲學習微積分學之準備，則其必需之材料亦已包含在內。

全部問題均已校訂。有冠以“選作問題”標題者，以之爲一般作業，通常均嫌太難，故僅爲優異學生而設，使多磨練之機會。

目 次

第一章 參考公式與表

1. 幾何學代數學及三角學之公式.....	1
2. 眞值。特殊角.....	4
3. 三角函數之符號規則.....	4
4. 三角函數之眞值.....	5
5. 希臘字母.....	5

第二章 笛卡兒坐標

6. 解析幾何學.....	6
7. 笛卡兒直角坐標。斜坐標.....	6
8. 有向直線.....	9
9. 長.....	10
10. 依已知比分一線段之點.....	11
11. 幾何學定理上之應用.....	13
12. 斜角與斜率.....	15
13. 平行線或垂直線之檢驗法.....	17
14. 角之公式.....	18

15. 面積·····	20
-------------	----

第三章 曲線與方程式

16. 曲線之方程式(點之軌跡)·····	25
17. 方程式之軌跡·····	28
18. 方程式之討論·····	31
19. 摘要·····	35
20. 水平及垂直漸近線·····	39
21. 交點·····	42

第四章 直線

22. 任意直線方程式之次數·····	46
23. 任意一次方程式之軌跡·····	46
24. 描直線. 定理. 用因子分解法作圖·····	48
25. 點斜式·····	51
26. 二點式·····	51
27. 截距式·····	52
28. 三直線相交於一點之條件·····	52
29. 直線之法線方程式·····	55
30. 化爲法線式·····	56
31. 自直線至一點之垂直距離·····	59
32. 直線系·····	63
33. 通過二已知線之交點之直線系·····	66

第五章 圓

34. 圓之方程式.....	70
35. 圓之檢驗法	71
36. 三條件決定一圓.....	72
37. 根軸.....	77
38. 切距.....	78
39. 圓系.....	80

第六章 拋物線橢圓及雙曲線

40. 拋物線.....	83
41. 拋物線之作圖法.....	85
42. 拋物拱.....	85
43. 描拋物線.....	87
44. 橢圓.....	88
45. 橢圓之作圖法.....	91
46. 描橢圓.....	93
47. 特例.....	93
48. 雙曲線.....	95
49. 雙曲線之作圖法.....	98
50. 描雙曲線.....	98
51. 共軛雙曲線與漸近線.....	100
52. 等軸雙曲線或直角雙曲線.....	103

53. 摘要	103
54. 割錐線	104
55. 二次曲線系	104

第七章 坐標之變換

56. 引論	107
57. 平移	107
58. 用平移化簡方程式	109
59. 定理	112
60. 割錐線之特徵方程式	113
61. 旋轉	115
62. 用旋轉化簡方程式	116
63. 任意二次方程式之軌跡	119
64. 描二次方程式之軌跡	121
65. 一特例。等軸(直角)雙曲線。等軸雙曲線之作圖法	126
66. 割錐線(錐線)之另一定義	128
67. 一般之坐標變換	129
68. 軌跡之分類	129

第八章 切線

69. 切線之方程式	131
70. 一般定理	133
71. 法線之方程式	135

72. 次切距及次法距	135
73. 斜率已知之切線	137
74. 通過曲線外一點之切線	137
75. 已知斜率之切線公式	139
76. 錐線之切線及法線之性質	142

第九章 極坐標

77. 極坐標	146
78. 描極標方程式之軌跡	147
79. 迅速描出極標方程式之軌跡	151
80. 直角坐標與極坐標之關係	153
81. 應用. 直線及圓	155
82. 錐線之極標方程式	157
83. 交點	158
84. 用極坐標求軌跡	160

第十章 超越曲線

85. 自然對數. 指數曲線及對數曲線	164
86. 正弦曲線	169
87. 週期性	171
88. 描正弦曲線	172
89. 其他三角曲線	174
90. 縱標之加法	177

91. 境界曲線·····	179
---------------	-----

第十一章 參數方程式與軌跡

92. 描參數方程式之軌跡·····	183
93. 由參數方程式求直角坐標方程式·····	184
94. 同一曲線之各種參數方程式·····	186
95. 用參數方程式解軌跡問題·····	189
96. 對應線交點之軌跡·····	195
97. 錐線之直徑·····	198

第十二章 函數與脈及經驗方程式

98. 函數。函數之記法·····	202
99. 函數之脈。簡單函數之例·····	202
100. 函數之立式及圖解·····	206
101. 經驗函數·····	209
102. 直線定律·····	209
103. 平均法·····	210
104. 上例之註釋·····	211
105. 含二常數之定律·····	214
106. 冪定理·····	214
107. 指數定律及雙曲線定律·····	217
108. 拋物線定律·····	221
109. 平均法應用於一般拋物線定律·····	223

110. 代數方程式圖解法	225
111. 超越方程式圖解法	228

第十三章 空間笛卡兒坐標

112. 笛卡兒坐標	231
113. 重要關係	232
114. 直線之方向餘弦	234
115. 直線之方向數	235
116. 長	237
117. 二有向直線間之角	238
118. 平行線或垂直線之檢驗法	239
119. 依已知比分一線段之點	239
120. 空間之軌跡	243
121. 曲面之方程式	243
122. 曲線之方程式	244
123. 方程式之軌跡，聯立二方程式之軌跡	244

第十四章 空間之平面與直線

124. 平面方程式之法線式	247
125. 任意一次方程式之軌跡，化爲法線式	248
126. 特殊平面	250
127. 平面之截距及跡	250
128. 二平面間之角	253

129. 三條件決定一平面·····	254
130. 平面方程式之截距式·····	255
131. 自平面至一點之垂直距離·····	257
132. 平面系·····	260
133. 直線之一般方程式·····	263
134. 直線方程式之各種形式·····	266
135. 直線之射影平面，射影式·····	267
136. 直線與平面之相對位置·····	271

第十五章 特殊曲面

137. 球·····	276
138. 柱·····	279
139. 錐·····	280
140. 曲面方程式之討論·····	282
141. 二次曲面·····	286
142. 橢圓面·····	286
143. 單葉雙曲面·····	287
144. 雙葉雙曲面·····	289
145. 橢圓拋物面·····	291
146. 雙曲拋物面·····	292

第十六章 空間幾何學之補充教材

147. 迴轉曲面·····	295
----------------	-----

148. 直紋曲面·····	297
149. 直紋二次曲面. 直母線·····	299
150. 素線傾斜於軸之柱·····	300
151. 一曲線之射影柱·····	301
152. 空間曲線之參數方程式·····	305

第十七章 坐標之變換 不同之坐標系

153. 軸之平移·····	308
154. 軸之旋轉·····	308
155. 含 x, y 及 z 之二次方程式之軌跡·····	311
156. 含三變數之一般二次方程式之化簡·····	312
157. 極坐標·····	314
158. 球面坐標·····	315
159. 柱面坐標·····	315
索引·····	319

新 解 析 幾 何

第一章 參考公式與表

1. 下列幾何學，代數學及三角學中已證明之公式與定理在以後各章中時需應用。

幾何學

1. 於公式中， r 表半徑， a 表高， B 表底面積，而 s 表斜高。

[圓] 圓周 $= 2\pi r$ ，圓面積 $= \pi r^2$ 。

[稜柱] 體積 $= Ba$ 。

[角錐] 體積 $= \frac{1}{3} Ba$ 。

[直立圓柱] 體積 $= \pi r^2 a$ ，側面積 $= 2\pi ra$ ，總面積 $= 2\pi r(r+a)$ 。

[直立圓錐] 體積 $= \frac{1}{3} \pi r^2 a$ ，側面積 $= \pi rs$ ，總面積 $= \pi r(r+s)$ 。

[球] 體積 $= \frac{4}{3} \pi r^3$ ，面積 $= 4\pi r^2$ 。

代數學

2. 二次方程式。 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 。

[解法] a. 因子分解法：分解 $Ax^2 + Bx + C$ 為二因子，使各等於零，再解 x 。

b. 配平方法：移 C 項，以 x^2 之係數除各項，兩端加 x 係數之半之平方，再求其平方根。

c. 公式法：用公式 $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ 。

[根之性質] 公式中根號下之式 $B^2 - 4AC$ 稱為判別式。此式為正，則二根為不相等實根。此式為零，則為相等實根。此式為負，則為虛根。

3. 對數。

$\log ab = \log a + \log b$ ， $\log a^n = n \log a$ ， $\log 1 = 0$ 。

$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ ， $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$ ， $\log_a a = 1$ 。

三角學

4. 直角三角形。銳角 A 諸函數之定義如下：

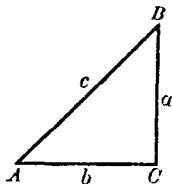
$$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}, \quad \csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}},$$

$$\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}, \quad \sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}},$$

$$\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}, \quad \cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}.$$

〔定理〕 直角三角形之一邊等於其斜邊與對角之正弦之積或等於其斜邊與鄰角之餘弦之積。

5. 一般之角。 XOA 角可視為一直線由 OX 旋轉至 OA 而成。設此直線逆時針方向旋轉則此角為正，順時針方向旋轉則此角為負。定線 OX 稱為始線，直線 OA 稱為終線。（見下圖）。



6. 角之量度。量角之大小，通常有二法，即有二種單位角。

〔角度法〕 單位角為週轉一周 360° ，稱一度。

〔弧度法〕 單位角為等於半徑之圓弧所對之圓

心角，稱一弧度。

二種單位角之關係如下方程式所示：

$$180^\circ = \pi \text{ 弧度 } (\pi = 3.14159\dots);$$

或，解之得

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0.0174\dots \text{ 弧度}; \quad 1 \text{ 弧度} = \frac{180}{\pi} = 57.29\dots^\circ.$$

由上列定義得

$$\text{一角之弧度數} = \frac{\text{所對之圓弧}}{\text{半徑}}.$$

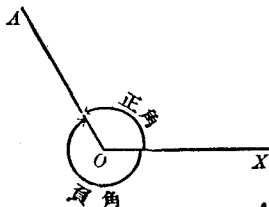
用以上方程式可由一種量度化為他種量度。

7. 關係。

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x; \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$



8. 化角公式.

角	正 弦	餘 弦	正 切	餘 切	正 割	餘 割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

9. $(x+y)$ 及 $(x-y)$ 之函數.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

10. $2x$ 及 $\frac{1}{2}x$ 之函數.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

11. 任意三角形之各項關係.

[餘弦定律] 任意三角形一邊之平方等於他二邊平方之和, 減去此二邊及其夾角之餘弦之積之二倍; 即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

[三角形之面積] 任意三角形之面積等於二邊及其夾角之正弦之積之半;即

$$\text{面積} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B.$$

2. 眞值. 特殊角.

角之弧 度數	角之度數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1
π	180°	0	-1	0	∞	-1	∞
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	∞	0	∞	-1
2π	360°	0	1	0	∞	1	∞

角之弧 度數	角之度數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1

3. 三角函數之符號規則.

象 限	sin	cos	tan	cot	sec	csc
第 一	+	+	+	+	+	+
第 二	+	-	-	-	-	+
第 三	-	-	+	+	-	-
第 四	-	+	-	-	+	-