最简单的
极大值和极小值问题

納塔松著
潘德松譯

上海教育出版社

最簡单的极大値和极小値問題

納 塔 松 著
潘 德 松 譯

上 海 教 育 出 版 社
一九六二年·上海

И. П. НАТАНСОН

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ
НА МАКСИМУМ
И МИНИМУМ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960 ЛЕНИНГРАД

（本书根据苏联国立数学物理书籍出版社 1960 年版譯出）

最簡单的极大値和极小値問題
（苏）納 塔 松 著
潘 德 松 譯

*

上 海 教 育 出 版 社 出 版
（上 海 永 福 路 123 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 090 号
上海洪兴印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32　印張：1　字数：22,000
1962 年 11 月第 1 版　1962 年 12 月第 2 次印刷
印数：12,001—36,000 本

統一书号：7150・1361
定　　价：（八）0.11 元

序

在这本小册子里，叙述的是一些求极大值和极小值的初等方法(就是不应用微积分的知識的方法)．

这本小册子的讀者对象是中学高年級的学生，讀者从这本书里可以得到在高等数学里所研究的某些知識．中学課外研究小組也可以应用这些材料．

不过我想，对于专科学校、师范学院、普通大学的学生，甚至对已經識破微积分学秘密的人来說，讀一讀这本书也是有益处的．問題是这样的，微积分学只提供給我們一般通用的方法，各种各样的問題都能用这种方法来解，只要它所求的是初等函数有限个組合的极值．在应用的时候，完全不必要考虑这个或者那个問題的特殊性质．而利用这些問題的特点，在解有些問題的时候，往往能使比用一般的方法解来得更簡单、更迅速．这里的情况跟解算术題一样，利用代数方程可以不考虑問題的特征，但是純粹的算术解法，有时却会比用代数解法更加簡单而迅速．

这本小册子里所用到的代数知識很少，只用了二次三項式的簡单性质，以及有关算术平均数和几何平均数的不等式．这样做的目的，是为了叙述的通俗．

伊·普·納塔松

1949年12月17日

前　言

在技术和自然科学中，在生产和生活中，我們經常会遇到一类特殊的数学問題，这就是极大值和极小值的問題．下面就是这些問題的几个例子：

1．把一根圓木鋸成矩形的长方木，要使鋸下的废料最少．

2．有一排用木板做成的栅栏长 200 米，用它来圍一块矩形园地，要使这块园地的面积最大．

3．墙上貼着一张画．在离这张画多远的距离，看这画的夹角最大？

4．为了得到最大的照度，应当把电灯挂在怎样的高度？

这些問題虽然是不同的，但是我們发现它們有共同的特点：每个問題都涉及到在现有材料的各种可能运用中，怎样得到最好的效果．学会解这类問題的重要性，也就沒有必要叙述了．数学里已經有求这类問題非常有效的一般通用的方法，不过这些方法将在微积分学里学到．

但是通常不必用复杂的微积分学，而只用初等代数的一些簡单方法，就可以解这类問題了．在这本小册子里，正是叙述不需要高等数学① 而能够求极大值、极小值問題的一些方法．当然，这些方法只适用于特殊的情况．但是，即使是熟悉微积分学的人，知道这些方法也是有益的．

① 其中包括上面所举的四个問題的解法

目　录

一　二次三項式的基本定理

1. 我們来看用"＝"把两个量 x、y 联接成的式子：

$$y=2x^2+7. \qquad (1)$$

假定 $x=3$，那末 $y=25$. 如果我們給 x 另一个値，例如 $x=10$，就得到 $y=207$. 一般地說，我們可以給量 x 以任何的値，但是当 x 已經被确定是某一个値的时候，y 就"自动地"具有确定的値，或者說，这个値是由等式(1)所决定的. 在数学里，这种关系叫做 y 是 x 的**函数**，而这里的量 x 叫做**自变量**.

现在我們提出一个問題：在函数 y〔由等式(1)确定〕所有的値里，其中有沒有一个最大的値？容易看出，函数 y 不存在这样的最大的値. 事实上，自变量 x 取下列各个数値的时候，

$$x_1=1,\quad x_2=10,\quad x_3=100,\quad x_4=1000,\cdots\cdots$$

函数 y 的对应値就是

$$y_1=9,\quad y_2=207,\quad y_3=20007,\quad y_4=2000007,\cdots\cdots$$

由此可见，函数 y 不存在最大値.

如果我們再問一下，在函数 y 所有的値里，其中有沒有一个最小的値？那末就得到完全另外一个答案.

事实上，等式(1)表明函数 y 是两个項 $2x^2$、7 的和. 它的第二項 7 是一个常数，跟 x 的变化无关. 第一項 $2x^2$，显然无論 x 取什么数値，它总不可能是負数①，也就是不小于零. 但是当 $x=0$ 的时候，第一項 $2x^2$ 等于零. 所以，当 $x_0=0$ 的时候，第一

① 我們不研究虛数.

項 $2x^2$ 或者 $2x^2+7$ 的和有最小値．这个最小値，或者説极小値显然是 7．我們把它写成：

$$y_{\text{极小}}=7.$$

应用同样的方法，就很容易証明下面各个函数

$$y=5x^2+3,\ y=9x^2+4,\ y=2x^2-5,\ y=3x^2-11$$

跟(1)式有类似的性质，它們沒有极大値，而有极小値，当 $x_0=0$ 的时候，这四个函数都有极小値，并且分别等于

$$y_{\text{极小}}=3,\ y_{\text{极小}}=4,\ y_{\text{极小}}=-5,\ y_{\text{极小}}=-11.$$

2. 上面只研究了一些比較簡單的例子．在这些例子里，函数 y 都是两項和的形式，其中一項是常数項，因为另一項是平方項(系数是正的)，所以不可能出現負数．

比較复杂的例子，例如

$$y=2x^2-12x+93.$$

为了能够用上面同样的方法来解，我們把函数 y 改写成另一种形式：

$$y=2(x^2-6x)+93.$$

現在我們在括弧里加上一个数，使括弧里的式子能够配成完全平方，就是

$$y=2(x^2-6x+9)+93-18,$$

或者

$$y=2(x-3)^2+75.$$

这样，就可以利用第 1 节里的同样方法来解了．事实上，函数 y 也是两項和的形式，其中常数 75，它跟 x 的变化无关，而另一項 $2(x-3)^2$ 决不会是負数，当 $x=3$ 的时候，它等于零．所以当 $x=3$ 的时候，这个函数有极小値 $y_{\text{极小}}=75$．

对于这个函数来說，它沒有极大値．我們容易証明，例如，

$$x_1=13,\quad x_2=103,\quad x_3=1003,\cdots\cdots$$

函数 y 的对应值就是

$$y_1=275,\ y_2=20075,\ y_3=2000075,\cdots\cdots$$

用类似的方法解下面的例子:

$$y=3x^2+24x+50.$$

下面的变换讀者自然容易理解的,这里就不加說明了.

$$y=3(x^2+8x)+50,$$

$$y=3(x^2+8x+16)+50-48,$$

$$y=3(x+4)^2+2.$$

所以,当 $x_0=-4$ 的时候函数 y 有极小值,并且这个值是

$$y_{极小}=2.$$

我們再举一个例子:

$$y=5x^2-50x+39.$$

这里 $x_0=5,\quad y_{极小}=-86.$

(跟函数的极大値和极小値相对应的自变量的値,通常用 x_0 来表示.)

3. 不要有这样的想法,任何的二次三項式(就是上面所研究的这种函数的形式)都只有极小値,而沒有极大値.

例如,函数

$$y=-3x^2+8,$$

很明显就有最大値,或者說极大値,当 $x_0=0$ 的时候,它的极大値是

$$y_{极大}=8.$$

相反地,这个函数沒有极小値.

例如,函数

$$y=-4x^2+40x-73$$

正是这样,它沒有极小値,但是有极大値.我們只要經过下面的变换,就可以得到証实.

$$y=-4(x^2-10x)-73,$$
$$y=-4(x^2-10x+25)-73+100,$$
$$y=-4(x-5)^2+27.$$
从上式可以看到，当 $x_0=5$ 的时候
$$y_{极大}=27.$$

4. 总之，有极小值的二次三項式就沒有极大值；相反地，有极大值的二次三項式就沒有极小值．細心的讀者也許已經看到，二次三項式的性质是由它的首項系数的符号决定的．为了很严格地証明这一点，我們来研究一般形式的問題．

設二次三項式
$$y=ax^2+bx+c,$$
式中的系数可以是任意的实数：正数，負数，或者零．但是首項系数 a 总不能等于零．否則这个多項式里就不包含 x^2 項，而这个函数就不是二次三項式了．

我們把函数 y 改写成下面的形式：
$$y=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right)+c,$$
$$y=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}.$$
为了簡单起见，設
$$c-\frac{b^2}{4a}=M.$$
最后得到
$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+M.$$

必須指出，M是一个常数，它完全由系数 a、b、c 决定，而不随自变量 x 值的变化而变化．

现在分两种情况来討論：

(1) 如果 $a>0$，无論 x 取什么数值，第一項 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 决不会是負数．当

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

的时候，第一項等于 0，所以函数 y 有极小值，并且等于 M：

$$y_{极小}=M,$$

而函数 y 沒有极大值．

(2) 如果 $a<0$，那末用跟上面相同的方法可以得到

$$y_{极大}=M,$$

并且当 $x_0=-\frac{b}{2a}$ 的时候，y 得到这个极大值．但是不存在 $y_{极小}$．

我們必須注意到，无論是函数的极大值或者是极小值，都叫做函数的极值(“极限值”)．因此綜合以上情况，我們可以归納成下面的基本定理：

定理　二次三項式

$$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c},$$

当

$$\boldsymbol{x_0=-\frac{b}{2a}}$$

的时候，它具有极值．如果 $a>0$，它就有极小值；如果 $a<0$，它就有极大值．如果有极大值 $y_{极大}$，就沒有极小值 $y_{极小}$；相反地，如果有极小值，就沒有极大值．

象我們在上面看到的那样，这个极值总是

$$y_{极值}=M,$$

或者詳細地写成

$$y_{极值}=c-\frac{b^2}{4a}.$$

但是不必記住这个等式，要知道，当

$$x = x_0 = -\frac{b}{2a}$$

的时候，这个极值就是二次三項式的值．就是說，要得到 y 极值，只要把数

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

代替二次三項式里的 x.

例如：

$$y = 3x^2 - 12x + 8, \quad x_0 = 2, \quad y_{极小} = -4;$$

$$y = -2x^2 + 8x - 3, \quad x_0 = 2, \quad y_{极大} = 5;$$

$$y = 2x^2 + 20x + 17, \quad x_0 = -5, \quad y_{极小} = -33.$$

二　基本定理的应用

5. 在第 4 节里已經証明过的定理表明，利用它可以解許多各式各样的实际問題．

例 1　把已知正数 A 分成两个加数，要使它們的乘积成为最大．

解　設一个未知的加数是 x，那末另一个加数就是 $A-x$，而它們的乘积是

$$y = x(A-x),$$

或者

$$y = -x^2 + Ax.$$

这样，就成为求 x 值的問題了，也就是当 x 取什么数值的时候，二次三項式得到极大值．根据第 4 节里的定理，显然这个极大值是存在的（因为这个等式的首項系数等于 -1，是負数），并且等于

$$x_0=\frac{A}{2}.$$

在这种情况下，

$$A-x_0=\frac{A}{2}.$$

因此所分成的两个加数应当彼此相等.

例如，我們如果这样来分解数 30:

$$\begin{aligned}
30&=\ 5+25, & 5\times25&=125,\\
30&=\ 7+23, & 7\times23&=161,\\
30&=13+17, & 13\times17&=221,\\
30&=20+10, & 20\times10&=200,\\
30&=29+\ 1, & 29\times\ 1&=\ 29,\\
30&=30+\ 0, & 30\times\ 0&=\ \ 0.
\end{aligned}$$

得到的所有的乘积都小于 $15\times15=225$.

6. 例 2 有一根長是 l 的鉄絲，把它弯折成一个矩形，使这个矩形尽可能有最大的面积.

解 設这个矩形的一边長是 x(图 1)，它的另一边的長就是 $\frac{l}{2}-x$，而它的面积是

$$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right),$$

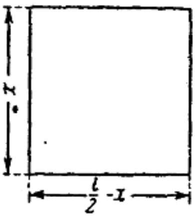

图 1

或者

$$S=-x^2+\frac{l}{2}x.$$

这个函数当

$$x_0=\frac{l}{4}$$

的时候有极大值，这个值就是所求矩形的一边長. 矩形的另一边長是

$$\frac{l}{2}-x_0=\frac{l}{4},$$

也就是説，这个矩形是正方形．这个題目所得到的解，可以归結成下面的定理：

定理　在所有周长相等的矩形里，正方形的面积最大．

注　(1)应用解例1所得到的結論，也同样容易解例2．事实上我們可以看到，所求的这个矩形的面积是

$$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right).$$

换句話説，S 是两个因式 x 和 $\frac{l}{2}-x$ 的乘积．但是这两个因式的和是

$$x+\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{l}{2}.$$

就是，数 $\frac{l}{2}$ 不随 x 的变化而改变．这就归結为把数 $\frac{l}{2}$ 分成两个加数，使它們的乘积最大．我們已經知道，当两个加数相等的时候，就是 $x=\frac{l}{4}$，它們的乘积最大．

(2)　如果 l 不表示鉄絲的长，而是表示用木板制成的栅栏的长，那末上面的定理就給出前言里所提到的四个实际問題中第二个例子的解(这里 $l=200$ 米)．

7．例3　有一堆木板，用它可以制成200米长的栅栏．要求用这些栅栏围成一个矩形的院子，而一边利用工厂的墙壁，怎样才能使这院子的面积成为最大？

解　設这个矩形院子的一边长的米数是 x (图2)，它的另一边长的米数就等于 $200-2x$，而它的面积的平方米数是

$$S=x(200-2x),$$

或者

$$S=-2x^2+200x.$$

根据第 4 节里的定理，当

$$x_0=50$$

的时候，这个函数取得极大值.

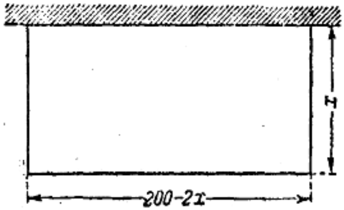

图 2

因此，矩形院子跟工厂墙壁垂直的一条边应当等于 50 米，由此得到平行于工厂墙壁的一条边等于 100 米，就是这个院子的形状应当是正方形的一半.

注 这里，如果我們想用解例 1 所得的結論来解这题，那末就不能直接解出，因为

$$S=x(200-2x)$$

是两个因式的乘积，它們的和等于 $200-x$，就是这个和随 x 的变化而变化. 換句話說，这题跟例 1 不同. 但是只要經过稍稍变换，就可以把这个函数化成例 1 的形式. 我們設 $Z=2S$，代入上式，得

$$Z=2x(200-2x).$$

这个函数是两个因式的乘积，它的和不随 x 的变化而改变，因此当

$$2x=200-2x$$

的时候，函数有极大值 $Z_{极大}$. 由此可以知道，$x=50$. 根据上面的分析可以看到，函数 S 和 $Z=2S$ 在同一个 x 值的情况下取得极大值.

8. 例 4 已知一个正方形 $ABCD$ (图 3). 从它的四个顶点起分别截取相等的綫段 Aa、Bb、Cc、Dd，連結 ab、bc、cd、da 成一个正方形. 要使正方形 $abcd$ 的面积成为最小，Aa 应当取多长?

解 如果設

$$Aa=x,$$

那末

$$aB=l-x,$$

这里 $l=AB$. 因此根据勾股定理，得

$$\overline{ab}^2=x^2+(l-x)^2=2x^2-2lx+l^2.$$

但是正方形 $abcd$ 的面积 S 恰好等于 $\overline{ab}^2$. 就是

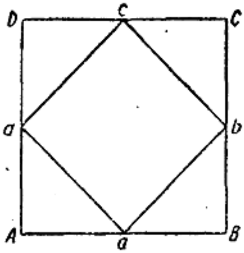

图 3

$$S=2x^2-2lx+l^2.$$

所以当

$$x_0=\frac{l}{2}$$

的时候，S 取得极小值. 这样，a、b、c、d 四点应当是原正方形 $ABCD$ 各边的中点.

9. 例 5 快艇和輪船分别从 A 地和 C 地同时开出，各沿着箭头所指示的方向航行(图 4). 快艇和輪船的速度分别是 40 公里/小时和 16 公里/小时. 已知 $AC=145$ 公里，經过多少时間以后快艇和輪船之間的距离最短?

解 用 B 表示快艇从 A 地开出 t 小时后的位置，用 D 表示輪船从 C 地开出 t 小时后的位置，这时

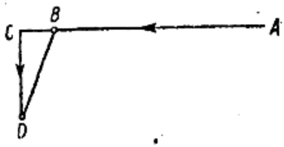

图 4

$$AB=40t \text{ 公里},$$

$$CD=16t \text{ 公里},$$

根据勾股定理，得

$$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{(145-40t)^2+(16t)^2},$$

由此得

$$BD=\sqrt{1856t^2-11600t+21025}.$$

当被开方数

$$Z=1856t^2-11600t+21025$$

取得最小値的时候，也就是当

$$t=\frac{11600}{3712}=3\frac{1}{8}$$

的时候，这个根式具有极小値. 因此，快艇和輪船同时分别从 A 地和 C 地开出 3 小时 7 分以后，它們之間的距离最短.

10. 例 6 在已知圓内作一个面积最大的内接矩形.

解 設已知圓的半径是 R，所求矩形的边 AB 的长是 x(图 5)，根据勾股定理，得

$$BC=\sqrt{4R^2-x^2}.$$

因此这个矩形面积 S 应当是

$$S=x\sqrt{4R^2-x^2}.$$

这个函数 S 和函数 $y=S^2$ 在同一个 x 値的时候取得极大値. 但是

$$y=x^2(4R^2-x^2).$$

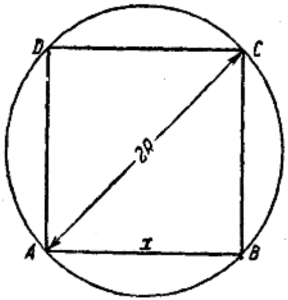

图 5

設 $x^2=Z$，得

$$y=Z(4R^2-Z)=-Z^2+4R^2Z.$$

这就是說，当 $Z=2R^2$ 就是 $x=R\sqrt{2}$ 的时候，函数 y 取得极大値 $y_{极大}$，不引进 Z，而根据 y 是和是常数 $4R^2$ 的两个因式的乘积，也可以求出这个 x 値，这是由于利用解例 1 时所得的結論：

$$x^2=2R^2, \qquad x=R\sqrt{2}.$$

可以看出，当 $AB=x=R\sqrt{2}$ 的时候，

$$BC=R\sqrt{2}.$$

我們可以看到，所求的矩形应当是正方形，这也就已經証明了下面的定理：