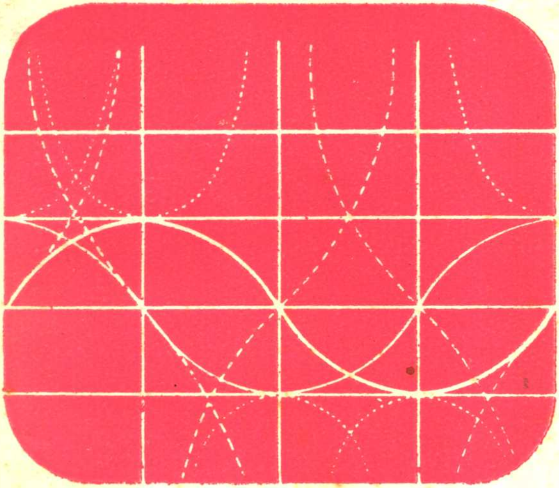


张锦文

集合论与连续统假设浅说

上海教育出版社

集合论与连续统假设浅说

张 锦 文

上 海 教 育 出 版 社

集合论与连续统假设浅说

张 锦 文

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　江苏启东印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 3　字数 63,000
1980 年 6 月第 1 版　1980 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—50,000 本

统一书号：7150·2258　　定价：0.23 元

前言

连续统假设是现代数学中的一大难题，它是1882年集合论的创始者康托尔(Cantor, G.)提出并宣布证明的问题(后来发现他的证明有错误，未发表)。1900年，希尔伯脱(Hilbert, D.)在他的著名演讲中列举了二十三个未解决的数学问题，第一个就是连续统假设。1938年，哥德尔(Gödel, K)证明ZFC公理系统推不出连续统假设的否定式，亦即连续统假设与ZFC是相对协调的；1963年，科恩(Cohen, P. J.)证明ZFC推不出连续统假设，亦即连续统假设与ZFC是相对独立的。综合哥德尔和科恩的结果，就是连续统假设在ZFC中是不可判定的。正如尺规不能三等分任意角一样，ZFC也不能断定连续统假设成立与否。要三等分任意角需要新工具，要断定连续统假设也同样要新工具，也就是说，要寻求新的更强有力的并且从数学的理论与实践上来说有资格作新公理的数学命题或者采用其它有效的途径去攻克连续统问题，它现在仍然是一大难题。虽然，一百年来，许多数学家为解决它而付出了不懈的努力，也取得了一些重大进展，而且为了解决它也找到一些著名的方法，这些方法对解决其它数学问题起了积极的作用。

直观地讲，连续统问题就是实数有多少的问题，或者说，一条直线上点有多少的问题，实数的个数与自然数的个数的关系问题。但是，对于无穷集合(如象自然数集合，实数集合)，元素的个数如何精确地刻划呢？回答这些问题要涉及函数、关系、集合等基本问题。本书从集合的例子和概念入手，直观地讨论了朴素集合论或康托尔集合论的基本原则(外延

原则，概括原则和选择原则）、基本运算（并、交、幂），基本概念（关系、函数、一一对应、对等、序数、基数）、基本定理（康托尔定理、蔻尼定理），并且引导出朴素集合论中的著名悖论（罗素悖论，康托尔悖论），从而说明必须对集合论进行公理化处理，并介绍了著名的集合论公理系统——蔡梅罗-弗兰克尔系统（ZF 系统）．在这个基础上，我们介绍了哥德尔、科恩的工作，并介绍了他们的方法．

本书的主要目的是精确地陈述连续统假设和介绍它的进展，因此，对一些相关领域（如关系、函数、序数等），并未展开讨论，只对这些领域给出了一个清晰的符合现代术语的概念．因此，本书也对现代数学的一个领域——集合论作了一些通俗的介绍，并且也涉及一些有趣味的逻辑问题．集合的观念、逻辑的训练，都是很有意味，发人深省的，同时本书又是以连续统问题为主线，这样又增加了读者的兴趣．希尔伯脱说得好："某类问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不可否认的．只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止．正如人类的每项事业都追求确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题．正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁般的意志和力量，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界．"（希尔伯脱，1900 年在国际数学大会上的演讲：《数学问题》）连续统问题已经经历了近一百年了，虽然还没有解决，但是，我们相信，人类终归要解决它的，在解决它的过程中必将发现新方法和新观点，使人类达到更广阔更自由的境界．

限于作者水平，错误之处在所难免，欢迎批评指正．

作　者

1979 年 6 月 20 日

目　　录

一、集合及其运算

1. 集合和有关表示法

每个人都知道许多集合，这就是把人们的直观上或思想上的那些确定的能够区分的对象汇集在一起成为一个整体，这一整体就叫做一个集合.

[例 1] 甲班的全体学生组成一个集合.

我们可以把这一集合记做 S_1，如果张三是甲班的一个学生，我们就说张三是集合 S_1 的一个元素，并记做“张三 $\in S_1$”，其中符号“$\in$”表示“属于”或“元素关系”. 因此，“张三 $\in S_1$”可以读做“张三属于 S_1”，或“张三是 S_1 的一个元素”，也就是“张三是甲班的一个学生”. 如果李四不是甲班的一个学生，我们就记做：“李四 $\notin S_1$”，意思是指：“李四不是 S_1 的一个元素”. 而“王五 $\in S_1$”表示“王五是 S_1 的一个元素”.

[例 2] 这一黑板上写了而且只写了：2, 3, 7, 8 这样几个数字，我们把这些数字组成的集合记做 S_2.

这时，有：$2\in S_2$, $3\in S_2$, $4\notin S_2$, $5\notin S_2$, 等等.

在例 1 中，我们把甲班的学生汇集成一个集合 S_1，为什么能够这样汇集呢？因为“一个学生是否在甲班”这是确定的，张三是甲班的学生，李四不是甲班的学生，这些都已确定，不会含混. 同时，甲班的若干个学生相互都是能够区别的，虽然，张三、王五都是甲班的学生，但这是两个不同的学生，这些都是我们的常识所知道的.

又，比如甲班的女生可以组成一个集合，甲班的男生同样也可以组成一个集合，因为这些对象都是"确定的，能够区分的"．但是，"甲班的高个子"就不能组成一个集合，这是因为，什么叫"高个子"？这是一个不确定的、不清晰的概念．身高一米八的是高个子，身高一米七的、一米六八的算不算高个子呢？这里没有一个确定的界限．这类不清晰的对象不是古典集合论的对象，不能形成我们现在讲的"集合"†．

在例 2 中，S_2 的元素为 2, 3, 7, 8，有时也把 S_2 记做 $\{2, 3, 7, 8\}$．凡是它的元素都写在花括号中，不是它的元素都不写入花括号内．

[例 3]　数 0, 1, 2, 3, … 叫自然数．本书中，我们把所有自然数组成的集合记做 $\mathbf{N}$．

0, 1, 2, 3 都是自然数，都是 $\mathbf{N}$ 的元素．1000 是一自然数，所以是 $\mathbf{N}$ 的元素，即 $1000\in\mathbf{N}$．当然，123789 也是一自然数，所以 $123789\in\mathbf{N}$．但是 -2 不是自然数，因此 $-2\notin\mathbf{N}$．

[例 4]　数 …, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … 叫整数，所有整数组成的集合记做 $\mathbf{Z}$．

注意：每一个自然数都是一整数，反之并不成立．

[例 5]　形式为 $\frac{p}{q}$（其中 p、q 都是整数，$q\neq0$；为方便起见，可以假定 p、q 互素）的数叫有理数，所有有理数组成的集合记做 $\mathbf{Q}$．

这样，我们有 $2\in\mathbf{Q}$，$-3\in\mathbf{Q}$，$-2\in\mathbf{Q}$，$\frac{1}{2}\in\mathbf{Q}$，$\frac{5}{3}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$，等等．

---

† 现代数学的一个领域弗晰 (Fuzzy) 集合论，是研究不清晰的对象组成的集合的．

[例 6] 所有实数组成的集合记做 $\mathbf{R}$.

这样，我们有：$2\in\mathbf{R}$, $-2\in\mathbf{R}$, $3\in\mathbf{R}$, $-3\in\mathbf{R}$, $\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$, $-\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$, $\frac{5}{3}\in\mathbf{R}$, $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$, $-\sqrt{2}\in\mathbf{R}$, $\pi\in\mathbf{R}$(π为圆周率), $\sqrt{-1}\notin\mathbf{R}$, 等等.

还可以有更复杂的集合，也可以把一些集合汇合起来组成新的集合. 例如，令 S 是这样的一集合，它的元素恰好是 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$, 亦即[†]

$$S:=\{\mathbf{N},\ \mathbf{Z},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{R}\}.$$

这个集合恰有四个元素 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$, 即 $\mathbf{N}\in S$, $\mathbf{Z}\in S$, $\mathbf{Q}\in S$, $\mathbf{R}\in S$, 但是 $2\notin S$, $3\notin S$.

上述"$\in$"是集合论中一个基本的关系，是元素与集合之间的"类属关系". 我们已经指出：$2\in\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\in S$, 但 $2\notin S$. 如果令 $S':=\{2,\ \mathbf{N}\}$, 我们才有 $2\in\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\in S'$, 且 $2\in S'$.

这样，由 $S_1\in S_2$ 且 $S_2\in S_3$, 不一定就有 $S_1\in S_3$. 在有的情况下，$S_1\in S_3$ 成立；在另外的情况下，可能 $S_1\notin S_3$. 究竟如何，要看具体的集合 S_1、S_2、S_3 是什么而决定，要看他们含有哪些元素而决定. 一集合由它的元素所决定，这正是外延原则.

2. 外延原则

由于一个集合是由它的元素完全决定，而不管它的其他任何性质，那么对于两个集合，便可以定义"相等". 就是说，任给两个集合 S_1 和 S_2, 当且仅当对于每一个元素 x; 若 $x\in S_1$

† 符号"$:=$"表示左边是由右边定义出来的，有的书上用"$=_{df}$"，二者是一个意思.

则 $x\in S_2$; 并且，对于每一个元素 x，若 $x\in S_2$，则 $x\in S_1$. 则称集合 S_1 和 S_2 相等，记作 $S_1=S_2$. 上述定义方法是外延性的，称为外延公理. 如果采用符号化记法：用"$\forall x$"表示"对于每一 x"，用"$x\in S_1\longrightarrow x\in S_2$"表示"若 $x\in S_1$ 则 $x\in S_2$"，这样，外延公理（$S_1=S_2$ 当且仅当 S_1 与 S_2 有相同的元素）这一事实可以符号地写成：

外延公理　$S_1=S_2$ 当且仅当 $\forall x(x\in S_1\longleftrightarrow x\in S_2)$.

其中 $x\in S_1\longleftrightarrow x\in S_2$ 表示 $x\in S_1\longrightarrow x\in S_2$ 并且 $x\in S_2\longrightarrow x\in S_1$.

这种符号化的记法，对于初学者似乎不太习惯，可能会带来一点困难，其实，只要看多了，用多了，习惯了，这种符号化记法将会带来许多好处，它能使你在描述、表达问题时更清晰、严格和简练.

例如，集合 $S_1:=\{0, 1, 3\}$，$S_2:=\{3, 1, 0\}$. 虽然表面看 S_1 与 S_2 不同：元素的顺序不同. 由于这两个集合元素完全相同，根据外延公理，有 $S_1=S_2$. 令 $S_3:=\{4, 5, 6\}$，$S_4:=\{0, 1, 4\}$. 对于 S_1 与 S_3，因为它们的元素全不相同，故有 $S_1\neq S_3$; 对于 S_1 与 S_4，它们有一个相同的元素 4，但是其它元素就不同了，因此，$S_1\neq S_4$; 同理 $S_3\neq S_4$.

3. 子　集　合

当我们研究集合之间的相互关系时，一集合 S_1 是否包含在另一集合 S_2 中，这常常是一件很重要的事情.

定义 1　当集合 S_1 的每一个元素也都是集合 S_2 的一个元素时，集合 S_1 称为是集合 S_2 的一个子集合. 这时，记作 $S_1\subset S_2$. 即

$$S_1 \subset S_2 := \forall x (x \in S_1 \longrightarrow x \in S_2).$$

S_1 不是 S_2 的子集合，就记做 $S_1 \not\subset S_2$.

在 $S_1 \subset S_2$ 成立时，也称 S_1 包含在 S_2 中，有时也称集合 S_2 包含集合 S_1.

对于 $S_1 \subset S_2$、$S_3 \not\subset S_4$，可用图来加以形象说明(参见图1).

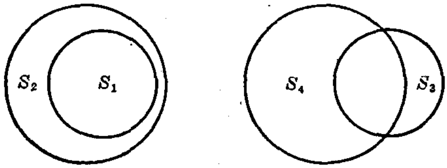


图 1

例如：
$$\{0, 1\} \subset \{0, 1\};$$
$$\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2, 3\};$$
$$\{\{2\}\} \subset \{0, 1, \{2\}\};$$
$$\{0, 2\} \not\subset \{0, 3, 4\};$$
$$\{3\} \not\subset \{\{3\}, 4, 2\};$$
$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z};$$
$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q};$$
$$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R};$$
$$\mathbf{Q} \not\subset \mathbf{N}.$$

注意：不要把 $\in$ 与 $\subset$ 相混淆，例如：

$\{3\} \not\subset \{\{3\}, 4, 2\}$，但 $\{3\} \in \{\{3\}, 4, 2\}$；

$\{1, 3\} \subset \{0, 1, 3\}$，但 $\{1, 3\} \notin \{0, 1, 3\}$.

定理 1 对于任给的集合 S_1、S_2、S_3，有：

(1) $S_1 \subset S_1$,

(2) $S_1 \subset S_2$ 且 $S_2 \subset S_1$，则 $S_1 = S_2$,

(3) $S_1 \subset S_2$ 且 $S_2 \subset S_3$，则 $S_1 \subset S_3$.

这个定理的证明是直接从定义1就可以获得的. 当然，对(2)还要用到外延原则.

人们也常把(1)称为关于$\subset$的自返性，把(2)称为关于$\subset$的反对称性，而(3)称为关于$\subset$的传递性.

定义2 当$S_1 \subset S_2$且$S_1 \neq S_2$时，S_1称为S_2的一真子集合. 这时，记做$S_1 \subset_+ S_2$. 也就是说，

$$S_1 \subset_+ S_2 := \forall x(x \in S_1 \longrightarrow x \in S_2) \wedge \exists x(x \in S_2 \longrightarrow \neg x \in S_1).$$

其中"$\wedge$"表示"并且"，而"$\exists x$"表示"有一个x"，或"存在一个x"，$\neg x \in S_1$即$x \notin S_1$.

当S_1不是S_2的一真子集合时，就记做$S_1 \not\subset_+ S_2$.

例如:

$$\{0,\ 1,\ \{2\}\} \subset_+ \{0,\ 1,\ \{2\},\ 3\};$$
$$\{3,\ 4\} \subset_+ \{2,\ 3,\ 4\};$$
$$\{2,\ \{1\}\} \not\subset_+ \{2,\ \{1\}\};$$
$$\{1,\ \{3\}\} \not\subset_+ \{1,\ 3,\ 4\}.$$

4. 概括原则

在前边，为了给出一个集合，常常是列举出该集合的元素. 这种方法的好处是具有明显性. 比如，令集合$S_1 := \{0,\ 1,\ 4\}$，我们一眼就看出它只有三个元素，即0, 1, 4. 但是，在有些情况下，这样做是很不方便的，比如令集合S_2为:

$$\{5832,\ 6759,\ 8000,\ 9261,\ 10648,\ 12167,\ 13824\}, \quad (1.1)$$

式(1.1)所确定的集合就有点烦琐了，这样大的数目再多列出几个，那就更复杂甚至无法写出.

当我们分析一下S_2的元素的性质时，就会发现这些数都

是有规律的，它们是18到24之间的这七个自然数的立方数，亦即当x满足$18\leqslant x\leqslant 24$时，$S_2$的元素恰为$x^3$. 这样就有:

$$S_2:=\{y|x\text{ 是一自然数，且 }18\leqslant x\leqslant 24\text{ 并且 }y=x^3\}, \tag{1.2}$$

其中竖杠"|"的前边是集合S_2的元素，它必须满足竖杠"|"的后边所列举的条件，亦即"x是一自然数且$18\leqslant x\leqslant 24$并且$y=x^3$". 这个条件也叫做一个性质. (1.2)表明$S_2$的元素都具有性质为"把这个元素开立方，立方根为18与24（包括18和24在内）之间的自然数". 不难验证它的元素恰好是在(1.1)中所列举的那些. 由外延原则，(1.1)与(1.2)定义了同样的集合.

当我们把(1.2)式中的条件改为"x是一自然数且$10\leqslant x\leqslant 109$并且$y=x^3$"时，所定义的集合称为$S_2'$. 如果要用类似于(1.1)式那样的显式去列举$S_2'$时，那将是很烦琐的事情了. 如果把(1.2)式中的条件改为:"x是一有理数且$10\leqslant x\leqslant 109^{2000}$且$y=x^3$"时，这时如果要使用(1.1)那样的显式，枚举这样的集合的全部元素就几乎不可能. 为此，为了方便、简洁地给出一个集合，就需采用如象(1.2)这样的定义方式. 上述所列举的条件都叫做性质，康托尔把所有满足给定性质的元素汇集在一起而成为一个集合，并且称之为**概括原则**. 也就是说:

概括原则 任给一个性质P，那么存在着一个集合S，它的元素恰好是具有性质P的那样的一些对象，亦即

$$S:=\{x|P(x)\},$$

其中$P(x)$是"x具有性质P"的一个缩写. 这样，就有$\forall x(x\in S\longleftrightarrow P(x))$.

这条原则在使用上是强有力的，而且也是很方便的. 比

如，我们曾给出的集合 $\{2, 3, 4, 8\}$，可用条件“$x=2$ 或者 $x=3$ 或者 $x=4$ 或者 $x=8$”来给出，可记成：

$S_2:=\{x \mid x=2$ 或者 $x=3$ 或者 $x=4$ 或者 $x=8\}$.

在下边，我们用“$\vee$”表示“或者”，用“$\wedge$”表示“并且”.

例如：$\{x \mid$“x 是一自然数”$\wedge 80 \leqslant x^2 \leqslant 200\}$ 就是集合 $\{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$；

$\{x \mid x$ 是一自然数$\}$就是集合 $\mathbf{N}$；

$\{x \mid x=3\}$就是集合$\{3\}$.

应该指出，使用概括原则要有限制，否则会出毛病，对此将在本书第 57 页中讨论，并将通过公理方法来解决.

5. 空集合、单元集合和无序对集合

假如取一条件为 $x \neq x$，并且令集合 S 为 $\{x \mid x \neq x\}$. 在我们的直观中，或者在我们的思维中，因为不存在确定的能够区别的这样一个对象，它不等于它自己，也就是说集合 S 是没有元素的. 由外延原则，这种集合只有一个，就叫做空集合，并且常常记做 $\varnothing$.

定理 2 对于所有的集合 S，有 $\varnothing \subset S$. 也就是说，空集合是任一集合的子集合.

证明 假定 $\varnothing \not\subset S$，那么有一元素 x，使得 $x \in \varnothing, x \notin S$. 但这是不可能的，因为 $\varnothing$ 中不可能有一元素 x. 所以 $\varnothing \subset S$. ⊣

注意：$\varnothing$ 是一集合，它没有元素，而 $\{\varnothing\}$ 是一集合，它有一个元素 $\varnothing$，所以 $\varnothing \neq \{\varnothing\}$，前者一无所有，后者有一容器.

读者可以验证：

(1) $\varnothing \subset \varnothing$,　　　　(2) $\varnothing \notin \varnothing$,

(3) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$, (4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$,

(5) $\{\varnothing\}\subset\{\varnothing\}$, (6) $\{\varnothing\}\notin\{\varnothing\}$,

(7) $\varnothing\subset\{\{\varnothing\}\}$, (8) $\varnothing\notin\{\{\varnothing\}\}$,

(9) $\{\varnothing\}\not\subset\{\{\varnothing\}\}$, (10) $\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}$,

(11) $\varnothing\in\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, (12) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

(13) $\varnothing\subset\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, (14) $\{\{\varnothing\}\}\subset\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

恰好含有一个元素的集合,叫做单元集合.

例如 $\{\varnothing\}$, $\{1\}$, $\{n\}$, $\{a\}$, $\{\mathbf{N}\}$, $\{\mathbf{Q}\}$, 都是单元集合. 上述这六个单元集合的元素分别为 $\varnothing$, 1, n, a, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$. 而 $\{1, 2\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ 都不是单元集合, 因为它们的元素都不只一个; $\varnothing$ 也不是单元集合,因为它没有元素.

恰好有二个元素的集合, 并且这二个元素之间没有一定顺序的, 叫做无序对集合. 比如, 前边提到的 $\{1, 2\}$ 就是一个无序对集合, 对于 $\{1, 2\}$, 还可以写作 $\{2, 1\}$. 也就是说, 我们有

$$\{1, 2\}=\{2, 1\}.$$

对于任意的对象 a、b, 无序对集合 $\{a, b\}$ 都等于 $\{b, a\}$. 另外, $\{\mathbf{N}, \mathbf{Q}\}$, $\{1, \mathbf{N}\}$, $\{\mathbf{R}, \mathbf{N}\}$ 都是无序对集合.

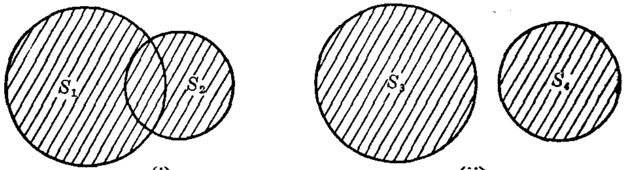
还应当注意,就是 $\{1, 1, 2\}=\{1, 2\}$. 在任一集合中,某一个元素重复出现多次和它只出现一次,其结果没有变化,仍然是相同的集合. 因此, $\{a, a\}$ 就是单元集合 $\{a\}$, $\{a, a, a\}$ 还是单元集合 $\{a\}$; 而 $\{a, a, b\}$, $\{b, b, a, a\}$ 也仍然是无序对集合 $\{a, b\}$.

6. 集合的并、交和相对补

令 S_1、S_2 是两个集合,我们现在定义第三个集合 $S_1\cup S_2$,

叫做 S_1 与 S_2 的并集合，它是这样的一个集合，它的元素至少是属于 S_1 和 S_2 二者之一(见图 2)，即：

定义 3 $S_1 \cup S_2 := \{x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2\}$.



(i) (ii)

图 2

根据概括原则，$S_1 \cup S_2$ 是一个集合，并且对于所有的 x，有 $x \in S_1 \cup S_2 \longleftrightarrow x \in S_1 \vee x \in S_2$. 亦即：

$$\forall x(x \in S_1 \cup S_2 \longleftrightarrow x \in S_1 \cup x \in S_2).$$

例如：

$$\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$
$$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\};$$
$$\{2, 3\} \cup \{3\} = \{2, 3\};$$
$$\{2, 3\} \cup \varnothing = \{2, 3\};$$
$$\{2, 3\} \cup \{2, 3\} = \{2, 3\}.$$

定理 3 对于任给集合 S_1、S_2、S_3，有：

(1) 析等律：$S_1 \cup S_1 = S_1$;

(2) 交换律：$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$;

(3) 结合律：$S_1 \cup (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cup S_2) \cup S_3$.

证明 对于任意的 x，

$$\begin{aligned} x \in S_1 \cup S_1 &\longleftrightarrow x \in S_1 \vee x \in S_1 \\ &\longleftrightarrow x \in S_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in S_1 \cup S_2 &\longleftrightarrow x \in S_1 \vee x \in S_2 \\ &\longleftrightarrow x \in S_2 \vee x \in S_1 \\ &\longleftrightarrow x \in S_2 \cup S_1; \end{aligned}$$