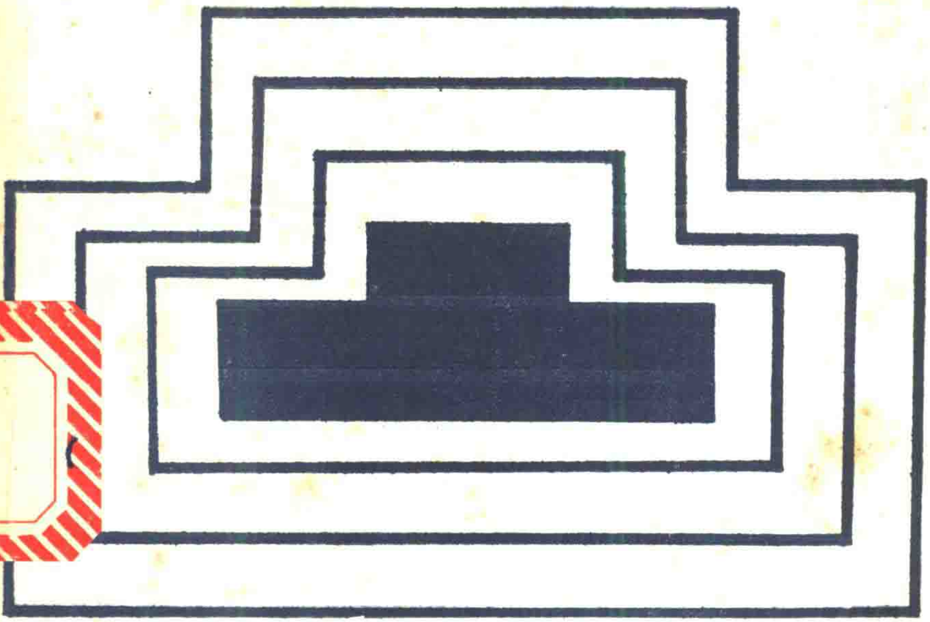
凸分析导论

〔荷〕J.V. 蒂尔 著
王 琦 译
李泽民 校

中南工业大学出版社



21

凸分析导论

[荷] J.V 蒂尔 著

王 琦 译

李泽民 校

江苏工业学院图书馆
藏书章

中南工业大学出版社

内容简介

这是一本关于凸集，凸函数和凸最优化的入门书。它强调这个数学领域的基本概念与独特方法。定理证明着重突出凸分析的基本思想。每章有大量练习（在书末有答案和提示）以帮助读者理解所学的概念，并作简要的探索。

本书供数学、物理、工程、控制论和经济等领域高年级大学生及研究生作为教材，对于需要凸分析导引的科技工作者也是一本可取的参考书。

凸分析导论

［荷］J. V. 蒂尔 著

玉 琦译

李泽民校

责 任 编 辑：程葆隆

插图责任编辑：刘楷英

*

中南工业大学出版社 出版发行

中南工业大学出版社印刷厂印装

湖南省新华书店经销

*

开本：787×1092/32印张：6　字数：140千字

1990年1月第1版　1990年1月第1次印刷

印数：0001—1500

*

ISBN 7-81020-282-0/O·045

定价：1.20元

序

本书是我在荷兰乌得勒支大学讲授凸分析的基础上写成的。目前人们在理论及应用方面对凸分析越来越感兴趣。考虑到本书是一本入门教材，因此，我力求着重强调凸分析的基本概念和这一数学分支所特有的方法（诸如分离，次梯度，共轭函数，凸最优化等）。各章末尾的大量基本练习（在书末有答案和提示）是帮助读者理解所使用的这些概念的。

本书可供对凸性理论有兴趣的青年朋友使用，他们已有微积分，线性代数和一般拓扑学的数学基础；并熟悉泛函分析的基本概念（例如赋范线性空间，希尔伯特空间，对偶等）。

为了表达本书的特色和引起学生的兴趣，我不限于在实践中经常要处理的有穷维情形。但为使局部凸空间—凸分析的本质部份—的主题尽可能地简单，本书仅限于赋范空间。

在书目摘要注释中，我们收集了一些历史性的评论和其他材料，当然，这些决不是详尽的。

第一章我们概括了实直线上的实凸函数理论的要点；对取无穷值的函数也作了一些推广。

第二章研究线性空间中凸集的代数性质。对于线性拓扑空间，我们给出了凸集的某些拓扑特性。

第三章把线性空间中的分离定理拓广到线性拓扑空间，得出 Hahn-Banach 定理。

第四章介绍 R^n 中有关凸子集的一些经典定理及对多面锥的某些应用。我们利用相对内部的概念研究了 R^n 中的分离。

第五章研究定义在线性空间上可以取无穷值的函数。在某种意义上，局部有界性原来等价于连续性。还研究了重要的下半连续性和次可微性的概念。

第六章叙述对偶理论，并给出二次极函数和支撑函数的某些特性。

第七章给出在最优化中，凸性的内涵的一些刻划。本章主要讨论凸规划（Kuhn-Tucker 条件，鞍点和 Fenchel 的对偶定理）。

我衷心感谢 John Horváth 教授，他建议把我讲课的笔记写成英译本。我的同事 Tineke de Bunje 和 Leen Roozemond 曾读过我的全部或部分手稿，并作了许多修改，在此，特向他们致谢。最后，对 M.M.Meije 夫人花费许多时间打印手稿表示感谢。

Jan Van Tiel

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第一章　实直线上的凸函数

这一章里，我们用 I 表示 R 中的（闭，开或半开，有限或无限）区间。

实 凸 函 数

1.1　定义

设函数 f：$I\to \mathrm{R}$。

（a）f 称为是凸的，如果对任何的 a，$b\in I$ 及任意实数 $\lambda\in\langle 0, 1\rangle$，有

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b). \qquad (1)$$

图 1 表明凸性的几何意义：端点为$(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的弦总是位于 f 的图形的上方。

（b）f 称为是严格凸的，如果 f 为凸的，且在（1）式中，对无论怎样的 $a\neq b$ 均有严格不等式成立。

1.2

我们给出 f：$I\to \mathrm{R}$ 呈凸性的几个其他等价描述：

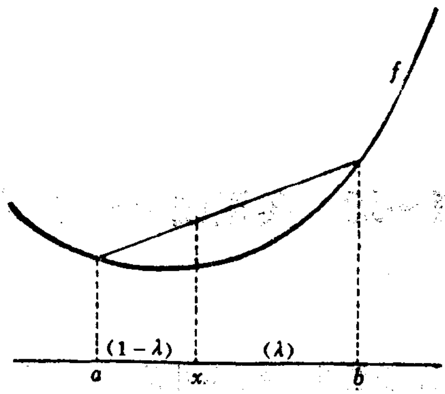


图 1

(a) 对任意 a, b, $x\in I$, $a<x<b$, 有

$$f(x)\leqslant\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

注意这个不等式的右边可以写成

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

(b) 对任何的 a, $b\in I$ 及任意 λ, $\mu\in\mathbf{R}$, 且 $\lambda>0$, $\mu>0$, $\lambda+\mu=1$, 有

$$f(\lambda a+\mu b)\leqslant\lambda f(a)+\mu f(b)$$

1.3

以下简单性质的证明留给读者.

(a) 如果 f 和 g 是凸函数, 且 $\alpha\geqslant0$, $\beta\geqslant0$, 则 $\alpha f+\beta g$ 也是凸函数.

(b) 有限多个凸函数的和是凸函数.

(c) 收敛的凸函数序列的（点态）极限是凸函数。

(d) 设 f：$I\to\mathbf{R}$ 是凸的。则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in I \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

其中 $x_i\in I$，$\lambda_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$。

(e) 设 f 是任意多个凸函数 $I\to\mathbf{R}$ 的点态上确界，若 f 在 I 上处处有限，那么 f 是凸的。对于下确界，类似的命题成立吗？

1.4 定理

设 f：$I\to\mathbf{R}$ 是凸的，则对任何的 $a,b,x\in I$，$a<x<b$，有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \qquad (2)$$

如果 f 是严格凸的，则（2）式中的严格不等式成立。

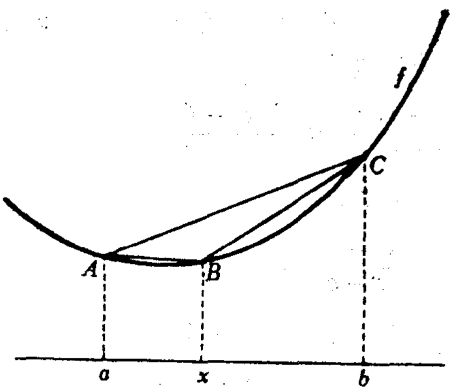


图 2

图 2 表明这个定理的几何意义：

斜率(AB)≤斜率(AC)≤斜率(BC)。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

证明. 因为 f 是凸的，我们有

$$f(x)\leqslant\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{3}$$

从这个不等式我们可以推出

$$f(x)-f(a)\leqslant\frac{a-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

$$=\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)]$$

这证明了（2）式中的第一个不等式，第二个不等式可用类似方法证明. 如果 f 是严格凸的，则在（3）式中严格不等式成立，在（2）式中亦如此.

1.5

我们用 int(I) 表示 I 的内部. 设 f：$I\to\mathbf{R}$ 是凸的，$c\in\text{int}(I)$，假定$[a, b]\subset I$，满足 $a<c<b$. 由定理1.4，对任意 $x\in\langle c, b]$，我们有

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqslant\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

由定理1.4也得出函数

$$x\to\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

在$\langle c, b]$上是非减的. 因此，右导数

$$f'_+(c):=\lim_{x\downarrow c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

存在. 用类似方法可以证明左导数 $f'_-(c)$存在.

如果 $a<c<d<b$，则对于充分小的正数 h，我们有

$$\frac{f(c)-f(c-h)}{h}\leqslant\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqslant\frac{f(d)-f(d-h)}{h}$$

令 $h\to 0$，取极限，我们得

$$f'_-(c)\leqslant f'_+(c)\leqslant f'_-(d).$$

这样，我们证明了下面定理。

1.6 定理

设 $f: I\to\mathrm{R}$ 是凸的，则 f 在 $\mathrm{int}(I)$ 的每一点有右导数和左导数，且 f'_- 和 f'_+ 在 $\mathrm{int}(I)$ 上是非减的。如果 $c\in\mathrm{int}(I)$，我们有

$$f'_-(c)\leqslant f'_+(c)$$

并且，对所有的 $x\in I$（见图3）有

$$f(x)\geqslant f(c)+f'_-(c)(x-c),\quad f(x)\geqslant f(c)+f'_+(c)(x-c).$$

注. 设 $f: [a, b]\to\mathrm{R}$ 是凸的。上述证明指出，在这种情况，若 $+\infty$ 和 $-\infty$ 允许作为极限，那么 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 存在。

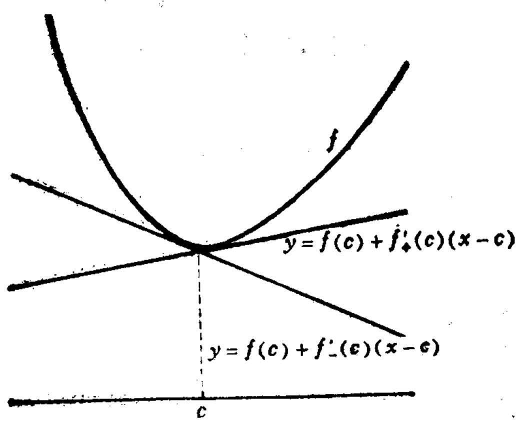


图3

1.7

$f: I \to \mathrm{R}$ 称为是相对于 $I_0 \subset I$ 的李普西兹函数，如果存在 $K>0$，使得对所有 $x, y \in I_0$，有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

此条件蕴涵着 f 相对于 I_0 是连续的，甚至是一致连续的，且在 I_0 的每一个有界闭子区间上，f 是有界变差函数。

定理. 设 $f: I \to \mathrm{R}$ 是凸的，$[a, b] \subset \operatorname{int}(I)$. 则

(a) f 是相对于 $[a, b]$ 的李普西兹函数。

(b) f 在 $\operatorname{int}(I)$ 连续。

证明. 显然存在 $c, d \in I$，使得 $c<a<b<d$. 由定理 1.6，我们有

$$f'_+(a) \leqslant f'_+(x) \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_-(b),$$

其中 $a \leqslant x < y \leqslant b$. 由此得出 $|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|$，此处 $K := \max(|f'_+(a)|, |f'_-(b)|)$. (a)得证；(b)是(a)的直接结果。

注. 即使 f 有界，f 亦未必是相对于 I 的李普西兹函数；即使 I 是闭的和有限的，f 也未必在 I 上连续。

1.8

一个相对于区间$[a, b]$的李普西兹函数在$[a, b]$上是绝对连续的；众所周知，这样的函数几乎处处可微，于是，从§1.7 得出凸函数几乎处处可微。

下面我们在不利用绝对连续概念的情形下，去证明凸函数

的一个较强的可微性性质。

定理 设 $f: I \to \mathbb{R}$ 是凸的，则

(a) 在 $\mathrm{int}(I)$，f'_- 左连续；f'_+ 右连续。

(b) f 仅有可数多个不可微点。

证明 (a) 由于 f 在 $\mathrm{int}(I)$ 的连续性（§1.7），对所有 x，y，$z \in \mathrm{int}(I)$，我们有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{z\downarrow x}\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \geqslant \lim_{z\downarrow x} f'_+(z)$$

其中 $x<z<y$。取极限 $y \downarrow x$，得到

$$f'_+(x) \geqslant \lim_{z\downarrow x} f'_+(z)。$$

另由 f'_+ 是非减的（定理1.6），又有

$$f'_+(x) \leqslant \lim_{z\downarrow x} f'_+(z)。$$

从而 $f'_+(x) = \lim\limits_{z\downarrow x} f'_+(x)$，即 f'_+ 右连续。f'_- 的左连续性可类似证明。

(b) 由定理1.6，对所有的 x，y，$z \in \mathrm{int}(I)$，且 $x<y<z$ 有

$$f'_+(x) \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_+(z)。$$

如果 f'_+ 在 y 连续，就有

$$f'_+(y) = \lim_{x\uparrow y} f'_+(x) = \lim_{z\downarrow y} f'_+(z) = f'_-(y)$$

这意味着 f 在 y 是可微的。从而推出 f 在 $\mathrm{int}(I)$ 的不可微点是非减函数 f'_+ 的跳跃点，由于 f'_+ 仅有可数多个这样的点，(b) 得证。

中 点 凸 性

1.9

以下概念紧密地联系到凸性

定义. 函数 f: $I \to \mathrm{R}$ 称为是中点凸的，如果对所有的 a, $b \in I$, 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]. \qquad (4)$$

图 4 表明中点凸性的几何意义：连接 f 图形上两点的弦之中点总位于图形上对应点的上方。

1.10 定理

设 f: $I \to \mathrm{R}$ 为中点凸且连续，则 f 是凸的。

证明 假定 (a_k) 是 I 中一个序列，由（4）得出

$$f\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right) \leqslant \frac{1}{2} f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}[f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)]$$

用归纳法，可以证明：对所有形如 2^k 的 n 有

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i). \qquad (5)$$

现在假定当 $n=N$ 时，（5）式成立。令

$$a_N = \frac{1}{N-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}),$$

我们有

$$a_N=\frac{1}{N}\ (a_1+\cdots+a_N)$$

于是

$$f(a_N)=f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{N}\right)\leqslant\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}f(a_i)+\frac{1}{N}f(a_N).$$

可见

$$f(a_N)\leqslant\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}f(a_i)$$

因此，当 $n=N-1$ 时（5）式也成立。从而导得对所有的 $n\in\mathbf{N}$（5）式成立。

设 a，$b\in I$ 及 k，$n\in\mathbf{N}$，$k<n$，从（5）式有

$$f\left(\frac{k}{n}a+\frac{n-k}{n}b\right)\leqslant\frac{1}{n}[kf(a)+(u-k)f(b)].$$

因而，对任何的分数 $\lambda\in\mathbf{Q}$，且 $\lambda\in(0,1)$

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\qquad(6)$$

成立。鉴于 f 的连续性我们便得出对任意实数 $\lambda\in\langle 0,1\rangle$，（6）式也成立。

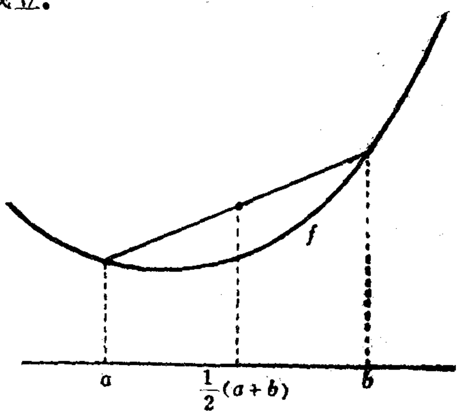


图 4

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com